Extreme value distributions for iterated integrals of the logarithm of the Riemann zeta-function

峰 正博 (Mine, Masahiro)

上智大学 日本学術振興会特別研究員 PD
Sophia University, JSPS Research Fellow

1 $\log\zeta(s)$ の反復積分

本稿は遠藤健太氏（名古屋大），井上翔太氏（東工大・名古屋大）と筆者による論文 [4] の概説である．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，その対数をとり $\eta_0(s)=\log\zeta(s)$ とおく．井上氏は [6] において，整数 $m\geq 1$ に対して

$$\eta_m(\sigma+it)=\int_0^t \eta_{m-1}(\sigma+iy)\,dy+c_m(\sigma)$$

と定義される関数を導入し，ゼータ関数の値分布理論への応用を豊富に含む，関数 $\eta_m(s)$ の画期的な近似式を証明した．なお，$\log\zeta(s)$ の分枝の取り方や，定数 $c_m(\sigma)$ の正確な表示については，[6, Section 1] を参照していただきたい．次いで遠藤氏と井上氏は [3] において，水平方向の積分によって定義される同様の関数

$$\tilde{\eta}_m(\sigma+it)=\int_\sigma^\infty \tilde{\eta}_{m-1}(x+it)\,dx \tag{1.1}$$

を考察した．ただし $\tilde{\eta}_0(s)=\log\zeta(s)$ と定める．いわゆる Littlewood の補題により，$\eta_m(s)$ と $\tilde{\eta}_m(s)$ の間には簡潔な関係式 [3, Lemma 1] があり，とくに Riemann 予想が真であれば $\sigma\geq 1/2$ かつ $t>0$ のときに $\eta_m(\sigma+it)=i^m\tilde{\eta}_m(\sigma+it)$ が成り立つことが分かる．このことから，$\eta_m(s)$ についての研究は $\tilde{\eta}_m(s)$ の研究に概ね帰着される．$\tilde{\eta}_m(s)$ の値分布に関して，遠藤氏と井上氏が得た結果は以下の通りである．

定理 1. 実数 $1/2\leq\sigma<1$ と整数 $m\geq 1$ に対して，集合 $\{\tilde{\eta}_m(\sigma+it)\mid t\geq 0\}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ において稠密である．

$m=0$ の場合には集合 $\{\log\zeta(\sigma+it)\mid t\geq 0\}$ の稠密性を考えることになるが，状況は全く異なる．古典的な結果として，$\{\log\zeta(\sigma+it)\mid t\geq 0\}$ は実数 $1/2<\sigma\leq 1$ に対して $\mathbb{C}$ 上で

稠密である（H. Bohr, 1916）．一方で，これが $\sigma = 1/2$ の場合に正しいか否かは未解決問題である．また関連して，集合 $\{\zeta(1/2+it) \mid t \geq 0\}$ が $\mathbb{C}$ 上で稠密であるかも未解決であり，この問題はしばしば “Ramachandra の問題”と呼ばれる．こうした稠密性に関する諸結果については，詳しくは [3] のほか，遠藤氏による概説 [2] もご覧いただければと思う．

筆者は 2019 年 7 月頃から $\eta_m(s)$ および $\tilde{\eta}_m(s)$ に関する遠藤・井上両氏の研究に合流し，定理 1 の精緻化を含めた幾つかの課題に取り組んできた．とくに同年には Y. Lamzouri, S. J. Lester，M. Radziwiłł の 3 者による $\zeta(s)$ の値分布についての論文 [9] が J. Anal. Math. から出版されており，彼らの結果を $\tilde{\eta}_m(s)$ へ拡張することが我々の研究の目的であった．

2　主結果

2.1　準備 — $\tilde{\eta}_m(s)$ とランダム Dirichlet 級数

複素数 $s = \sigma + it$ が $\sigma > 1$ を満たすとき，$\zeta(s)$ の Euler 積表示により

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\,:\,\text{素数}} \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^{-ks}$$

が成り立つ．また一般に整数 $m \geq 0$ に対して，関数 $\tilde{\eta}_m(s)$ は Dirichlet 級数表示

$$\tilde{\eta}_m(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}(\log p)^m} p^{-ks}$$

を持つことが (1.1) により従う．この表示に基づいて，確率変数 $\tilde{\eta}_m(\sigma, \mathbb{X})$ を以下のように定める．まず $\{\mathbb{X}(p)\}_{p\,:\,\text{素数}}$ を互いに独立な確率変数の無限列*1 で，各 $\mathbb{X}(p)$ は複素平面における単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上に一様分布しているものとする．このとき

$$\tilde{\eta}_m(\sigma, \mathbb{X}) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{m+1}(\log p)^m} p^{-k\sigma} \mathbb{X}(p)^k$$

と定義すると，このランダム Dirichlet 級数は $m \geq 1$ かつ $\sigma \geq 1/2$ のとき，almost surely で収束することが証明できる．さて，$\mathbb{C}$ 上の Borel 測度 $\mu_T(\,\cdot\,;\sigma,m)$，$\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ を

$$\mu_T(A;\sigma,m) = \frac{1}{T} \operatorname{meas}\{t \in [0,T] \mid \tilde{\eta}_m(\sigma+it) \in A\},$$
$$\mu(A;\sigma,m) = \mathbb{P}(\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X}) \in A)$$

により定義する．ただし $\operatorname{meas} S$ は集合 $S \subset \mathbb{R}$ の 1 次元 Lebesgue 測度であり，また $\mathbb{P}(E)$ は事象 E が起こる確率を表すものとする．このとき，$\tilde{\eta}_m(\sigma+it)$ と $\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})$ の関係性を示す結果として，次の命題が基本的である．

---

*1　このような確率変数の無限列の存在は，よく知られているように Kolmogorov の拡張定理から従う．

命題. 実数 $\sigma \geq 1/2$ と整数 $m \geq 1$ に対して，$\mu_T(\,\cdot\,;\sigma,m)$ は $T \to \infty$ のとき $\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ に弱収束する．さらに $1/2 \leq \sigma < 1$ のときは，$\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ は狭義正である．

命題の主張に現れる用語を参考までに説明しておくと，$\mu_T(\,\cdot\,;\sigma,m)$ が $T \to \infty$ のとき $\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ に弱収束するとは，以下の条件

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{C}} f(z)\,\mu_T(dz;\sigma,m) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\,\mu(dz;\sigma,m)$$

が $\mathbb{C}$ 上の任意の有界連続関数 f に対して成り立つことを言う．これは任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対して，不等式

$$\liminf_{T\to\infty}\mu_T(U;\sigma,m) \geq \mu(U;\sigma,m)$$

が成り立つことと同値であることが知られている．また $\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ が狭義正であるとは，空でない任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対し，$\mu(U;\sigma,m) > 0$ が成立することを言う．したがって任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $\epsilon > 0$ に対して，$1/2 \leq \sigma < 1$ かつ $m \geq 1$ のとき

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\{t \in [0,T] \mid |\tilde{\eta}_m(\sigma+it)-\alpha| < \epsilon\} > 0 \tag{2.1}$$

が成り立つことが上記の命題より直ちに従う．先述の定理 1 は，十分に大きい T に対して

$$\{t \in [0,T] \mid |\tilde{\eta}_m(\sigma+it)-\alpha| < \epsilon\} \neq \emptyset$$

であるとも言い換えられるが，(2.1) はこの集合の密度を考えることで定理 1 を精緻化したものだと言える．さらに，測度 $\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ のより詳細な性質（Lebesgue 測度に関する絶対連続性）を用いて，(2.1) の左辺は実際には極限が存在することも示せる．[4] においては，その収束の速さに関する評価も含めた結果を得ているのだが，本稿では割愛する．そのほか特記すべき事項として，遠藤氏は [1] において，(2.1) の関数空間における類似である普遍性定理を証明するに至った．こうした方向性からの Ramachandra の問題に対する取り組みも夢想し得るが，道のりは未だ遠いと思われる．さらなる研究の発展に期待したい．

2.2　$\tilde{\eta}_m(s)$ の値分布における大偏差

本稿の主結果は，変数 t が区間 $[T,2T]$ を動くときの，$\tilde{\eta}_m(\sigma+it)$ の極値 (extreme value) の分布に関するものである．確率論的な観点からは，$\tilde{\eta}_m(\sigma+it)$ という値について，大きな偏り（large deviation）が生じる確率についての結果とも言い換えられる．具体的には τ が適当な意味で大きいときに，条件 $\mathrm{Re}\,e^{-i\alpha}\tilde{\eta}_m(\sigma+it) > \tau$ を満たす $t \in [T,2T]$ がどの程度の割合で存在するかを考える．ただし $\alpha \in \mathbb{R}$ である．すなわち，

$$\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha) = \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{t \in [T,2T] \,\middle|\, \mathrm{Re}\,e^{-i\alpha}\tilde{\eta}_m(\sigma+it) > \tau\right\}$$

と定め，τ が大きいときの $\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha)$ の挙動を調べるのである．参考として，$m=0$ の場合には $\mathrm{Re}\, e^{-i\alpha}\log\zeta(\sigma+it)>\tau$ という条件を考えることになるが，実数 $1/2<\sigma<1$ に対して

$$\left\{t\in[T,2T]\ \middle|\ \mathrm{Re}\, e^{-i\alpha}\log\zeta(\sigma+it)>\tau\right\}\neq\emptyset \tag{2.2}$$

が $\tau\le c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-\sigma}$ の範囲で証明されている（Montgomery [10]）．ただし T は十分大きく，$c(\sigma)$ は適当な正定数とする．したがって，τ が概ね $(\log T)^{1-\sigma+o(1)}$ までの大きさで推移するときの $\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha)$ の漸近挙動を知ることが一つの目標になる．

2.1 節で述べた Borel 測度 $\mu_T(\,\cdot\,;\sigma,m)$，$\mu(\,\cdot\,;\sigma,m)$ の関係性によれば，$\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha)$ の挙動は，確率変数 $\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})$ を用いて定義した

$$\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)=\mathbb{P}\left(\mathrm{Re}\, e^{-i\alpha}\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})>\tau\right) \tag{2.3}$$

と結びついていることが期待される．τ が大きいときの $\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)$ の漸近挙動は，以下の服部・松本型公式として記述される．任意の $1/2<\sigma<1$, $m\ge 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)=\exp\left(-A(\sigma,m)\tau^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log\tau)^{\frac{m+\sigma}{1-\sigma}}\left(1+O\left(\frac{\log\log\tau}{\log\tau}\right)\right)\right)$$

が十分大きい τ に対して成り立つ（服部・松本 [5] の類似）．ここで $A(\sigma,m)$ は正定数で, 変形 Bessel 関数を含む積分の形で明示的に表示される．詳しくは [4, Section 8] を見よ．以上のことから，$\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha)$ を知るためには，それが $\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)$ によってどの程度良く近似されるかを見ればよいということになる．2000 年代初頭の A. Granville と K. Soundararajan の仕事を契機に，この方向性で多くの研究が行われ，とくに Lamzouri–Lester–Radziwiłł [9] は $m=0$ の場合において次の結果を得た．実数 $1/2<\sigma<1$ に対して

$$\Phi_T(\tau;\sigma,0,0)=\Phi(\tau;\sigma,0,0)\left\{1+O\left(\frac{(\tau\log\tau)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\log\log T}{(\log T)^{\sigma}}\right)\right\} \tag{2.4}$$

が $3\le\tau\le c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-\frac{1}{\sigma}}$ の範囲で成り立つ．ただし T は十分大きく，$c(\sigma)$ は適当な正定数とする．着目すべき点として，$1/2<\sigma<1$ のとき $-\sigma>-\frac{1}{\sigma}$ であるので，(2.4) における τ の範囲は，Montgomery による (2.2) における範囲よりも狭くなっている．本稿の主結果は (2.4) を任意の $m\ge 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ へと拡張したものであるが，それだけでなくこの τ の範囲についても幾らかの改良がなされている．主張は以下の通りである．

定理 2. 実数 $1/2<\sigma<1$ と整数 $m\ge 0$ に対して，ある定数 $c(\sigma,m)>0$ が存在し，

$$\Phi_T(\tau;\sigma,m,\alpha)=\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)\left\{1+O\left(\frac{\tau^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(\log\tau)^{\frac{\sigma+m}{1-\sigma}}}{(\log T)^{\sigma}(\log\log T)^{m}}\right)\right\}$$

が任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し $3\le\tau\le c(\sigma,m)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-m-1}$ の範囲において成り立つ．ただし T は十分大きく，O-定数は σ と m のみに依存する．

3　幾つかの注意と今後の課題

定理 2 に至るアイデアの源は，確かに Lamzouri–Lester–Radziwiłł [9] にあると言えるが，その証明には本質的に新しい議論が必要となる箇所が幾つもある．そもそもの問題として，彼らの論文 [9] には（少なくとも筆者にとっては）不可解な箇所が散見される．実のところそうした点への補足や修正が，定理 2 を証明する上での要点となっている面もある．本稿の残りのページでは，[9] の不十分な箇所に対して，我々がどのように [4] において補足・修正を行ったかを記述していこうと思う．

1. 何よりもまず述べておきたいのは，[9] の元々の主張では (2.4) が成り立つ τ の範囲が，$3 \leq \tau \leq c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{1-\frac{1}{\sigma}}$ と記載されている[*2] ことである．しかしこれは誤りで，本稿記載の $3 \leq \tau \leq c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-\frac{1}{\sigma}}$ が正しい．問題になるのは [9, 式 (7.20)] の後半部分であり，そこでは

$$\exp\left(O\left(\lambda N(\tau\log\tau)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{(\tau\log\tau)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\log\log T}{(\log T)^{\sigma}}\right) \tag{3.1}$$

という計算が行われている．ただし適当な定数 $b(\sigma) > 0$ に対して $\lambda = b(\sigma)(\log T)^{-\sigma}$ とし，また $N = \lfloor \log\log T \rfloor$ である．この設定の下で，$\lambda N(\tau\log\tau)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$ が有界であるのは $\tau \ll (\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-\frac{1}{\sigma}}$ が成り立つときに限ることに注意されたい．故にこの範囲を超えてしまうと (3.1) が成立せず，結果として (2.4) が成り立つ τ の範囲は $3 \leq \tau \leq c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-\frac{1}{\sigma}}$ までということになる．なお λ や N といったパラメーターを取り直しても，問題の解決にはならない．これらのパラメーターは，指示関数 $\mathbf{1}_{(1,\infty)}$ を近似するある不等式 [9, Lemma 7.2] に由来しており，この不等式を利用する以上は τ の範囲は原理的に決定されてしまうのである．さて本稿の定理 2 においては，$m = 0$ の場合に τ の範囲を $3 \leq \tau \leq c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{-1}$ としているが，この改善（$1/2 < \sigma < 1$ のとき $-\frac{1}{\sigma} < -1$ である）は指示関数の近似方法を変更したことによる恩恵が大きい．[4] においては，指示関数 $\mathbf{1}_{(c,d)}$ を近似するため以下の Beurling–Selberg 関数 $W_{c,d}$ を用いた．

$$W_{c,d}(x) = \mathrm{Im}\int_0^L G\left(\frac{u}{L}\right)e^{2\pi ixu} f_{c,d}(u)\,\frac{du}{u}.$$

ただし $G(u) = \frac{2u}{\pi} + \frac{2(1-u)u}{\tan(\pi u)}$，$f_{c,d}(u) = \frac{1}{2}(e^{-2\pi iuc} - e^{-2\pi iud})$ とする．指示関数 $\mathbf{1}_{(c,d)}$ はこの関数 $W_{c,d}$ によって非常に良く近似される [4, Lemma 5.3]．ただしこの近似は

---

*2 余談であるが，$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \sigma < 1$ のとき $1 - \frac{1}{\sigma} > -\sigma$ であるので，$3 \leq \tau \leq c(\sigma)(\log T)^{1-\sigma}(\log\log T)^{1-\frac{1}{\sigma}}$ という範囲は Montgomery による (2.2) が成立する τ の範囲よりもさらに広くなり得る．

元々の [9] の手法とは相性があまり良くないので，実際には Cramér の手法という，むしろ確率論の伝統的な手法を応用するという変更も必要であった．

2. 次に，[4] において定理 2 を証明する際の要所の一つである，確率変数 $\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})$ のキュムラント生成関数の解析的性質について述べる．実数 $\sigma > 1/2$ と整数 $m \geq 0$ に対して，n 次モーメント $\mu_n = \mathbb{E}\left[\left(\operatorname{Re} e^{-i\alpha}\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})\right)^n\right]$ を考える．それらの生成関数

$$F(z;\sigma,m,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{z^n}{n!}$$

は z の整関数であり，確率変数 $\tilde{\eta}_m(\sigma,\mathbb{X})$ の研究において非常に有用である．さらにその対数である $f(z;\sigma,m,\alpha) = \log F(z;\sigma,m,\alpha)$ はキュムラント生成関数と呼ばれ，これも重要な対象である．とくに [9] においては $m = 0$, $\alpha = 0$ に対してキュムラント生成関数の漸近評価に関する考察が行われた．この場合には

$$f(z;\sigma,0,0) = \log \mathbb{E}\left[\exp(z \operatorname{Re}\tilde{\eta}_0(\sigma,\mathbb{X}))\right] = \log \mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^z\right]$$

である．ただし $\zeta(\sigma,\mathbb{X}) = \prod_p (1 - p^{-\sigma}\mathbb{X}(p))^{-1}$ とする．以下では [9] における表記に合わせて $M(z) = \log \mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^z\right]$ とおく．実数 $k > 0$ を十分大きくとり，$|t| \leq k$ とする．このとき $n \leq 2$ に対する $M^{(n)}(k)$ の漸近評価と，$M^{(3)}(k+it)$ の漸近評価が [9, Proposition 7.5] で主張されている．なおその証明については，$n = 0$ に対する評価は [8] で示されており，$n \geq 1$ に対しても “along the same lines” で証明できるとだけ記載されている．彼らがどのような証明を思い描いていたかは分からないが，実際には $n \geq 2$ の場合には以下に示すような，それなりに骨が折れる議論が必要であると思われる．まず各素数 p に対して $M_p(z) = \log \mathbb{E}\left[|1 - p^{-\sigma}\mathbb{X}(p)|^{-z}\right]$ と定め，$M^{(n)}(k)$ を

$$M^{(n)}(k) = \sum_{p \leq y_1} M_p^{(n)}(k) + \sum_{y_1 < p \leq y_2} M_p^{(n)}(k) + \sum_{p > y_2} M_p^{(n)}(k)$$

と分解する．ただしパラメーター y_1, y_2 は $y_1 \asymp \kappa^{\frac{1}{2\sigma}}$, $y_2 \asymp \kappa^{\frac{1}{\sigma}}(\log\kappa)^{\frac{1}{2\sigma-1}}$ を満たす．このうち中央の $y_1 < p \leq y_2$ に対する和から主要項が生じるが，$p > y_1$ のときは $M_p(z)$ が Bessel 関数による良い近似を持つことを利用すると，その扱いは技術的にはさほど難しくない．同じ理由で $p > y_2$ に対する和も，適切に上から評価できる．困難が生じるのは最初の $p \leq y_1$ に対する和で，各 p について $M_p^{(n)}(k) \ll k^{1-n}p^{-\sigma}$ という評価が主要項との兼ね合いで必要になる．これは $n = 0, 1$ の場合はほぼ自明な評価であり，実際 [8] における $n = 0$ での証明では何も問題はない．しかし $n \geq 2$ の場合に $M_p^{(n)}(k) \ll k^{1-n}p^{-\sigma}$ を証明するには [8] のアイデアだけでは不十分で，より深い観察が要求されるのである．具体的には，まず saddle-point method により

$$\mathbb{E}\left[|1 - p^{-\sigma}\mathbb{X}(p)|^{-z}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(z\lambda(\theta)\right)\, d\theta$$

を評価する．ここで関数 λ は $\lambda(\theta) = -\log\left|1 - p^{-\sigma}e^{i\theta}\right|$ と定義され，これは $\theta = 0$ で最大値をとり $\theta = \pi$ で最小値をとる．結果として

$$M_p(z) = z\lambda(0) - \log\sqrt{2\pi z|\lambda''(0)|} + O\left(\sqrt{\kappa^{-1}p^{\sigma}}\right)$$

という漸近等式が $p \le y_1$ の場合に成り立つことが示される．ただし $z = \kappa + it$ は十分大きい定数 C に対して $\kappa > C$, $|t| \le \kappa$ を満たすとする．その後 Cauchy の積分公式を適用すれば所望の $M_p^{(n)}(k)$ の評価が得られるのである．ただしこれは $\alpha = 0$ の場合であり，一般の偏角 $\alpha \in \mathbb{R}$ で同様の評価を得るには，saddle-point method を適用する前の準備的な考察がさらに増える．例を挙げると，関数 $\theta \mapsto \operatorname{Re} e^{-i\alpha}\log\left(1 - p^{-\sigma}e^{i\theta}\right)$ が最大値・最小値をとる θ についての考察は，$\alpha \ne 0$ の場合には格段に複雑になる．さらに，[4] では上記の議論を任意の $m \ge 0$ に対する $f(z;\sigma,m,\alpha)$ に適用できるよう拡張したのだが，そのためには log ではなく多重対数 Li_{m+1} について，様々な性質を調べる必要も出てくる．こうした地道な作業は [4, Section 6] に纏められている．

3. もう一つ補足を述べる．前述したキュムラント生成関数 $f(z;\sigma,m,\alpha)$ を用いることにより，(2.3) で定義した $\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha)$ に関する漸近等式

$$\Phi(\tau;\sigma,m,\alpha) = \frac{F(\kappa;\sigma,m,\alpha)e^{-\tau\kappa}}{\kappa\sqrt{2\pi f''(\kappa;\sigma,m,\alpha)}}\left\{1 + O\left(\kappa^{-\frac{1}{2\sigma}}(\log\kappa)^{\frac{1}{2}(\frac{m}{\sigma}+1)}\right)\right\}$$

を証明することができる．ただし κ は $f'(\kappa;\sigma,m,\alpha) = \tau$ を満たす実数である．これは服部・松本型公式の証明における重要なポイントであり，また定理 2 の証明でも度々利用される．とくに $m = 0$, $\alpha = 0$ の場合には [9, Proposition 7.1] に同様の漸近等式が述べられているのだが，その証明には些か不十分な箇所がある．Perron の公式から，$\Phi(\tau;\sigma,0,0)$ はおおよそ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\kappa}^{\kappa+i\kappa} \mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^{z}\right] e^{-\tau z}\frac{e^{\lambda z}-1}{\lambda z}\frac{dz}{z} \tag{3.2}$$

に等しい．ただし $0 < \lambda < (2\kappa)^{-1}$ とする．そこで [9] の証明では，被積分関数を

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^{z}\right] e^{-\tau z}\frac{e^{\lambda z}-1}{\lambda z^2}\\ &= \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^{\kappa}\right] e^{-\tau\kappa}\exp\left(-\frac{t^2}{2}M''(\kappa)\right)\left\{1 - i\frac{t}{\kappa} + O\left(\lambda\kappa + \frac{t^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa^{\frac{1}{\sigma}-3}}{\log\kappa}|t|^3\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

と計算して，積分 (3.2) を評価したのである．ここで $z = \kappa + it$ とし，[9] においては上記の式 (3.3) は $|t| \le \kappa$ に対して成立すると記載されている．前述したように，証明には若干の難があるものの，$M^{(3)}(\kappa + it)$ の漸近評価 [9, Proposition 7.5] が知られて

いるので，それを用いれば

$$M(\kappa+it)=M(\kappa)+itM'(\kappa)-\frac{t^2}{2}M''(\kappa)+O\left(\frac{\kappa^{\frac{1}{\sigma}-3}}{\log\kappa}|t|^3\right)$$

が $|t|\le\kappa$ で成立することは正しい．しかし (3.3) を示す際に用いられたと思われる

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^z\right]&=\exp\left(M(\kappa)+itM'(\kappa)-\frac{t^2}{2}M''(\kappa)+O\left(\frac{\kappa^{\frac{1}{\sigma}-3}}{\log\kappa}|t|^3\right)\right)\\&=\mathbb{E}\left[|\zeta(\sigma,\mathbb{X})|^\kappa\right]e^{it\tau}\exp\left(-\frac{t^2}{2}M''(\kappa)\right)\left\{1+O\left(\frac{\kappa^{\frac{1}{\sigma}-3}}{\log\kappa}|t|^3\right)\right\}\end{aligned}$$

という変形については，$\frac{\kappa^{\frac{1}{\sigma}-3}}{\log\kappa}|t|^3$ が有界となる $|t|\ll\kappa^{1-\frac{1}{3\sigma}}(\log\kappa)^{\frac{1}{3}}$ の範囲内でのみ有効である．このことから，積分 (3.2) を評価するためには $\kappa^{1-\frac{1}{3\sigma}}(\log\kappa)^{\frac{1}{3}}\ll|t|\le\kappa$ の場合に対する追加の議論が必要となるはずである．証明の修正の詳細については [4, Sections 7.1, 7.2] を参照していただきたい．

最後に，[4] でやり残した課題を述べて本稿の締めとさせていただく．定理 1 においては，$m\ge1$ の場合に $\sigma=1/2$ を含む結果が得られていたことを思い出すと，定理 2 においても

$$\Phi_T(\tau;1/2,m,\alpha)=\Phi(\tau;1/2,m,\alpha)\big\{1+(\text{誤差項})\big\}\tag{3.4}$$

という形の結果が $m\ge1$ であれば示せると期待される．実際それは正しくて，現時点では (3.4) の形の漸近等式が τ が概ね $(\log T)^{\frac{m}{2m+4}}$ までの範囲で成り立つことが証明できている．一方で井上氏の別の研究 [7] と合わせて考えると，漸近等式

$$\Phi_T(\tau;1/2,m,\alpha)=\Phi(\tau;1/2,m,\alpha)\left\{1+O\left(\frac{\tau(\log\tau)^{2m}}{(\log T)^{\frac{m}{2m+1}}(\log\log T)^{\frac{2m^2}{2m+1}}}\right)\right\}$$

が $3\le\tau\le c(m)(\log T)^{\frac{m}{2m+1}}(\log\log T)^{-\frac{2m^2+2m}{2m+1}}$ というさらに広い範囲で成立することが予想される．したがって現状我々が証明できている結果は，予想されるものよりも大幅に弱いと言わざるを得ない．$1/2<\sigma<1$ に対する [4] の手法の幾つかの箇所に変更を施すことで，$\sigma=1/2$ に対しても満足のいく結果が証明できるかもしれない．引き続き研究を進めているところである．

謝辞. 本稿は 2021 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」における筆者の講演を元に作成されたものです．代表者の赤塚広隆先生には日頃から大変お世話になっております．この紙面を拝借してお礼申し上げます．また共同研究者であり，切磋琢磨し合う友人である遠藤健太氏と井上翔太氏にも心からの感謝を捧げます．

本研究は JSPS 科研費 JP21J00529 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] K. Endo, *Universality theorem for the iterated integrals of the the logarithm of the Riemann zeta-function*, 2021, preprint, `https://arxiv.org/abs/2105.06848`.

[2] 遠藤 健太, Riemann ゼータ関数の対数関数の積分の値分布について (解析的整数論とその周辺), 数理解析研究所講究録 (2020), no. 2162, 84–91.

[3] K. Endo and S. Inoue, *On the value-distribution of iterated integrals of the logarithm of the Riemann zeta-function I: Denseness*, Forum Math. **33** (2021), no. 1, 167–176.

[4] K. Endo, S. Inoue, and M. Mine, *On the value-distribution of iterated integrals of the logarithm of the Riemann zeta-function II: Probabilistic aspects*, 2021, preprint, `https://arxiv.org/abs/2105.04781`.

[5] T. Hattori and K. Matsumoto, *A limit theorem for Bohr-Jessen's probability measures of the Riemann zeta-function*, J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 219–232.

[6] S. Inoue, *On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals*, 2019, preprint, `https://arxiv.org/abs/1909.03643`.

[7] ______, *Extreme values for iterated integrals of the logarithm of the Riemann zeta-function*, 2020, preprint, `https://arxiv.org/abs/2009.04099`.

[8] Y. Lamzouri, *On the distribution of extreme values of zeta and L-functions in the strip* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2011), no. 23, 5449–5503.

[9] Y. Lamzouri, S. J. Lester, and M. Radziwiłł, *Discrepancy bounds for the distribution of the Riemann zeta-function and applications*, J. Anal. Math. **139** (2019), no. 2, 453–494.

[10] H. L. Montgomery, *Extreme values of the Riemann zeta function*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), no. 4, 511–518.