定量的に精密化された多次元稠密性定理の Selberg クラスへの一般化

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　遠藤　健太
Kenta Endo
Graduate school of mathematics,
Nagoya University

1　導入

Riemann ゼータ関数を $\zeta(s)$ で表す. 1975 年, Voronin [8] は, 次の Riemann ゼータ関数の普遍性定理を証明した:

定理 1.1. $\mathcal{K}$ を帯領域 $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ 1/2 < \sigma < 1\}$ に含まれる, 補集合が連結なコンパクト集合とし, f を $\mathcal{K}$ において零点を持たない連続関数で, $\mathcal{K}$ の内部で正則な関数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\tau = \tau(\zeta, \mathcal{K}, f, \varepsilon) > 0$ が存在して,

$$\max_{s \in \mathcal{K}} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

この定理の主張は, 任意の零点を持たない正則関数が Riemann ゼータ関数を虚軸方向に平行移動することで一様に近似されるというものである. ここで, 実際に Voronin が証明したのは, $\mathcal{K}$ が円板の場合であり, 上記の定式化は Reich [5] によるものであることに注意しておく. Riemann ゼータ関数の普遍性定理が証明されてから, 様々な一般化や精密化が研究されてきた.

普遍性定理の発展の方向の一つとして, この定理を定量的な形で精密化しようというのは自然な発想である. 普遍性定理の定量的評価は, 定理の証明に非定量的な議論を用いるので, 困難であることが知られている. 本稿では, 以下の問題について考える.

問題. 任意に与えられた零点を持たない正則関数 $f(s)$ を近似する $\zeta(s + i\tau)$ の平行移動

$\tau > 0$ の最小の値はいくつか.

2010 年に, Garunkštis-Laurinčikas-Matsumoto-J. & R. Steuding [1] は, この問題に対するある定量的な結果を得ている. この結果は, Matsumoto の着想を基にして証明される. その着想は, $f(s)$ を $s = s_0$ で正則な関数とするとき, $\zeta(s+i\tau)$ と $f(s)$ の $s = s_0$ での Taylor 展開

$$\zeta(s+i\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{(k)}(s_0+i\tau)}{k!}(s-s_0)^k, \quad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(s_0)}{k!}(s-s_0)^k$$

の係数を比較するというものである. $\big(\zeta(s_0+i\tau), \zeta'(s_0+i\tau)\ldots, \zeta^{(N-1)}(s_0+i\tau)\big)$ が $\big(f(s_0), f'(s_0), \ldots, f^{(N-1)}(s_0)\big)$ を近似するような平行移動 $\tau > 0$ が見つかれば, $s = s_0$ の周りでのみ有効な "普遍性定理型の近似定理" が導出できる. 次の Voronin の多次元稠密定理 [7] が, そのような $\tau > 0$ の存在を保証する:

定理 1.2. N を自然数, $1/2 < \sigma < 1$ とする. このとき, 集合

$$\Big\{\Big(\zeta(\sigma+it), \zeta'(\sigma+it), \ldots, \zeta^{(N-1)}(\sigma+it)\Big) \in \mathbb{C}^N \ ; \ t \in \mathbb{R}\Big\}$$

は, $\mathbb{C}^N$ において稠密である.

しかしながら, 定理 1.2 も非定量的な結果なため, この定理から得られる普遍性定理型の近似定理も非定量的となる. そこで, Garunkštis-Laurinčikas-Matsumoto-J. & R. Steuding らは, 定理 1.2 の定量的な精密化となる, 次の Voronin の結果 [9] に着目した:

定理 1.3 (Karatsuba-Voronin [2] より引用)**.** N を自然数, $1/2 < \sigma_0 < 1$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $\underline{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ で $|b_0| > \varepsilon$ を満たすものを固定する. このとき, σ_0 と N にのみに依存する正の定数 $c_0 = c_0(\sigma_0, N)$ と $c_1 = c_1(\sigma_0, N)$ が存在して, 以下が成り立つ: $\log b_0$ の枝を $|\log b_0|$ が最小となるようにとると,

$$T \geq c_0 \exp\exp\left[c_1\left(|\log b_0| + \left(\frac{\|\underline{b}\|}{\varepsilon}\right)^{N^2}\right)^{\frac{8}{1-\sigma_0}+\frac{8}{\sigma_0-1/2}}\right]$$

を満たす任意の実数 T に対して, 未知数 t に関する連立不等式

$$\Big|\zeta^{(k)}(\sigma_0+it) - b_k\Big| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

は $[T, 2T]$ の範囲に解をもつ. ただし, $\|\underline{b}\| = \sum_{k=0}^{N-1} |b_k|$ である. さらに, 定数 c_0, c_1 は, それぞれが依存するパラメータを用いて明示的に計算可能である.

定理 1.3 と Matsumoto の着想を組み合わせた, 彼らの結果を述べる. ただし, 彼らの結果に僅かな誤植 (注意 1.5 を参照) が見つかったので, 以下でそれを修正したものを述べる.

定理 1.4. 複素数 $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$ は, $1/2 < \sigma_0 < 1$, $t \in \mathbb{R}$ を満たすとする. $r > 0$ とし, $\mathcal{K} = \{s \in \mathbb{C}\ ;\ |s - s_0| \le r\}$ とおく. さらに, 正則関数 $f : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ は $f(s_0) \neq 0$ を満たすとし, $M(f) = \max_{|s-s_0|\le r} |f(s)|$ とおく. また, 任意の $0 < \varepsilon < 1$ と $0 < \delta_0 < 1$ を任意に取る. このとき, 自然数 $N = N(\delta_0, \varepsilon, f)$ と正の実数 $T = T(f, \sigma_0, \varepsilon, \delta_0, N)$ が

$$M(f)\frac{\delta_0^N}{1-\delta_0} < \frac{\varepsilon}{3}$$

と

$$T \ge \max\left\{c_0 \exp\exp\left[c_1 A\left(N, f, r, \varepsilon, \delta_0\right)^{\frac{8}{1-\sigma_0} + \frac{8}{\sigma_0 - 1/2}}\right], r\right\},$$

を満たせば, ある $\tau \in [T - t_0, 2T - t_0]$ が存在して,

$$0 \le \delta \le \delta_0 \quad \text{かつ} \quad M(\tau)\frac{\delta^N}{1-\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる任意の δ に対して,

$$\max_{|s-s_0|\le \delta r} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

が成り立つ. ただし, $c_0 = c_0(\sigma_0, N)$ と $c_1 = c_1(\sigma_0, N)$ は, 定理 1.3 と同じもの,

$$A\left(N, f, r, \varepsilon, \delta_0\right) = |\log f(s_0)| + \left(\frac{\left\|\left(f(s_0), f'(s_0)\ldots, f^{(N-1)}(s_0)\right)\right\|}{(\varepsilon/3)\exp(-\delta_0 r)}\right)^{N^2}$$

であり, $M(\tau) = \max_{|s-s_0|\le r} |\zeta(s+i\tau)|$ である. ここで, $\log f(s_0)$ の枝は $|\log f(s_0)|$ が最小になるように選ぶ.

本稿では, 定理 1.3 をある条件を満たす Selberg クラス $\mathcal{S}$ の元に一般化し, それを用いて定理 1.4 の類似が得られたので, 次のセクションで, これを報告する.

注意 1.5. [1] の誤植について述べる. 設定や記号は, [1] の Theorem 1.17 と同じものとする. 彼らは, p. 214 の 2 行目において

$$|\zeta(s + i\tau) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\exp(\delta r) + M(\tau)\frac{\delta^n}{1-\delta} =: G(\delta)$$

が任意の $0 \le \delta \le \delta_0$ に対して成り立つことを証明している. ここで, n と τ は, δ_0 とその他のパラメータに依存する正の定数であり, $M(\tau)$ は, $M(\tau) = \max_{|s-s_0|\le r} |\zeta(s + i\tau)|$

で定義されるものである．彼らは，その後の議論で，$G(0) = (2/3)\varepsilon$ と $\lim_{\delta \nearrow 1} G(\delta) = \infty$ なので，$G(\delta) = \varepsilon$ を満たす δ が存在するという主張している．しかし，上記の不等式は $0 \le \delta \le \delta_0 < 1$ でのみ成り立つものであるから，この議論はいつでも成り立つとは限らない．

2 主結果

まずは，Selberg クラス $\mathcal{S}$ の定義から始める．Dirichlet 級数

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

が Selberg クラス $\mathcal{S}$ に属するとは，以下の条件を満たすことをいう:

(i) Ramanujan 予想型の仮定: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$a(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ が成り立つ．

(ii) 解析接続: ある非負整数 m が存在して，$(s-1)^m \mathcal{L}(s)$ が有限な位数を持つ整関数となる．

(iii) 関数等式: $\mathcal{L}(s)$ は，次の形の関数等式を持つ:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(s) = \omega \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(1-\overline{s})}.$$

ただし，

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}(s) R^s \prod_{j=1}^{f} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) = \gamma(s)\mathcal{L}(s)$$

であり，R, λ_j は正の実数，μ_j と ω は複素数で $\Re\mu_j \ge 0$, $|\omega| = 1$ を満たす．

(iv) Euler 積: $\log \mathcal{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-s}$ と表される．ただし，ある素数 p と $m \ge 1$ に対して $n = p^m$ となるとき，$b(n) = 0$ であり，ある $\vartheta < 1/2$ が存在して，任意の自然数 n に対して，$b(n) \ll n^\vartheta$ が成り立つ．

本稿では，さらに次の 3 つの条件を仮定する:

(C1) ある $\kappa = \kappa(\mathcal{L}) > 0$ が存在して，

$$\frac{1}{\pi(X)} \sum_{p \le X} |a(p)|^2 \sim \kappa$$

が $X \to \infty$ のとき成り立つ．ただし，$\pi(X)$ は X 以下の素数の個数を表す．

(C2) 次を満たす $\sigma_{\mathcal{L}} \geq 1/2$ が存在する: 任意の $\sigma > \sigma_{\mathcal{L}}$ に対して $\Delta_{\mathcal{L}}(\sigma) > 0$ が存在し,

$$N_{\mathcal{L}}(\sigma, T) \ll T^{1-\Delta_{\mathcal{L}}(\sigma)} \quad (T \to \infty)$$

が成り立つ. ただし,

$$N_{\mathcal{L}}(\sigma, T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma\ ;\ \rho \text{ は } \mathcal{L}(s) \text{ の非自明零点}, \beta \geq \sigma, |\gamma| \leq T\}$$

である (個数は, 重複度も込めて数える).

(C3) ある $E_{\mathcal{L}} > 0$ と $D_{\mathcal{L}} \geq 1$ が存在して,

$$\sum_{X < p \leq X+H} |a(p)|^2 \sim \kappa \frac{H}{\log X}, \quad \pi(X+H) - \pi(X) \sim \frac{H}{\log X} \quad (X \to \infty)$$

が成り立つ. ただし, $H = H(X)$ は $X \geq H \geq X^{1-E_{\mathcal{L}}}(\log X)^{D_{\mathcal{L}}}$ を満たし, H について収束は一様である.

注意 2.1. Nagoshi-Steuding [4] は, (C1) を満たすような Selberg クラスの元に対して, 普遍性定理がある領域において成り立つことを証明している.

ここで, 主結果を述べる.

定理 2.2 ([3])**.** Selberg クラスの元 $\mathcal{L}(s)$ は, 条件 (C1), (C2), (C3) を満たすとする. また, 実数 σ_0 は, $\max\{\sigma_{\mathcal{L}}, 1-2E_{\mathcal{L}}\} < \sigma_0 < 1$ を満たし, $\underline{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ は $c_0 \neq 0$ を満たすとする. このとき, $\mathcal{L}, \sigma_0, N$ に依存する正の定数 $C_1 = C_1(\mathcal{L}, \sigma_0, N)$ と $\sigma_0, E_{\mathcal{L}}$ のみに依存する正の定数 $d = d(\sigma_0, E_{\mathcal{L}})$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して以下が成り立つ: $\log c_0$ の枝を $|\log c_0|$ が最小になるようにとる. このとき,

$$T \geq \exp\exp\left[C_1\left(|\log c_0| + \left(\frac{\|\underline{c}\|}{|c_0|}\right)^{(N-1)^2}\frac{1+|c_0|}{\varepsilon}\right)^d\right]$$

を満たす任意の実数 T に対して, 未知数 t に関する連立不等式

$$\left|\mathcal{L}^{(k)}(\sigma_0 + it) - c_k\right| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

が $[T, 2T]$ の範囲において解をもつ. さらに, C_1, d はそれぞれが依存するパラメータを用いて明示的に計算できる.

定理 2.3 ([3])**.** Selberg クラスの元 $\mathcal{L}(s)$ は, 条件 (C1), (C2), (C3) を満たすとする. 複素数 $s_0 = \sigma_0 + it_0$ は $\max\{\sigma_{\mathcal{L}}, 1-2E_{\mathcal{L}}\} < \sigma_0 < 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$ を満たすとする. また, $r > 0$,

$\mathcal{K}=\{s\in\mathbb{C}\ ;\ |s-s_0|\le r\}$ を固定し, さらに, 正則関数 $f:\mathcal{K}\to\mathbb{C}$ は $f(s_0)\neq 0$ を満たすとし, $M(f)=\max_{|s-s_0|\le r}|f(s)|$ とおく. また, 任意の $0<\varepsilon<1$ と $0<\delta_0<1$ を任意に取る. このとき, 自然数 $N=N(\delta_0,\varepsilon,M(f))$ と正の実数 $T=T(\mathcal{L},f,\varepsilon,\sigma_0,\delta_0,N)$ が

$$M(f)\frac{\delta_0^N}{1-\delta_0}<\frac{\varepsilon}{3}$$

と

$$T\ge\max\left\{\exp\exp\left(C_2B\left(N,f,(\varepsilon/3)\exp(-\delta_0 r)\right)^d\right),r\right\},$$

を満たせば, ある $\tau\in[T-t_0,2T-t_0]$ が存在して,

$$0\le\delta\le\delta_0\quad \text{かつ}\quad M(\tau;\mathcal{L})\frac{\delta^N}{1-\delta}<\frac{\varepsilon}{3}$$

となる任意の δ に対して,

$$\max_{|s-s_0|\le\delta r}|\mathcal{L}(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon$$

が成り立つ. ただし, $C_1=C_1(\mathcal{L},\sigma_0,N)$, $d=d(\sigma_0,E_{\mathcal{L}})$ は, 定理 2.2 と同じもの,

$$B(N,f,\varepsilon)=|\log f(s_0)|+\left(\frac{\|\left(f(s_0),f'(s_0)\ldots,f^{(N-1)}(s_0)\right)\|}{|f(s_0)|}\right)^{(N-1)^2}\frac{3(1+|f(s_0)|)}{\varepsilon\exp(-\delta_0 r)}$$

である. ここで, $\log f(s_0)$ の枝は $|\log f(s_0)|$ が最小になるように選ぶ.

3 証明の概略

普遍性定理 1.1 や定理 1.2 の定量的精密化の困難なのは, 証明に以下の二つの非定量的な定理が用いられていることが原因である:

- Pečerskiĭによる Hilbert 空間における点列の並び替えに関する定理,
- Kronecker の近似定理.

まずは, 定理 1.2 の証明の概略から始め, 上記の定理が証明のどこで現れるのかを確認する.

3.1 定理 1.2 の証明の概略

以下において, meas_J は $\mathbb{R}^J$ 上の Lebesgue 測度とする. ただし, $J = 1$ のときは, $\mathrm{meas} = \mathrm{meas}_1$ と略記する. また, $[T, 2T]$ 上の可測関数 $f(t)$ と可測集合 A に対して,

$$\mathbb{P}_T\left(f(t) \in A\right) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{t \in [T, 2T]\ ;\ f(t) \in A\right\}$$

と表す.

定理 1.2 は次の定理から導出されることが知られている:

定理 3.1. N を自然数, $1/2 < \sigma < 1$ とする. このとき, 集合

$$\left\{\left(\log\zeta(\sigma+it), (\log\zeta)'(\sigma+it), \dots, (\log\zeta)^{(N-1)}(\sigma+it)\right) \in \mathbb{C}^N\ ;\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

は, $\mathbb{C}^N$ において稠密である.

この定理の証明の概略を簡単に述べることとする. 任意の $\varepsilon > 0$ と $z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \in \mathbb{C}$ を固定する.

$\sigma > 1$ において, $\log\zeta(\sigma+it)$ は,

$$\log\zeta(\sigma+it) = \sum_p \log\left(1 - p^{-\sigma-it}\right)^{-1} = \sum_p \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{lp^{l(\sigma+it)}}$$

と Dirichlet 級数表示ができる.

$1/2 < \sigma < 1$ においては, $\log\zeta(\sigma+it)$ はこのような Dirichlet 級数表示は持たない. しかしながら, $\log\zeta(\sigma+it)$ の Dirichlet 級数表示を有限に打ち切った級数

$$\log\zeta_J(\sigma+it) = \sum_{j=1}^{J} \log\left(1 - p_j^{-\sigma-it}\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{lp^{l(\sigma+it)}}$$

は $\log\zeta(s)$ を, J が十分に大きいときに, ”平均的な意味”で近似することが知られている. ここで, ”平均的な意味”で近似するとは, 任意の $\varepsilon' > 0$ に対して,

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}_T\left(\left|\log\zeta(\sigma+it) - \log\zeta_J(\sigma+it)\right| \geq \varepsilon'\right) = 0$$

が成り立つことを意味する.

$\log\zeta(s)$ の高階導関数についても同様の議論ができるので,

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}_T\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left|(\log\zeta)^{(k)}(\sigma+it) - (\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma+it)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

が成り立つ.

次に, Kronecker の近似定理と確率論の一般論を用いると, 任意に固定された $X > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{P}_T\left(\max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma+it) - z_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\ge \mathrm{meas}_J\left\{\underline{\theta}_J = (\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots, \theta_{p_J}) \in [0,1)^J \ ; \ \max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma, \underline{\theta}_J) - z_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

が成り立つことがわかる. ただし, p_j は j 番目の素数を表し,

$$\log\zeta_J(\sigma, \underline{\theta}_J) = \sum_{j=1}^{J}\log\left(1 - p_j^{-\sigma}e^{2\pi i\theta_{p_j}}\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi il\theta_{p_j}}}{p_j^{l\sigma}}$$

と定義する.

したがって, J と T が十分大きいとき,

$$\left(\log\zeta(\sigma+it), (\log\zeta)'(\sigma+it), \ldots, (\log\zeta)^{(N-1)}(\sigma+it)\right)$$

の $t \in [T, 2T]$ における値の分布の情報は,

$$\left(\log\zeta_J(\sigma, \underline{\theta}_J), (\log\zeta_J)'(\sigma, \underline{\theta}_J), \ldots, (\log\zeta_J)^{(N-1)}(\sigma, \underline{\theta}_J)\right)$$

の $\underline{\theta}_J \in [0,1)^J$ における値分布のものから引き出せることがわかる. 後者の値分布の解析は, 前者の値分布の解析より簡単である. 実際, Pečerskiĭによる Hilbert 空間における点列の並び替えに関する定理を用いることで, 次の補題を証明することができる.

補題 3.2. 任意の $\varepsilon' > 0$, $1/2 < \sigma < 1$, $x_0, \ldots, x_{N-1} \in \mathbb{C}$ を固定する. このとき, ある $\delta = \delta(\varepsilon', \sigma, x_0, \ldots, x_{N-1}) > 0$ と $J_0 = J_0(\varepsilon', \sigma, x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の自然数 $J \ge J_0$ に対して,

$$\mathrm{meas}_J\left\{\underline{\theta}_J \in [0,1)^J \ ; \ \max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma, \underline{\theta}_J) - x_k\right| < \varepsilon'\right\} > \delta$$

が成り立つ.

最後に, 実際に定理 3.1 が導かれることを確認する. $1/2 < \sigma < 1$ とする. このとき, こ

の補題と等式 (1) より, J が十分大きいとき,

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty}\mathbb{P}_T\left(\max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta)^{(k)}(\sigma+it)-z_k\right|<\varepsilon\right)\\
\ge&\liminf_{T\to\infty}\mathbb{P}_T\left(\max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma+it)-z_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&-\liminf_{T\to\infty}\mathbb{P}_T\left(\max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta)^{(k)}(\sigma+it)-(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma+it)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
\ge&\,\mathrm{meas}_J\left\{\underline{\theta}_J\in[0,1)^J\ ;\ \max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma,\underline{\theta}_J)-z_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
&-\liminf_{T\to\infty}\mathbb{P}_T\left(\max_{0\le k\le N-1}\left|(\log\zeta)^{(k)}(\sigma+it)-(\log\zeta_J)^{(k)}(\sigma+it)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
>&\,\delta
\end{aligned}
$$

が導かれる. ただし, δ は補題 3.2 において, ε', $x_0,\ldots,x_{N-1}$ を ε, $z_1,\ldots,z_{N-1}$ に置き換えたときに存在する, 正の実数 $\delta=\delta(\varepsilon,\sigma,z_1,\ldots,z_{N-1})$ である.

3.2 定理 1.3 の証明の概略

Voronin の着想は, 上記の証明の非定量的な議論を以下のものに置き換えることである:

- Kroneker の近似定理を用いる議論を, "重み付きの平均値" を計算するものにする,
- Pečerskiĭの定理を用いる議論を, 短区間中の素数定理を用いたものにする.

前者は, Selberg クラスへ一般化する際にも, ほとんど同様の議論が走る. しかしながら, 後者は全く同様とはいかない. そのため, 本稿では後者の部分について述べることとする.

Pečerskiĭの定理が必要な場所は,

$$\left(\log\zeta_J(\sigma,\underline{\theta}_J),(\log\zeta_J)'(\sigma,\underline{\theta}_J),\ldots,(\log\zeta_J)^{(N-1)}(\sigma,\underline{\theta}_J)\right)$$

の $\underline{\theta}_J\in[0,1)^J$ における値分布を調べるところで, 補題 3.2 に対応する部分である.

$1/2<\sigma<1$ において,

$$\log\zeta_J(\sigma,\underline{\theta}_J)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi il\theta_{p_j}}}{p_j^{l\sigma}}=\sum_{j=1}^{J}\frac{e^{2\pi i\theta_{p_j}}}{p_j^{\sigma}}+\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{e^{2\pi il\theta_{p_j}}}{p_j^{l\sigma}}$$

と表示する. このとき, 二つ目の和で J を無限大にした級数は絶対収束するので, $\log\zeta_J(\sigma,\underline{\theta}_J)$ の値分布を知るためには, 一つ目の和 $\sum_{j=1}^{J}e^{2\pi i\theta_{p_j}}p^{-\sigma}$ を調べれば良い

ことが確かめられる. $\log\zeta_J(\sigma,\underline{\theta}_J)$ の高階導関数についても同様である. したがって, 補題 3.2 を得るには, 次の補題を証明すれば良い.

補題 3.3. $1/2<\sigma<1$ とする. このとき, 集合

$$\left\{\left(\sum_{j=1}^{J}\frac{e^{2\pi i\theta_{p_j}}}{p_j^{\sigma}},\ldots,\sum_{j=1}^{J}\frac{(-\log p_j)^{N-1}e^{2\pi i\theta_{p_j}}}{p_j^{\sigma}}\right)\in\mathbb{C}^N\ ;\ J\geq 1,\ \underline{\theta}_J\in[0,1)^J\right\}$$

は, $\mathbb{C}^N$ において稠密である.

したがって, この補題の定量化が目標となる. そのために, まず次の補題を紹介する.

補題 3.4. J を 3 以上の自然数とする. また, 正の実数 $r_1\leq r_2\cdots\leq r_J$ は, $r_J\leq\sum_{j=1}^{J-1}r_j$ を満たすとする. このとき,

$$\left\{\sum_{j=1}^{J}r_j\exp(2\pi i\theta_j)\in\mathbb{C}\ ;\ \theta_j\in[0,1)\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|\leq\sum_{j=1}^{J}r_j\right\}$$

が成り立つ.

証明は, 例えば [6, Lemma 3.2] をみられたい. この補題は,

$$\sum_{p:\text{有限}}\frac{e^{2\pi i\theta_p}}{p^{\sigma}},\quad \theta_p\in[0,1)$$

の値分布の解析に用いられることに注意しておく.

さて, これを踏まえて Voronin の着想を述べよう. X は十分を大きい実数とし, $H=H(X)\leq X$ は後に選ばれるパラメータとする. また, 任意の $j=0,\ldots,N-1$ に対して,

$$\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)=\left\{p\ ;\ 2^jX<p\leq 2^jX+H\right\},$$

とおき,

$$\mathcal{M}(X,H;\zeta)=\bigsqcup_{j=0}^{N-1}\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)$$

と定める. Voronin は,

$$\left(\sum_{p\in\mathcal{M}(X,H;\zeta)}\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^{\sigma}},\ldots,\sum_{p\in\mathcal{M}(X,H;\zeta)}\frac{(-\log p)^{N-1}e^{-2\pi i\theta_p}}{p^{\sigma}}\right)\tag{2}$$

の値分布を

$$\sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma}, \quad j=0,1,\ldots,N-1$$

の値分布を用いて記述する方法を発見した.

少々複雑だが, 以下にその方法を述べる. 任意に $\underline{c}=(c_0,\ldots,c_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ が与えられているとする. このとき, 任意の $j,k=0,1,\ldots,N-1$ に対して,

$$R_{j,k}=\sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} R_{j,k} &= \sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} - \bigl(-\log(2^jX)\bigr)^k \sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \\ &= \sum_{2^jX<p\le 2^jX+H} \Bigl\{(-\log p)^k-\bigl(-\log(2^jX)\bigr)^k\Bigr\} \frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \\ &\ll_N H^2X^{-(1+\sigma_0)}(\log X)^{N-2} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 上の計算では $(-\log p)^k-\bigl(-\log(2^jX)\bigr)^k$ の部分に平均値の定理を用いた. したがって, H を”適切に小さく”取れば, $R_{j,k}$ は小さくなるので, 近似式

$$\sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \approx \bigl(-\log(2^jX)\bigr)^k \sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)} \frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \tag{3}$$

が成り立つ.

この近似式と以下の補題を組み合わせる.

補題 3.5. X を $X>e$ となる実数, N を自然数とする. また, $\underline{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ が固定されているとする. 任意の $j=0,1,\ldots,N-1$ に対して, $X_j=2^jX$ とおく. このとき, 未知ベクトル $\underline{z}=(z_0,z_1,\ldots,z_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\log X_0 & -\log X_1 & \cdots & -\log X_{N-1} \\ (-\log X_0)^2 & (-\log X_1)^2 & \cdots & (-\log X_{N-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\log X_0)^{N-1} & (-\log X_1)^{N-1} & \cdots & (-\log X_{N-1})^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

は唯一つの解 $\underline{z}_0=\underline{z}_0(X,\underline{a})\in\mathbb{C}^N$ を持ち, 評価式

$$\|\underline{z}_0\| \ll_N (\log X)^{N-1}\|\underline{a}\|$$

が成り立つ.

証明は, [9, 2] にもあるが, 詳しい証明については [3] をみられたい.

補題 3.5 より,

$$\sum_{j=0}^{N-1}(-\log(2^jX))^k z_j = c_k \quad k=0,1,\ldots,N-1. \tag{4}$$

を満たす $\underline{z}=\underline{z}(\underline{c},X)=(z_0,z_1,\ldots,z_{N-1})\in\mathbb{C}^N$ が存在し,

$$\|\underline{z}\| \ll_N (\log X)^{N-1}\|\underline{c}\| \tag{5}$$

が成り立つ. いま, 近似式 (3) より,

$$\sum_{p\in\mathcal{M}(X,H;\zeta)}\frac{(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \approx \sum_{j=0}^{N-1}\big(-\log(2^jX)\big)^k \sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)}\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \tag{6}$$

が成り立つ. したがって,

$$\sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\zeta)}\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} = z_j \quad j=0,1,\ldots,N-1, \tag{7}$$

を満たすような $\underline{\theta}=(\theta_p)_{p\in\mathcal{M}(X,H;\zeta)}\in[0,1)^{\mathcal{M}(X,H;\zeta)}$ が存在すれば, (4), (6), (7) より, 近似式

$$\sum_{p\in\mathcal{M}(X,H;\zeta)}\frac{(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \approx c_k$$

が成り立つことがわかる. 上記の等式 (7) を満たす $\underline{\theta}\in[0,1)^{\mathcal{M}(X,H;\zeta)}$ の存在を保証するには, H を"適当に大きく"取り, 評価 (5), 短区間中の素数定理, 補題 3.4 を組み合わせて用いれば良い.

ところで, 近似式 (3) を得るためには, H を"適当に小さく"取る必要があると述べた. 一方で, 等式 (7) を満たすような $\underline{\theta}\in[0,1)^{\mathcal{M}(X,H;\zeta)}$ の存在には, H を"適当に大きく"取る必要がある. したがって, H は小さすぎず, 大きすぎないように適切に選ぶことが必要になるのである.

3.3 Selberg クラスへの一般化

サブセクション 3.2 で述べた議論の Selberg クラスへ一般化を概説する．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の場合, 証明の鍵となるのは,

$$\sum_{2^jX<p\le 2^jX+H}\frac{e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma}\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

の解析が簡単であることである．一方で, Selberg クラスの場合に上記に対応するものは,

$$\sum_{2^jX<p\le 2^jX+H}\frac{a(p)e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma}\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

の解析であるが, これは一般に困難である．

したがって, 非交和な, 素数からなる有限集合の族 $\{\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})\}_{j=0}^{N-1}$ を,

$$\sum_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})}\frac{a(p)e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma},\quad j=0,1,\ldots,N-1,\tag{8}$$

の解析が簡単にでき, これらの値を用いて

$$\sum_{p\in\mathcal{M}(X,H;\mathcal{L})}\frac{a(p)(-\log p)^k e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma},\quad k=0,1,\ldots,N-1.\tag{9}$$

の値を制御できるように取り直さなければならない．ここで,

$$\mathcal{M}(X,H;\mathcal{L})=\bigsqcup_{j=0}^{N-1}\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})$$

である．

有限集合の族 $\{\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})\}_{j=0}^{N-1}$ の取り方と証明の方針は, 以下の通りである．

(I) $b(p_{k_k})\neq 0$ となる $\{p_{k_j}\}_{j=1}^{N-1}$ を取り, 任意の $j=0,1,\ldots,N-1$ に対して,

$$\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})=\{p_{k_j}\}\cup\left\{p\ ;\ 2^jX<p\le 2^jX+H\right\}$$

とおく．

(II) 正密度法とよばれる手法と補題 3.4 を組み合わせることで, (8) の値の解析をする．

(III) Voronin の手法を, (8) の値を用いて (9) の値の解析できる形に修正する．

(I) の $b(p_{k_k}) \neq 0$ となる $\{p_{k_j}\}_{j=1}^{N-1}$ の役割は,

$$\left\{ \frac{a(p)e^{-2\pi i\theta_p}}{p^\sigma} \right\}_{p\in\mathcal{M}_j(X,H;\mathcal{L})}$$

の中で, 一番大きい長さを持つベクトルをいつでも

$$\frac{a(p_{k_j})e^{-2\pi i\theta_{p_{k_j}}}}{p_{k_j}^\sigma}$$

で取れることを保証することである.

(II) では, 仮定 (C3) と正密度法を用いて,

$$\frac{|a(p_{k_j})|}{p_{k_j}^\sigma} \leq \sum_{2^jX<p\leq 2^jX+H} \frac{|a(p)|}{p^\sigma}$$

を満たすような H が取れることを保証し, 補題 3.4 を用いる. X が十分大きければ, Selberg クラスの定義 (i) により, $|a(p)|p^{-\sigma}$ の値は十分小さくなる. 補題 3.4 を用いるために, (I) と正密度法を (C3) と組み合わせて用いるのである.

(III) では, Voronin の手法を踏襲しようとすると, $b(p_{k_k}) \neq 0$ となる $\{p_{k_j}\}_{j=1}^{N-1}$ に関する誤差を考慮する必要が生じる. その部分を修正すれば良い.

参考文献

[1] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding and R. Steuding, *Effective uniform approximation by the Riemann zeta-function*, Publ. Mat. **54**(2010), no. 1, 209-219.

[2] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruyter, 1992.

[3] K. Endo, *Effective uniform approximation by L-functions in the Selberg class*, to apper in Functiones et Approximatio.

[4] H. Nagoshi and J. Steuding, *Universality for L-functions in the Selberg class*, Lith. Math. J., **50** (2010), no. 3, 293–311.

[5] A. Reich, *Universelle Werteverteilung von Eulerprodukten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. -Phys. Kl. II. (1977), no. 1, 1–17.

[6] S. Takanobu, *Bohr-Jessen Limit Theorem, Revisited*, MSJ Memoirs **31**, Math. Soc. Japan, 2013.

[7] S. M. Voronin, *The distribution of the nonzero values of the Riemann ζ-function*, (Russian), Collection of articles dedicated to Academician Ivan Matveevič Vinogradov on his eightieth birthday. II, Trudy Mat. Inst. Steklov. **128** (1972), 131–150, 260.

[8] S. M. Voronin, *Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **39** (1975), 475–486 (in Russian). English transl. : *Math. USSR, Izv.*, **9** (1975), 443–445.

[9] S. M. Voronin, *Ω-theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **52** (1988), no. 2, 424–436 ; translation in Math. USSR–Izv. **32** (1989), no. 2, 429–442.