

Poincaré 写像と suspension の構成の随伴性について

慶應義塾大学・理工学部 須田智晴

Tomoharu Suda

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology
Keio University

概要

Poincaré 写像と suspension の構成は互いに「逆」として紹介されることもあるが、それはどのように解釈すべきであろうか？ 本稿ではこの疑問への回答として、力学系のなす圏を適切に設定すれば、これらは随伴関手の組をなすことを示す。まず、Poincaré 写像の構成を位相多様体上の連続な flow に一般化し、大域的な Poincaré section をもつ flow のなす圏を定義する。その上で、Poincaré 写像と suspension の構成の関手性を示す。さらに、これらが随伴となるための条件を考えることで、位相共役よりも弱く位相同値よりも強い flow の射の定義が自然に導かれる。なお、本稿の内容は [6] に基づく。

1 はじめに

Poincaré 写像と suspension は力学系の基礎的な構成法の例であり、これらは互いに「逆」の構成として紹介されることもある。すなわち、Poincaré 写像をとることにより flow の力学系から写像の力学系を作ることができ、逆に suspension をとることで写像の力学系から flow の力学系を構成することができる、と説明されるわけである。しかし、Poincaré 写像と suspension はどのような意味で、どの程度「逆」なのであろうか。

この点に関して、まず、Poincaré 写像と suspension の関係については（可微分の場合）次のことが知られている。

- 2つの微分同相写像が位相共役であれば、それらの suspension は位相共役 (Proposition 5.38 in [3]).
- Poincaré section をもつ flow はその Poincaré 写像の suspension と局所的に位相同値 (Theorem 5.40 [3]).
- コンパクト多様体上の微分同相写像はその suspension の Poincaré 写像と位相共役 (Proposition 3.7 in [4]).

また、大域的な Poincaré section をもつ flow については次が知られている。

- 2つの flow の位相同値性は Poincaré 写像の位相共役性で判定できる (Theorem 1 in [1], Proposition 1.11 in [5])
- 大域的な Poincaré section をもつ flow はその Poincaré 写像の suspension と位相同値 (Theorem 3.1 in [7]).

こうした結果は Poincaré 写像と suspension の構成が「よい」圏論的な性質を持つことを示唆しており、これらの構成を通して写像の力学系と flow の力学系の関係を正確に述べるのが可能ではないと思われる。そこで本研究では力学系のなす圏を相空間が位相多様体である場合について考察し、Poincaré 写像と suspension の構成についてどのような圏論的性質を持つのかを調べたい。

以下、圏論の概念の定義や記法については [8] などに準拠する。

2 いろいろな力学系の圏

以下、位相多様体は第二可算かつ Hausdorff を仮定する。

定義 2.1 写像の力学系とは（境界を持たない）位相多様体 X と同相写像 $f : X \rightarrow X$ の組 (f, X) と定義する。写

像の力学系の射 $h : (f, X) \rightarrow (g, Y)$ とは連続写像 $h : X \rightarrow Y$ で $h \circ f = g \circ h$ となるものと定める。

力学系の射の概念を定義する際、写像の場合と違って Flow については多少選択の余地があることに注意する。

定義 2.2 Flow とは (境界を持たない) 位相多様体 X と連続写像 $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ の組 (Φ, X) で次を満たすものと定める。

1. 各 $x \in X$ について $\Phi(x, 0) = x$.
2. 各 $x \in X$ と $s, t \in \mathbb{R}$ について $\Phi(\Phi(x, t), s) = \Phi(x, t + s)$.

Flow の射 $h : (\Phi, X) \rightarrow (\Psi, Y)$ とは連続写像 $h : X \rightarrow Y$ で任意の $x \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ について $h(\Phi(x, t)) = \Psi(h(x), t)$ となるものと定義する。

Flow の弱い射 $(h, \tau) : (\Phi, X) \rightarrow (\Psi, Y)$ とは連続写像 $h : X \rightarrow Y$ と写像 $\tau : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の組で次を満たすものである。

1. 任意の $x \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ について $h(\Phi(x, t)) = \Psi(h(x), \tau(x, t))$.
2. 任意の $x \in X$ について $\tau(x, -) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は単調に増加する同相写像で $\tau(x, 0) = 0$ を満たす。

補題 2.3 以下の各組み合わせは射の合成を写像の合成で定義したとき圏をなす。

1. 写像の力学系とその射.
2. Flow とその射.
3. Flow と弱い射.

上記のそれぞれを写像の力学系の圏 **Map**, flow の圏 **Flow**, 弱い射による flow の圏 **WFlow** と名付ける。

Flow は **WFlow** の部分圏. 包含関手を $I : \mathbf{Flow} \rightarrow \mathbf{WFlow}$ とする。

Map, **Flow** での同型は位相共役と呼ばれる。 **WFlow** での同型は位相同値という。これらは通常の用法と一致する。

3 Poincaré 写像と Suspension

さて, Topological manifold 上の連続な flow について Poincaré 写像を考えたいが, 今回の設定では可微分構造が使えないので少し工夫が必要である。

まず, Topological transversality という概念を [5, 2] に基づき次で定義する。

定義 3.1 (Φ, X) を n 次元位相多様体 X 上の flow とする。境界を持たない部分多様体 $S \subset X$ が Φ に **topologically transversal** であるとは,

1. S は余次元 1 で locally flat.
2. 各 $x \in S$ に対し, X における x の近傍 U で単位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ と同相で, その同相写像により $U \cap S \simeq B \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ となるものが存在. さらに, $\delta_+(x) > 0$ と $\delta_-(x) < 0$ が存在して $\Phi(y, [\delta_-(x), 0])$ と $\Phi(x, (0, \delta_+(x)])$ はそれぞれ $U \setminus S$ の異なる連続成分に含まれる. また $\Phi(x, [\delta_-(x), \delta_+(x)]) \cap S = \{x\}$.
3. 各 $x \in S$ に対し, x の近傍 $V \subset U$ と $\delta > 0$ が存在して, 任意の $y \in V \cap S$ に対し $\delta_+(y) > \delta$ かつ $\delta_-(y) < -\delta$ となる.
4. 各 $y \in X$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $\Phi(y, [a, b]) \cap S$ は S でコンパクト.

次の性質は横断性として期待されるものである。

補題 3.2 (Φ, X) を flow, $S \subset X$ は Φ に topologically transversal とする。このとき, 任意の $x \in S$ と $\epsilon > 0$ に対

して, x の X における近傍 V が存在して

$$\Phi(y, [-\epsilon, \epsilon]) \cap S \neq \emptyset$$

が任意の $y \in V$ について成り立つ.

また, Topologically transversal の条件 (3) により非常に頻繁に「戻ってくる」ような点の存在も除外される.

補題 3.3 (Φ, X) を flow, $S \subset X$ は Φ に topologically transversal とする. 任意の点 $x \in S$ について, $n \rightarrow \infty$ のとき $x_n \rightarrow x$ かつ $t_n \rightarrow 0$ となる点列 $x_n \in S$, $t_n > 0$ で $\Phi(x_n, t_n) \in S$ となるものは存在しない.

ここで次のように定義する.

定義 3.4 (Φ, X) を flow とする. 部分多様体 $S \subset X$ が **global Poincaré section** であるとは次が成り立つことと定義する.

1. S は Φ に topologically transversal.
2. 各 $x \in X$ に対し, $t_+ > 0$ と $t_- < 0$ が存在して $\Phi(x, t_+) \in S$ と $\Phi(x, t_-) \in S$ が成り立つ.
 - 例えば, \mathbb{R} 上の flow $\sigma(s, t) := s + t$ は global Poincaré section $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ をもつ.
 - global Poincaré section をもつ flow は平衡点を持たない.
 - 平衡点を持たない滑らかな flow は相空間がコンパクトであれば global Poincaré section をもつ.

これらの定義のもとで, 次の結果が得られる. これはよく知られた結果の一般化である.

定理 3.5 (Φ, X) を flow, $S \subset X$ は Φ に topologically transversal とする. 点 $x_0 \in S$ について $t_+ > 0$ で $\Phi(x_0, t_+) \in S$ となるものがあれば, x_0 の近傍 U と連続写像 $P\Phi: U \cap S \rightarrow S$ と $T_\Phi: U \cap S \rightarrow (0, \infty)$ が存在して, 各 $x \in U \cap S$ について

$$P\Phi(x) = \Phi(x, T_\Phi(x))$$

が成り立つ. また, $0 < t < T_\Phi(x)$ については $\Phi(x, t) \notin S$ である. さらに S が global Poincaré section であれば, $P\Phi$ は S 全体で定義された同相写像である.

(証明の要点) $P\Phi$ と T_Φ が x_0 の近傍 $U \cap S$ で定義できることが先ほどの補題よりわかる. $T_\Phi: U \cap S \rightarrow (0, \infty)$ の連続性については, 任意の $x \in U \cap S$ と $\epsilon > 0$ に対し, x の近傍 U_1 で任意の $y \in U_1$ に対し

$$\Phi(y, [T_\Phi(x) - \epsilon, T_\Phi(x) + \epsilon]) \cap S \neq \emptyset$$

となるもの, x の近傍 U_2 で任意の $y \in U_2 \cap S$ について

$$\Phi(y, (0, T_\Phi(x) - \epsilon)) \cap S = \emptyset$$

となるものの存在を示す. これらより

$$T_\Phi(x) - \epsilon \leq T(y) \leq T_\Phi(x) + \epsilon$$

という形の評価を得ることができる.

Global Poincaré section の取り方は一意的ではないので, flow と section の組は弱い射によって保存されるとは限らない. しかし, もし保たれているならば, 次が成立する.

補題 3.6 (Φ, X) と (Ψ, Y) をそれぞれ global Poincaré section S, S' をもつ flow とする. $(h, \tau): (\Phi, X) \rightarrow (\Psi, Y)$ を弱い射とする.

1. もし $h(S) \subset S'$ ならば任意の $x \in S$ について $T_\Psi(h(x)) \leq \tau(x, T_\Phi(x))$.
2. もし $h^{-1}(S') \subset S$ ならば任意の $x \in h^{-1}(S')$ について $\tau(x, T_\Phi(x)) \leq T_\Psi(h(x))$.

特に, $S = h^{-1}(S')$ ならば任意の $x \in S$ について $T_\Psi(h(x)) = \tau(x, T_\Phi(x))$.

これを用いて次を得る.

補題 3.7 (Φ, X) と (Ψ, Y) をそれぞれ global Poincaré section S, S' をもつ flow とする. $(h, \tau) : (\Phi, X) \rightarrow (\Psi, Y)$ を弱い射で $h^{-1}S' = S$ となるものとする. このとき **Map** の射 $h|_S : (P\Phi, S) \rightarrow (P\Psi, S')$ が h の S への制限で得られる.

以上を踏まえて次のように定義する.

定義 3.8 (Φ, X) と (Ψ, Y) をそれぞれ global Poincaré section S, S' をもつ flow とする. **WFlow** の弱い射 $(h, \tau) : (\Phi, X) \rightarrow (\Psi, Y)$ が global Poincaré section を保つとは, $S = h^{-1}(S')$ となることと定める.

Global Poincaré section をもつ flow の圏 FlowGS は global Poincaré section をもつ flow を対象, global Poincaré section を保つ **Flow** の射を射とする圏と定義.

同様に, global Poincaré section をもつ flow を対象, global Poincaré section を保つ **WFlow** の射を射とする圏 **WFlowGS** が定義できる.

WFlowGS や **FlowGS** の対象は (Φ, X, S) と書く.

以上の設定のもとで, Poincaré 写像の構成について次のことがわかる.

定理 3.9 Poincaré 写像の構成は **WFlowGS** について関手的. すなわち, 関手 $P : \mathbf{WFlowGS} \rightarrow \mathbf{Map}$ が次で定義できる.

- **WFlowGS** の各対象 (Φ, X, S) に対し $P(\Phi, X, S) = (P\Phi, S)$.
- 各射 $h : (\Phi_1, X_1, S_1) \rightarrow (\Phi_2, X_2, S_2)$ に対し $P(h) = h|_{S_1} : (P\Phi_1, S_1) \rightarrow (P\Phi_2, S_2)$.

系 3.10 Poincaré 写像の構成は **FlowGS** について関手的.

次に suspension について考えたい. まず表記を定めるために, suspension の定義を述べる.

定義 3.11 $f : X \rightarrow X$ を位相多様体 X 上の同相写像とする. 写像 f の mapping torus X_f とは次で定まる多様体のことである.

$$X_f := X \times [0, 1] / \sim.$$

ただし \sim は任意の $x \in X$ に対し $(x, 1) \sim (f(x), 0)$ となる最小の同値関係である. また, 各点を同値類に移す自然な全射 $\pi_f : X \times [0, 1] \rightarrow X_f$ が存在する. X_f の点は $x \in X, 0 \leq t < 1$ として $[x, t]$ の形で表記する.

定義 3.12 写像の力学系 (f, X) に対し, (f, X) の suspension flow $\Sigma f : X_f \times \mathbb{R} \rightarrow X_f$ は

$$\Sigma f([x, t], s) := [f^n(x), s + t - n]$$

で定義する. ただし, $x \in X, 0 \leq t < 1$ で $n \in \mathbb{Z}$ は $s + t - 1 < n \leq s + t$ となる整数である.

Suspension flow の構成については次のことがわかる.

定理 3.13 Suspension flow の構成は関手的. すなわち, 関手 $\Sigma : \mathbf{Map} \rightarrow \mathbf{FlowGS}$ が次により定義される.

- **Map** の各対象 (f, X) に対し, $\Sigma(f, X) = (\Sigma f, X_f, (X_f)_0)$.
- 各射 $h : (f, X) \rightarrow (g, Y)$ に対し,

$$P(h) = \bar{h} : (\Sigma f, X_f, (X_f)_0) \rightarrow (\Sigma g, Y_g, (Y_g)_0).$$

ただし $\bar{h}([x, t]) = [h(x), t]$, $(X_f)_0 = \{[x, 0] \mid x \in X\}$, $(Y_g)_0 = \{[y, 0] \mid y \in Y\}$.

関手 $P : \mathbf{WFlowGS} \rightarrow \mathbf{Map}$ と $\Sigma : \mathbf{Map} \rightarrow \mathbf{FlowGS}$ の存在から次が従う.

定理 3.14 以下が成立する.

1. Global Poincaré section をもつ flow が位相同値であれば, global Poincaré section の組で Poincaré map が位相共役になるものが存在する.
2. 2つの写像の力学系が位相共役であれば, その suspension flow は位相共役である.

さてここで, Poincaré 写像と suspension はどの程度「逆」なのかという疑問に戻りたい. 逆操作であれば当然, Poincaré 写像の suspension と元の flow はある意味で一致することが期待される. しかし, これらは必ずしも位相共役ではなく, したがってこの意味では「逆」とみなすことはできない. 一方, 位相同値性は示すことができる.

補題 3.15 自然変換 $(k, \tau) : I\Sigma PI \rightarrow I$ が次のように定義できる. すなわち, **FlowGS** の各対象 (Φ, X, S) について,

$$\begin{aligned} k_{(\Phi, X, S)}([x, t]) &:= \Phi(x, tT_\Phi(x)) \\ \tau_{(\Phi, X, S)}([x, t], s) &:= \int_0^{s+t} R_\Phi(x)(u)du - tT_\Phi(x) \end{aligned}$$

と定める. ただし $x \in S, 0 \leq t < 1$ で,

$$R_\Phi(x)(u) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_\Phi((P\Phi)^i(x))\chi_{[i, i+1)}(u).$$

$\chi_{[i, i+1)}$ は $[i, i+1)$ の indicator function である.

より強く, Invariance of domain theorem を使うと $(k, \tau) : I\Sigma PI \rightarrow I$ が自然同型であることがわかる. よって,

系 3.16 (Φ, X, S) が global Poincaré section をもつ flow であれば, (Φ, X, S) は $\Sigma P(\Phi, X, S)$ と位相同値.

また次も成立する.

補題 3.17 自然変換 $l : 1_{\mathbf{Map}} \rightarrow PIS$ が各 $x \in X$ に対して

$$l_{(f, X)}(x) := [x, 0]$$

で定義できる.

これらの結果は **FlowGS** より大きく **WFlowGS** より小さい圏で, Poincaré 写像の構成と suspension の構成が随伴になるものがあることを示唆している. そこで次のように定める.

定義 3.18 **WFlowGS** の弱い射 $(h, \sigma) : (\Phi_1, X_1, S_1) \rightarrow (\Phi_2, X_2, S_2)$ が **rate-preserving** であるとは,

$$\begin{aligned} &\sigma \left(\Phi_1(x, tT_{\Phi_1}(x)), \int_0^{s+t} R_{\Phi_1}(x)(u)du - tT_{\Phi_1}(x) \right) \\ &= \int_0^{s+t} R_{\Phi_2}(h(x))(u)du - tT_{\Phi_2}(h(x)) \end{aligned}$$

が任意の $x \in S_1, 0 \leq t < 1, s \in \mathbb{R}$ について成り立つこと. ただし, R_{Φ_1} と R_{Φ_2} は先ほどの補題のもの.

補題 3.19 **WFlowGS** の恒等射は rate-preserving. また rate-preserving な射の合成は rate-preserving.

よって対象を **WFlowGS** の対象, 射を rate-preserving な射とすることで圏 **RWFlowGS** が定義される. 包含関手を $J^- : \mathbf{FlowGS} \rightarrow \mathbf{RWFlowGS}$, $J^+ : \mathbf{RWFlowGS} \rightarrow \mathbf{FlowGS}$ とすると $I = J^+ J^-$ である.

さらに次もわかる.

補題 3.20 (Φ, X, S) を **FlowGS** の対象とすると, 弱い射 $(k, \tau)_{(\Phi, X, S)} : I\Sigma PI(\Phi, X, S) \rightarrow (\Phi, X, S)$ は rate-preserving.

以上により次を得る.

補題 3.21 自然変換 $(k, \tau) : J^{-\Sigma}PJ^{+} \rightarrow 1_{\mathbf{RWFlowGS}}$ が $(k, \tau) : I\Sigma PI \rightarrow I$ の制限により定義できる.

今までに得られた結果を組み合わせると次の結果を得る. これが Poincaré 写像と suspension はどのような意味で, どの程度「逆」なのかという疑問に対する (一つの) 答えである.

定理 3.22 $J^{-\Sigma} \dashv PJ^{+}$.

系 3.23 **Map** と **RWFlowGS** は圏として同値.

謝辞

本研究は特別研究員奨励費 (20J01101) のもとで行われた.

参考文献

- [1] William Basener. Global cross sections and minimal flows. *Topology and its Applications*, 121(3):415–442, 2002.
- [2] William Basener. Every nonsingular $c1$ flow on a closed manifold of dimension greater than two has a global transverse disk. *Topology and its Applications*, 135(1-3):131–148, 2004.
- [3] Michael Charles Irwin. *Smooth dynamical systems*, volume 17. World Scientific, 2001.
- [4] J Jr Palis and Welington De Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Mario Shannon. *Dehn surgeries and smooth structures on 3-dimensional transitive Anosov flows*. PhD thesis, 09 2020.
- [6] Tomoharu Suda. A categorical view of poincaré maps and suspension flows. *Dynamical Systems*, 2022.
- [7] Xiao-Song Yang. A remark on global poincaré section and suspension manifold. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11(13):2157–2159, 2000.
- [8] S. マックレーン. **圏論の基礎**. 丸善出版, 2012.