

## 1. はじめに

動径基底関数（Radial Basis Function: RBF）を用いた偏微分方程式の解法（RBF 手法）はいかなる幾何学形状に対しても自由な節点配置が可能であり、一般的に用いられるスペクトル手法と精度で競合できることから注目されている。近年、大規模なシミュレーション用に軽量化された RBF 手法として RBF-generated finite difference（RBF-FD）が提案されている。RBF-FD は内挿に用いる節点を近傍の節点だけに限定することで大幅な計算量の削減を行っている。しかし、RBF-FD は大幅な計算コストを削減が可能である一方で RBF 手法の特徴であったスペクトル精度が失われ、高次の代数的収束になる（Flyer et al. 2012）。スペクトル精度を失わずに計算を行う手法として、内挿行列の疎行列化（RBF-GAS）が榎本（2019）で提案されている。榎本（2019）では疎行列化された行列による線形システムの計算時間が検証され、高速化が報告されている。

そこで本研究ではオイラー移流の RBF 浅水波モデルに対して RBF-GAS を適用し、RBF-GAS の精度と安定性を調べる。また、この研究では新たに RBF の形状パラメータの決定方法を提案し、一定の形状パラメータの精度と安定性を検証するために、Williamson et al. (1992) のテストケースを行い、その結果を示す。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節で RBF について、第 3 節で形状パラメータに関する問題と決め方、第 4 節でテストケースとその結果について述べ、第 5 節

## 2. RBF

この節では RBF 手法について述べる。まずは RBF を用いた内挿について、次に空間微分の離散化について述べる。

### 2.1 RBF 内挿

関数  $f(x)$  の RBF 内挿は以下の式で示される。

$$f(x) \cong s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi(r_i) \quad (2.1)$$

ここで、 $s(x)$  は近似値、 $N$  は節点数、 $c_i$  は重み、 $\phi$  は RBF、 $r_i = \|x - x_i\|$  は節点  $x_i$  から内挿する  $x$  までの距離である。

RBF を用いた内挿の手順は次の通りである。まず内挿点  $x$  とデータ点  $x_i$  間のユークリッド距離  $r_i$  を計算し、RBF  $\phi$  を計算する。次に  $x_i$  におけるデータが  $f_i$  で与えられるという選点条件を課すことで重み  $c_i$  を決める。選点条件はデータ点に対する内挿が残差 0 になるように重み  $c_i$  を決める条件である。これは以下の連立方程式を解くことと等価である。

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、 $\mathbf{A}$  は要素が  $A_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|)$  で内挿行列と呼ばれる。

### 2.2. RBF-GAS

RBF-GAS は基底に Gaussian RBF（図 1）を用いる。

Gaussian RBF (GA)

$$\phi = e^{-r^2 \varepsilon^2}$$

$\varepsilon$ はRBFの形状を決めるパラメーターであり、 $r$ は節点間距離である。 $\varepsilon$ を大きく取ること、内挿行列 ( $A_{i,j} = \phi_{i,j}$ ) で1付近の値を取る要素数を減らす。閾値以下の値を0に置き換えることで、内挿行列を疎行列化する。これは内挿 (2.1) の展開項を減らすことを意味し、RBF-FDとは違い、影響の小さな項だけを取り除く。

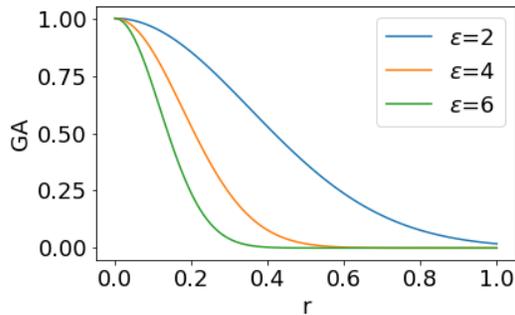


図1 Gaussian RBF。横軸縦軸はそれぞれ距離とGARBFの値である。

### 2.3. 空間微分の離散化

Flyer and Wright (2009)において定式化された手法について述べる。RBF手法は微分行列 $D_N$ を計算し、空間微分の離散化を $D_N f$ の行列ベクトル積で行う。今回は勾配計算を例に微分行列の計算方法を述べる。データ点に対する内挿式を用いる。内挿式 (2.1) を両辺 $x$ で微分し、要素ごとに書くと

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial \phi(r_i)}{\partial x}$$

である。式 (2.2) から重み $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}$ なので

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{D}_N \mathbf{f}$$

$$B_{i,j} = \frac{\partial \phi(r_{i,j})}{\partial x}$$

である。

### 3. 形状パラメーター $\varepsilon$ の決定方法

RBF手法は形状パラメーターによって精度と安定性が決定する。GAは $\varepsilon$ を小さく取ることによって精度が改善し、大きく取ることによって安定性が向上する。しかし、一般的に最適な $\varepsilon$ を決定する手法は存在しないため、目的に沿った $\varepsilon$ の決定方法が必要である。

#### 3.1 GAS用の形状パラメーター $\varepsilon$

GASでは内挿行列を疎行列化しながら、スペクトル精度を達成するように $\varepsilon$ を適用する必要がある。言い換えると次の2つの要素を満たす必要があると考える。

- 1) 内挿行列 $\mathbf{A}$ が疎である。
- 2) 節点数の増加に対して内挿に使う節点数が増加する。

- 1) はGASの性質を満たすためであり、
- 2) はスペクトル精度のためである。2つの条件から今回は内挿に用いられる節点数がおよそ $\sqrt{N}$ になるように以下の式で $\varepsilon$ を決定する。

$$s = \text{GA}(r_m) = e^{-r_m^2 \varepsilon^2} \leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{-\log s}}{r_m}$$

$s$ は内挿行列 $\mathbf{A}$ の要素を0に変える閾値、 $r_m$ は最近傍 $\sqrt{N}$ 個の節点の中で最も遠い節点の距離である。

## 4. 実験と結果

### 4.1. 局所的な非線形地衡流

本テストケースはWilliamson et al. 1992のcase 3にあたる。中緯度でジョットが存在し、ジェットに対して地衡風平衡が成り立つように深さ $h$ が定義される (図2)。テストは定常状態の維持を検証するものである。よって厳密解は初期値である。精度検証では異なる節点数において誤差の低下率を検証した。安定性の解析は浅水波方程式を線形化し、平衡

状態にある速度と深さを与え、摂動を加えた際の安定性を検証した。安定性の比較対象は Flyer and Wright (2009)で定式化された RBF 浅水波モデル(Global RBF)と比較した。

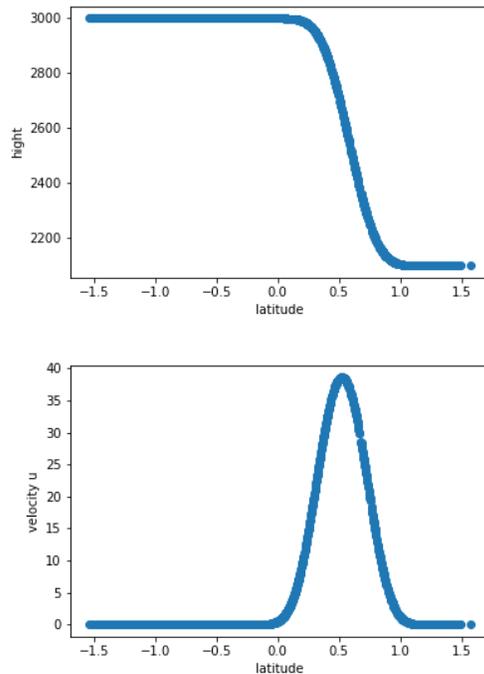


図2 (上) 深さ $h$ と(下) 風速 $u$ 。予報変数は全て東西一様な分布。

#### 4.2 誤差の収束性

図3に節点数ごとの誤差を示す。今回提案した $\varepsilon$ では誤差は $\propto e^{-\sqrt{n}/9}$ で収束する。一定の $\varepsilon$ ではおよそ $\propto e^{-\sqrt{n}/4}$ で収束するため、収束性は低下したが、目的である指数関数的な誤差の収束は保たれている。

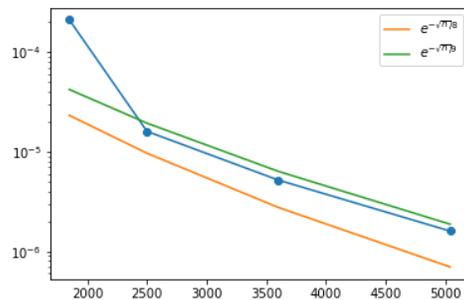


図3 誤差の収束性。節点数は 1849,2500,3600,5041。

#### 4.3. 固有値解析

表1に安定領域外の最大増幅率を示す。実験設定は共通であり、 $N = 5041, \varepsilon = 10.8$ である。最大増幅率に差は見られなかった。

表1 最大増幅率の比較。

手法	最大増幅率
Global RBF	1.011
RBF-GAS	1.011

#### 5. まとめと課題

今回は GAS に適用するための $\varepsilon$ を考案し、浅水波モデルのテストケースにおいて精度と安定性を検証した。誤差の収束性は $\propto e^{-\sqrt{n}/4}$ から $\propto e^{-\sqrt{n}/9}$ の低下が見られたが、目的であった指数関数的な誤差の収束は達成している。安定性の解析では Global RBF と安定性を比較し、変化しないことを確認した。以上のことから今回提案した $\varepsilon$ の決定方法は GAS に適用できる手法であることが示された。

今回の発表で提案された $\varepsilon$ における RBF-GAS は高精度な一定の $\varepsilon$ の実験結果と比較しても精度は悪化したが、スペクトル精度を維持でき、Global RBF と安定性を比較しても差はない事が示された。一方で大気大循環モデルにおいて重要視されている保存性の検証は行われていない。今後の研究ではより節点数の多い実験において保存性の検証が必要である。

参考文献

榎本剛, 2019: 動径基底函数を用いた球面上のセミラグランジュ移流. 防災研年報 B, 6 3 号, 158–164.

Flyer, N., E. Lehto, S. Blaise, G. B. Wright, and A. St-Cyr, 2012: A guide to RBF-generated finite differences for nonlinear transport: Shallow water simulations on a sphere. *J. Comput. Phys.*, **231**, 4078–4095,  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.01.028>.

Flyer, N., and G. B. Wright, 2009: A radial basis function method for the shallow water equations on a sphere. *Proc. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, **465**, 1949–1976.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber, 1992: A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, **102**, 211–224.