（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	武田　雅広
論文題目	Cohomology of the spaces of commuting elements in Lie groups of rank two （階数2 のLie 群の可換元のなす空間のコホモロジー）		

（論文内容の要旨）

離散群 π から Lie 群 G への準同型のなす空間を $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ で表す．空間 $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ は離散群 π を基本群にもつ多様体上の平坦 G 接続の基点付きモジュライ空間と同一視されることから，幾何学や数理物理学において重要である．また，代数幾何学や表現論でも盛んに研究されており，G の共役作用による商空間は特性多様体と呼ばれ，これらの数学分野に加えて低次元トポロジーにおいて基本的な研究対象である．特に、π が自由 abel 群 $\mathbb{Z}^m$ のときに空間 $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ は G の互いに可換な m 組の元のなす空間と同一視されることから，G の可換元のなす空間と呼ばれる．この論文では G の階数が 2 のときに $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーをある体上で決定し，ある不変式環に対する Shephard-Todd 型の定理の存在に対する証拠を与えた．

空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のトポロジー，特に，ホモトピー論に関する研究は 2007 年の Adem と Cohen による研究をきっかけに盛んに行われてきた．彼らは $\mathbb{Z}^m$ の自然な余単体構造が誘導する $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の単体的構造を用いて，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ は一回懸垂することによりある空間たちの一点和となることを示した．このホモトピー分解を用いて，Baird-Jeffry-Selick と Crabb は独立に安定ホモトピー同値

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, SU(2)) \underset{\mathrm{s}}{\simeq} \bigvee_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \Sigma X_k$$

を与えた．ただし，$X_1 = S^3$, $X_2 = S^2 \vee (\mathbb{R}P^4/\mathbb{R}P^2)$, $X_k = \Sigma\mathbb{R}P^2 \vee (\mathbb{R}P^{k+2}/\mathbb{R}P^{k-1})$ （$k \geq 3$） である．この安定ホモトピー分解の証明は $SU(2)$ が非常に単純な空間であるということに依存しており，他の Lie 群の場合には Adem-Cohen の分解の因子を記述することは極めて困難である．したがって，この分解からホモロジーを計算することも困難である．一方，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のコホモロジーに関して Baird はある公式を与えた．この公式を与える前に，古典的な結果を思い出す．T を G の極大トーラスとし，W を G の Weyl 群とする．以下，コホモロジーは W の位数を割らない標数をもつ体上のものとする．写像

$$G/T \times T \to G, \quad (gT, t) \mapsto gtg^{-1}$$

は W の作用で不変なため写像 $G/T \times WT \to G$ し，写像

$$H^*(G) \to (H^*(G/T) \otimes H^*(T))^W$$

を得る．この写像が同型であることは古典的に知られており，表現論的には Shephard-Todd の定理の一般化である Solomon の定理により証明できる．これを一般化した

(続紙 2)

（論文審査の結果の要旨）

ものがBairdの公式である．$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ を $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の連結成分で自明な準同型を含むものとすると，写像

$$G/T \times T^m \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1, \quad (gT, t_1, \dots, t_m) \mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_mg^{-1})$$

が定まり，上と同様に誘導される写像

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1) \to (H^*(G/T) \otimes H^*(T)^{\otimes m})^W \tag{1}$$

が同型であることをBairdは証明した．この公式の応用としてRamrasとStafaは $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ のPoincaré級数に関する公式を与えた．しかし，Bairdの公式とRamras-Stafaの公式は実際に計算するのが困難である．申請者・武田雅広さんと岸本大祐氏（九州大学）は共著論文Spaces of commuting elements in the classical groups, Adv. Math. 386 (2021), 107809において $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ のPoincaré級数の公式を古典群の場合に組み合わせ的に改めて与えた．その応用として $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ は有理双曲型であることを証明し，また，$m = 2$ の場合に最高次のホモロジーが G の単純分解を用いて与えられることを証明した．また，Bairdの公式をもとに対称式の性質を調べることにより，G が古典群の場合にコホモロジーの極小生成系を与えた．その応用として，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ の G の階数に関するホモロジー安定性を最も良い範囲で与えた．

上記の論文における計算を見ると，(1)の右辺が $m = 1$ の時と同様にShephard-Todd型の公式で与えられると期待できる．しかし，生成系は与えられたものの関係式は非常に複雑で，上の観察は期待の域を出なかった．申請者・武田雅広さんは本論文で G の階数が2で $m = 2$ の場合に，上記生成元の間の関係式を完全に決定した．その結果，次数を忘れると G の階数が2の場合，$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, G)_1$ のコホモロジーはすべて同型であることを証明した．これは驚くべき結果であり，上記のShephard-Todd型の公式の存在の証拠となっている．今後，この結果は $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)_1$ のコホモロジーの研究において基礎的なものとなるに違いなく，写像空間やホモロジー安定性などと関係を明らかにすることで，結果をより大きな枠組みで理解できると期待される．

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について令和4年７月１５日に試問を行った結果，合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月　　　日以降