【カテゴリーⅠ】

日本建築学会構造系論文集 第86巻 第783号, 772-782, 2021年5月
J. Struct. Constr. Eng., AIJ, Vol. 86, No. 783, 772-782, May, 2021
DOI https://doi.org/10.3130/aijs.86.772

離散的な曲面の幾何学的不変量を用いた膜構造の形状設計

SHAPE DESIGN OF MEMBRANE STRUCTURE USING GEOMETRIC INVARIANTS OF DISCRETE SURFACE

早川 健太郎[*1], 大 崎 純[*2]

Kentaro HAYAKAWA and Makoto OHSAKI

Optimization procedures are proposed for design of frame-supported membrane structures. A developable, a minimal, and their intermediate surfaces are chosen as the target surfaces. The surface is discretized into triangular faces. The developable and the minimal surface are generated by minimizing the errors of Gaussian curvature and mean curvature, respectively, and the intermediate surface is obtained by solving a multiobjective optimization problem. It is shown in the numerical examples that the intermediate surface can have better performances than the minimal and developable surfaces in view of stress distribution in the self-equilibrium shape generated from plane membrane sheets.

Keywords : *Frame-supported membrane structure, Discrete surface, Gaussian curvature, Mean curvature, Multiobjective optimization, Self-equilibrium state*

骨組膜構造, 離散曲面, ガウス曲率, 平均曲率, 多目的最適化, 自己釣合状態

1.　はじめに

大空間を覆う建築の膜構造に用いられる膜材は，圧縮力や面外せん断力，面外曲げモーメントに抵抗できず，応力集中や応力分布のばらつきによってしわが発生しやすいため，一様な面内の引張応力状態を実現することがのぞましい。そのため，周囲を骨組で支持された一般的な骨組膜構造の設計においては，与えられた境界条件等を満たす等張力曲面を求め，測地線方向等に裁断線を決定する[1−3]。等張力曲面は同一の境界条件において表面積を最小化する極小曲面と等価なため，膜構造の原型曲面（釣合い形状の目標とする曲面）には極小曲面が広く用いられている[4]。石原ら[5]や八木ら[6]は，三角形要素により離散化された曲面の節点に3自由度を与え，曲面の面積を最小化することで極小曲面を得る数値解法を提案している。一方，節点に3自由度を与えた形状解析は不安定になることがあるため，鈴木ら[7]は節点の自由度を低減することで解析の安定化を図っている。また，川口ら[8]は付帯条件を導入した極小曲面を一般化最急降下法により簡便に求める手法を示している。しかし，膜構造が平面膜を接合して生成されるのに対し，極小曲面は一般に平面に展開することができず，理想的な応力状態を実現する膜の裁断図を得ることは困難である。

上記のような問題点を解決するため，目標とする等張力状態に近い釣合形状を実現する裁断図を最適化手法により生成する方法が提案され，応力状態を大きく改善している[9−11]。しかし，最適化の各ステップで非線形解析により釣合形状を求め，裁断図を最適化する手法は計算コストが非常に大きい。

極小曲面を平面膜から生成することが困難であるのに対し，可展面は面内変形をともなわずに平面に展開でき，平面膜から曲げ変形のみによって曲面を生成できる。ただし，可展面はガウス曲率が0であり等張力状態を実現することはできない。そこで，Cui and Ohsaki[12, 13]は可展面と極小曲面の中間的な性質をもつ曲面を生成し，膜構造の原型曲面に用いることで，簡便に等張力に近い状態を実現する膜の裁断図を得る手法を提案している。この手法では，n次×1次のベジエ曲面[14]を接続し，膜構造の原型曲面としている。そのため，各曲面の境界の少なくとも2辺は直線であるという制約がある。また，ベジエ曲面のようなパラメトリック曲面を用いた場合，少ない変数で曲面を表現できる一方，任意の形状を表現することはできないという課題がある。

文献[5~8]のように離散化された曲面（離散曲面）の頂点（節点）座標を変数とすると，曲面形状のパラメータ化が不要であり任意の曲面形状を扱うことが可能である。しかし，文献[5~8]で示されている手法は可展面等の極小曲面以外の曲面を扱うことはできない。一方，離散微分幾何学[15]において離散曲面のガウス曲率や平均曲率などの幾何学的不変量が定義されており[16]，これらを用いることで，頂点座標を変数として可展面や極小曲面などのさまざまな曲面形状を得ることができる。下田ら[17]は離散曲面の平均曲率および境界の曲率を用いて形状勾配関数を定義し，頂点座標を変数として滑らかな極小曲面を得る手法を提示している。また，曲面のガウス曲率と平均曲率を同時に考慮した設計法も提案されている[18]。しかし，そこでは膜のような平面から生成されることは考慮されていない。

本研究では，三角形で離散化された曲面を用いて膜構造の原型曲面を表現し，曲面上の頂点を直接操作して可展面，極小曲面およびそれらの中間的な曲面を生成する。これにより，曲面上のパラメータのとり方に依存せず，いずれの辺も曲線の曲面を接続して原型曲

[*1] 京都大学大学院工学研究科建築学専攻　大学院生・工修　Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., M.Eng.
[*2] 京都大学大学院工学研究科建築学専攻　教授・工博　Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

面を生成することができる。可展面を接続した曲面はガウス曲率の最小化により生成し，極小曲面は曲面の平均曲率を最小化して生成する。また，文献[19, 20]と同様に多目的最適化により可展面と極小曲面の中間的な性質をもつ曲面を生成し膜構造の原型曲面として用いる。本論文では骨組膜構造を対象とし，数値例題より，可展面，極小曲面および中間曲面から生成した裁断図を骨組に張り付けた際の応力状態を比較し，原型曲面の幾何学的性質が膜構造の応力状態にあたえる影響を検証する。

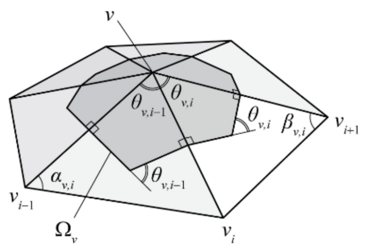


Fig. 1 Angles and region around vertex v

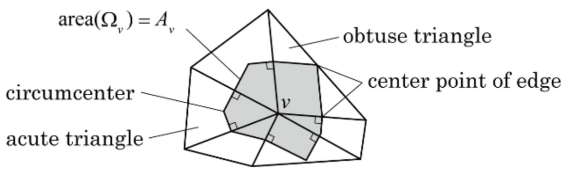


Fig. 2 Area of region D_v

2.　離散曲面のガウス曲率と平均曲率

離散曲面の曲率にはさまざまな定義が提案されているが，本研究では三角形で離散化された曲面（多面体）の内部頂点において定義されるガウス曲率と平均曲率を用いる。Fig. 1は離散曲面上の内部頂点vとその周囲の三角形を表している。頂点vに接続するn_v個の頂点を，曲面の外側から見て反時計回りにv_i $(i = 1,\ldots, n_v)$とする。また，頂点vの周囲の領域をΩ_vとし，その面積をA_vとする。Fig. 1のように頂点vを囲む三角形がいずれも鋭角三角形のとき，Ω_vは頂点vに接続する辺の中点および頂点vを囲む三角形の外心を頂点とする領域（ボロノイ領域）であり，Ω_vの境界の外角を$\theta_{v,i}$ $(i = 1,\ldots, n_v)$とすると，$\theta_{v,i}$は頂点vに接続する辺のなす角に等しい。ここで，領域Ω_vの内部の点で定義されるガウス曲率をK_{v0}とすると，以下のガウス - ボネの定理が成立する[16, 21]。

$$\int_{\Omega_v} K_{v0}\, dA_v + \sum_{i=1}^{n_v} \theta_{v,i} = 2\pi \tag{1}$$

頂点vにおけるガウス曲率をK_vとし，ガウス曲率が領域Ω_vにおいて一様に分布していると考えると，式(1)より次式を得る。

$$K_v = \frac{1}{A_v}\left(2\pi - \sum_{i=1}^{n_v} \theta_{v,i}\right) \tag{2}$$

実際には，式(1), (2)は領域Ω_vの形状によらず成立し，頂点vの周りの三角形に直角三角形または鈍角三角形が含まれる場合には，Meyer *et al.*[21]と同様に三角形の内角に応じてΩ_vの領域を定め，面積A_vを求める。Fig. 2に示すように，頂点vを含む三角形が鋭角三角形の場合は頂点vとvを含む辺の中点および三角形の外心を頂点とする四辺形，頂点vが直角または鈍角三角形の場合は頂点vおよび各辺の中点を頂点とする四辺形領域，頂点vの対角が直角または鈍角の三角形の場合は頂点vとvを含む2辺の中点を頂点とする三角形領域をそれぞれ各面におけるΩ_vの領域としてA_vを計算する。

頂点v, v_iの位置ベクトルをそれぞれ$\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{v,i}$とし，頂点v, v_iを結ぶ辺に接続する三角形の対角をFig. 1に示すようにそれぞれ$\alpha_{v,i}$, $\beta_{v,i}$とする。領域Ω_vの内部の点で定義される平均曲率をH_{v0}，単位外向き法線ベクトルを$\mathbf{m}_{v0}$とすると，平均曲率法線ベクトル$\mathbf{H}_{v0} = 2H_{v0}\mathbf{m}_{v0}$は次式を満たす[16, 21]。

$$\int_{\Omega_v} \mathbf{H}_{v0}\, dA_v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_v}\left(\cot\alpha_{v,i} + \cot\beta_{v,i}\right)\left(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{v,i}\right) \tag{3}$$

式(2)で定義されるガウス曲率と同様に，領域Ω_vに平均曲率が一様に分布していると考え，$\mathbf{H}_{v0} = 2H_{v0}\mathbf{m}_{v0}$および式(3)より，頂点$v$における平均曲率$H_v$を以下のように定義する[21]。

$$H_v = \frac{1}{4A_v}\left\|\sum_{i=1}^{n_v}\left(\cot\alpha_{v,i} + \cot\beta_{v,i}\right)\left(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_{v,i}\right)\right\| \tag{4}$$

3.　可展面，極小曲面および中間曲面の生成

本節では，膜構造の原型曲面として用いる可展面，極小曲面および可展面と極小曲面の中間的な性質をもつ曲面（中間曲面）を得るための最適化問題の一般的な定式化を示す。一般的に膜構造は複数の膜材（裁断図）を張り合わせて生成されることから，原型曲面は複数の曲面から構成されるものとする。可展面を用いて原型曲面を構成する場合には各部分曲面が可展面であれば十分であり，原型曲面全体において可展面となる必要はない。一方，理想的な等張力状態では膜構造の曲面全体が極小曲面となるため，極小曲面で原型曲面を構成する場合には原型曲面全体において極小曲面の性質を考慮する。同様に，中間曲面では各部分曲面において可展面の性質を考慮するとともに原型曲面全体において極小曲面の性質を考慮する。

生成する膜構造の原型曲面の内部頂点の集合を $\bar{V}$ とする。また，原型曲面はm個の部分曲面で構成されるものとし，それぞれの内部頂点の集合を $\bar{V}_k$ $(k = 1,\ldots, m)$とする。m個の可展面で構成される曲面では，各部分曲面の内部頂点でガウス曲率が0であればよい。したがって，各 $\bar{V}_k$ に含まれる頂点でのガウス曲率の2乗和の2分の1を最小化することでm個の可展面を接続した原型曲面を求める。原型曲面上の頂点座標のうち変数となる座標をまとめたベクトルを$\mathbf{X}$，曲面形状に関する制約条件を満たす$\mathbf{X}$の集合をχとすると，m個の可展面を接続した曲面は以下の最適化問題を解くことで得られる。

$$\begin{aligned}&\min. \quad K(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{v\in\bar{V}_k}\left\{K_v(\mathbf{X})\right\}^2\\&\text{s.t.} \quad \mathbf{X}\in\chi\end{aligned} \tag{5}$$

曲面形状に関する制約条件は変数の選択や曲面の対称性等の考慮すべき条件に応じて定めるが，本研究では原型曲面の境界形状（骨組の形状）および対称性を保つ$\mathbf{X}$の集合をχとする。

一方，原型曲面が極小曲面である場合，$\bar{V}$ に含まれるすべての頂点において平均曲率が0である。したがって，$\bar{V}$ に含まれる頂点における平均曲率の2乗和の2分の1を最小化するための以下のような最適化問題を解いて極小曲面を求める。

$$\begin{aligned}&\min. \quad H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{v\in\bar{V}}\left\{H_v(\mathbf{X})\right\}^2\\&\text{s.t.} \quad \mathbf{X}\in\chi\end{aligned} \tag{6}$$

中間曲面を得るための最適化問題は，問題(5), (6)の目的関数$K(\mathbf{X})$, $H(\mathbf{X})$をともに最小化する以下のような多目的最適化として定式化できる。

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & K(\mathbf{X}),\ H(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} & \mathbf{X} \in \chi\end{array} \tag{7}$$

本研究では多目的最適化問題のパレート解を得るひとつの手法である制約法を用いる。最適化問題(5), (6)の最適解における$H(\mathbf{X})$の値をそれぞれ $\hat{H}_K, \hat{H}_H$ として，$\hat{H} = (1-w)\hat{H}_K + w\hat{H}_H$ を$H(\mathbf{X})$の上限値とし，$K(\mathbf{X})$を最小化する単一目的最適化問題を解くことでパレート解を得る[13, 19, 20]。ここで，wは0以上1以下の実数である。このとき，中間曲面を求める最適化問題は以下のように表される。

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & K(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} & H(\mathbf{X}) \le \hat{H} = (1-w)\hat{H}_K + w\hat{H}_H \\ & \mathbf{X} \in \chi\end{array} \tag{8}$$

なお，最適化問題(5), (6)および(8)の制約条件$\mathbf{X} \in \chi$の具体的な定式化については数値解析例に示す。

多くの文献[4~8]で曲面の面積最小化により極小曲面を得ている。一方, 面積最小化と比較して平均曲率の2乗和の最小化は計算コストが大きい。しかし，最適化問題(8)において$H(\mathbf{X})$の代わりに面積を制約した場合，5節の数値解析例で示すように，構成曲面の接続部分が滑らかでなく，平均曲率が非常に大きい解が得られる場合がある。そのため，本研究では平均曲率を用いて極小曲面および中間曲面を生成する。

4. 膜構造の裁断図の生成と釣合形状解析

膜構造の裁断図は，3節の最適化問題を解いて得られた原型曲面の各部分曲面を平面へ展開した展開図を目標応力にもとづいて縮小することで得る。以下では，膜材の応力を考慮せず曲面を平面へ展開した図形を「展開図」, 応力を考慮して展開図を縮小した図形を「裁断図」とよぶ。さらに，作成した裁断図を接合して境界骨組に張り合わせたときの釣合形状を求めることで膜構造を設計する。なお，三角形分割は，原型曲面，展開図，裁断図と釣合形状のすべてで同一とする。

展開図は，各部分曲面上の辺との辺長誤差が最小であるようなxy平面上の図形を求めることで得る。展開図の形状を定めるために変数となる頂点のx, y座標をまとめたベクトルを$\mathbf{X}^{\mathrm{d}}$, 辺の集合をR^{d}とし，辺$r \in R^{\mathrm{d}}$の長さと原型曲面上の対応する辺の長さの差を$\Delta l_r(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})$とする。$m$個の部分曲面に対応する各展開図は，$\Delta l_r(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})$の2乗和を最小化する最適化問題を解いて求める。また，展開図上の三角形の集合をF^{d}とし，面$f \in F^{\mathrm{d}}$の単位法線ベクトルを$\mathbf{n}_f(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})$とする。ただし，$\mathbf{n}_f(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})$は，各部分曲面での面の接続関係を保ったまま，三角形をxy平面上に重なることなく充填した場合にz軸正の向きとなる。すなわち，z軸正方向の単位ベクトルを$\mathbf{e}_z$として，すべての$f \in F^{\mathrm{d}}$に関して$\mathbf{n}_f(\mathbf{X}^{\mathrm{d}}) \cdot \mathbf{e}_z \ge 0$が成り立つ。以上より，原型曲面に対応した展開図の対称性を保つ$\mathbf{X}^{\mathrm{d}}$の集合をχ^{d}として，m個の部分曲面の展開図を得る最適化問題は以下のように表される。

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & D(\mathbf{X}^{\mathrm{d}}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{r \in R^{\mathrm{d}}} \left\{\Delta l_r(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})\right\}^2 \\ \text{s.t.} & \mathbf{n}_f(\mathbf{X}^{\mathrm{d}}) \cdot \mathbf{e}_z \ge 0 \quad (f \in F^{\mathrm{d}}) \\ & \mathbf{X}^{\mathrm{d}} \in \chi^{\mathrm{d}}\end{array} \tag{9}$$

最適化問題(9)の初期形状は，各部分曲面と同一の接続関係をもつ図形であれば任意である。しかし，以下の解析例では，最適化の収束性を考慮して，原型曲面をxy平面へ投影した形状，あるいは投影図形をx軸またはy軸方向に拡大・縮小した形状を用いる。

建築で用いられる膜材は，直交異方性弾性材料としてモデル化されることが多いが，以下では簡単のため等方性を仮定する。本論で提案する手法はCui and Ohsaki[12, 13)]と同様に異方性材料にも適用可能であり，実際に適用する際にその材料特性を用いればよい。また，膜材の初期たるみによる非線形性は，施工前に引っ張ることで除去されるため, その後の接線剛性を用いた線形弾性体と仮定する。一般性を失うことなく，各三角形要素の局所座標は，平面のx, y座標に一致するものとする。ヤング係数をE, ポアソン比をν, せん断弾性係数をGとすると，要素応力$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{\mathrm{T}}$と要素ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^{\mathrm{T}}$は以下の関係を満たす。

$$\begin{pmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & G\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} \tag{10}$$

目標とする一様応力値$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$に対応するひずみ$\varepsilon_0 = (1-\nu)\sigma_0 / E$を式(10)より求めて，以下のように裁断図の頂点座標を定める。

$$\begin{cases}\mathbf{x}^{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{1+\varepsilon_0}\mathbf{x}^{\mathrm{d}} \\ \mathbf{y}^{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{1+\varepsilon_0}\mathbf{y}^{\mathrm{d}}\end{cases} \tag{11}$$

ここで，$\mathbf{x}^{\mathrm{c}}$, $\mathbf{y}^{\mathrm{c}}$はそれぞれ裁断図の頂点のx, y座標をまとめたベクトル，$\mathbf{x}^{\mathrm{d}}$, $\mathbf{y}^{\mathrm{d}}$は展開図の頂点のx, y座標をまとめたベクトルである。

式(11)により得られる裁断図を骨組に張り合わせることで釣合形状を求める。$\mathbf{X}^{\mathrm{e}}$を膜構造の釣合形状を求める際に変数となる頂点座標をまとめたベクトルとし，境界条件を満たし曲面の対称性を保つ$\mathbf{X}^{\mathrm{e}}$の集合をχ^{e}とすると，釣合形状は膜要素のひずみエネルギーを最小化する以下の最適化問題を解くことで得られる[22)]。

$$\begin{array}{ll}\text{min.} & S(\mathbf{X}^{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{f \in F^{\mathrm{e}}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_f\right) a_f \\ \text{s.t.} & \mathbf{X}^{\mathrm{e}} \in \chi^{\mathrm{e}}\end{array} \tag{12}$$

ここで，F^{c}は裁断図での三角形要素（面）の集合であり，$\boldsymbol{\sigma}_f, \boldsymbol{\varepsilon}_f, a_f$はそれぞれ要素$f \in F^{\mathrm{c}}$の応力，ひずみおよび面積である。

なお，最適化問題(9), (12)の制約条件$\mathbf{X}^{\mathrm{d}} \in \chi^{\mathrm{d}}$および$\mathbf{X}^{\mathrm{e}} \in \chi^{\mathrm{e}}$の具体的な定式化については数値解析例に示す。

5. 数値解析例

5.1 解析条件

最適化はPythonの数値計算ライブラリであるSciPyよりSLSQPをインポートして行う。最適化問題(5), (6), (8)では最適化の収束性を考慮し原型曲面の内部頂点のx, y座標を固定するとともに, 原型曲面の外周上の頂点の変位を固定する。また，曲面の対称性を考慮して曲面生成を行う。一方，最適化問題(12)では頂点のx, y, z方向への変位を考慮し，境界（骨組）上の頂点は境界に沿って移動するよう変位に制約を与えるとともに，最適化問題(5)等と同様に対称性を考慮する。いずれの計算例においても, 使用する膜材は弾性係数を565 MPa，ポアソン比を0.40とし，目標応力は5 MPaとする。また，膜材の厚さは結果に影響を与えない。

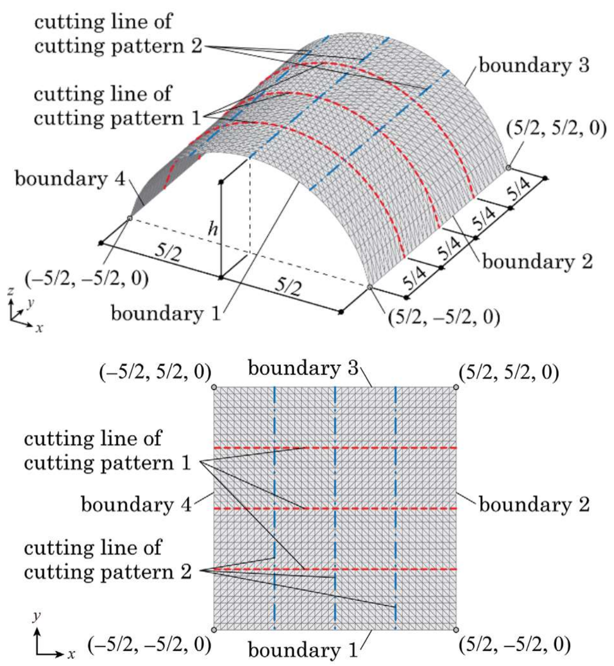


Fig. 3 Initial shape with cylindrical boundary (unit: m)

5.2 円筒形境界をもつ膜構造の形状生成

本節では，滑らかな可展面，極小曲面が容易に得られ，それらの相違が明らかな円筒形境界をもつ曲面の形状を生成する。Fig. 3に示すように，スパン5 m，高さh = 1.6, 2.0, 2.4 mの3種類の曲面を離散化する。膜構造を4枚の膜材で構成する場合（$m = 4$）を考え，Fig. 3に示すx軸方向の破線の部分で部分曲面を接続するcutting pattern 1およびy軸方向の一点鎖線の部分で部分曲面を接続するcutting pattern 2を用いる。曲面の外部境界を構成する4個の曲線の方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$\text{境界1:}\quad \begin{cases} x^2+\left(z-\dfrac{h}{2}+\dfrac{25}{8h}\right)^2=\dfrac{1}{4h^2}\left(h^2+\dfrac{25}{4}\right)^2 \\ y=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{境界2:}\quad \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ z=0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\text{境界3:}\quad \begin{cases} x^2+\left(z-\dfrac{h}{2}+\dfrac{25}{8h}\right)^2=\dfrac{1}{4h^2}\left(h^2+\dfrac{25}{4}\right)^2 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases} \tag{15}$$

$$\text{境界4:}\quad \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ z=0 \end{cases} \tag{16}$$

形状生成，裁断図の作成，釣合形状の解析においては，曲面のxz平面およびyz平面に関する対称性を考慮し，頂点座標に制約を与える。頂点vの位置ベクトルを$\mathbf{x}_v = (x_v, y_v, z_v)^{\mathrm{T}}$とし，$xz$平面に関して対称な位置にある頂点の集合を$\Sigma_x$とすると，頂点の組$\{v, v'\} \in \Sigma_x$に関して次式が成り立つ。

$$\begin{cases} y_v + y_{v'} = 0 \\ z_v - z_{v'} = 0 \end{cases} \quad (\{v, v'\} \in \Sigma_x) \tag{17}$$

また，yz平面に関して対称な位置にある頂点の集合をΣ_yとすると，頂点の組$\{v, v'\} \in \Sigma_y$に関して次式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_v + x_{v'} = 0 \\ z_v - z_{v'} = 0 \end{cases} \quad (\{v, v'\} \in \Sigma_y) \tag{18}$$

なお，形状生成の際の頂点数と展開図作成，釣合形状解析の際の頂点数は異なり，前者と後者においてΣ_xおよびΣ_yの要素は異なる。

釣合形状の解析では，展開図と同一の頂点数および頂点接続関係をもつm個の曲面を用いる。このとき，展開図の接続部分において対応する頂点の座標が等しくなるように制約を与える。対応する頂点の集合をΣ_eとすると，頂点の組$\{v, v'\} \in \Sigma_e$に関して次式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_v - x_{v'} = 0 \\ y_v - y_{v'} = 0 \\ z_v - z_{v'} = 0 \end{cases} \quad (\{v, v'\} \in \Sigma_e) \tag{19}$$

以上より，曲面生成の際に満たすべき制約条件式は式(13)~(18)であるが，曲面の外周頂点を固定し，内部頂点のx, y座標も固定することから，式(13)~(16)は常に満たされ，式(17), (18)の第1式も満たされるため，考慮すべき制約条件式は式(17), (18)の第2式である。一方，釣合形状解析では式(13)~(18)に加えて式(19)を満たす必要があり，頂点のx, y, z方向への変位を考慮することから，これらの条件式すべてを考慮する必要がある。

最適化問題(5), (6), (8)では，変数として内部頂点のz座標を用いる。また，最適化問題(5), (6)では，初期形状をFig. 3に示す円筒曲面とし，最適化問題(8)では，初期形状の頂点のz座標を最適化問題(5), (6)の解形状の対応する頂点のz座標の重み付き平均として，重み係数は最適化の収束性を考慮して決定する。形状生成において内部頂点のz座標は式(17), (18)の第2式を満たし，内部頂点のz座標のベクトルを$\mathbf{z}$とすると，式(17), (18)の第2式はまとめて以下のように表せる。

$$\mathbf{Cz} = \mathbf{0} \tag{20}$$

最適化問題(5), (6), (8)において$\mathbf{X} = \mathbf{z}$とする場合，制約条件$\mathbf{X} \in \chi$は式(20)の$\mathbf{z}$を$\mathbf{X}$とした等式である。しかし，本論文では，Zhang et al.[23]による行列のReduced row-echelon form (RREF)[24]を用いたテンセグリティの独立な自己釣合モードの抽出アルゴリズムを用いて，式(20)を満たす$\mathbf{z}$の独立な成分を抽出し，最適化問題(5), (6), (8)の変数$\mathbf{X}$として変数の数を削減する。このとき，式(20)は常に満たされ，最適化問題(5), (6), (8)は無制約最適化問題となる。$\mathbf{z}$の従属な成分$\bar{\mathbf{z}}$は以下のように求められる。

$$\bar{\mathbf{z}} = -\bar{\mathbf{C}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{X} \tag{21}$$

行列$\tilde{\mathbf{C}}$および$\bar{\mathbf{C}}$は$\mathbf{C}$のRREFから得られる行列であり，これらの行列の導出および$\mathbf{z}$の独立な成分の決定法は付録に示す。

最適化問題(9)では，xz平面およびyz平面に関する対称性を考慮する。このとき，頂点座標は式(17), (18)の第1式を満たす。最適化の初期形状は4節で示したように原型曲面をxy平面へ投影した形状，あるいは投影図形をx軸またはy軸方向に拡大・縮小した形状であるから，最適化後には各部分曲面に対応する複数の展開図が重なる可能性があるが，釣合形状解析では接続された頂点の相対的な位置関係のみが必要であり，展開図が重なることに問題はない。最適化問題(9)の1つ目の制約条件以外はいずれも頂点の座標の線形な等式で表すことができることから，最適化問題(5), (6), (8)の場合と同様に独立な変数のみを抽出し用いることができる。よって，最適化問題(9)の変数$\mathbf{X}^{\mathrm{d}}$は展開図の頂点のx, y座標とし，制約条件$\mathbf{X}^{\mathrm{d}} \in \chi^{\mathrm{d}}$は省略する。

最適化問題(12)では，式(13)~(19)で表される各頂点のx, y, z座標に関する等式制約のうち線形のものを用いて頂点座標の独立な成分を抽出し，変数$\mathbf{X}^c$とする。最適化の初期形状は裁断図作成の際に用いた原型曲面とする。また，境界1および境界3上の頂点座標に関して式(13)または式(15)の第1式を非線形不等式制約として与え，最適化問題(12)の制約条件$\mathbf{X}^c \in \chi^c$とする。

まず，cutting pattern 1を用い，$h = 2.0$ m，$w = 0.5$として生成した中間曲面と最適化問題(8)における$H(\mathbf{X})$の上限制約を面積の上限制約に置き換え生成した曲面との比較を行う。最適化問題の目的関数値等をTable 1に示し，面積制約によって生成した曲面をFig. 4に示す。Table 1より面積制約により生成した曲面は，$H(\mathbf{X})$の制約により生成した中間曲面と比較して$K(\mathbf{X})$と$D(\mathbf{X}^d)$の値が極めて小さいものの$H(\mathbf{X})$の値は約10倍になっている。また， Fig. 4とFig. 5 (c)に示す$H(\mathbf{X})$の制約により生成した中間曲面を比較すると，Fig. 5 (c)の中間曲面は滑らかな形状である一方，面積制約により生成した曲面ではしわのようなものが発生し，部分曲面の接続部分が滑らかでない。このことから，複数の部分曲面からなる中間曲面の生成においては面積制約と平均曲率の制約は同等ではなく，可展面と極小曲面の中間的な性質をもつ曲面を生成するためには平均曲率を考慮する必要がある。

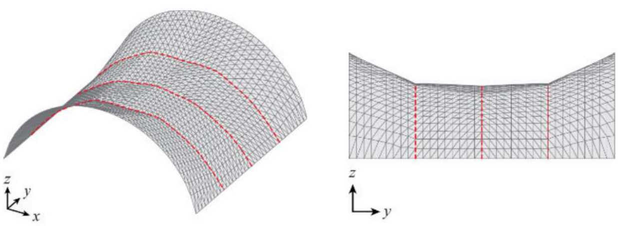
次に，各原型曲面の幾何学的な性質を検証する。cutting pattern 1, 2において$h = 1.6, 2.0, 2.4$ mとして生成した可展面（dev.），極小曲面（min.），中間曲面（int.）の各最適化問題での目的関数値および曲面の面積をそれぞれTable 2, 3に示す。中間曲面は$w = 0.1$, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9として5種生成した。また，Fig. 5, 6に$h = 2.0$ mとして生成した可展面，極小曲面，$w = 0.5$とした中間曲面のアイソメ図，裁断図を示す。Table 2, 3より，いずれのcutting patternでも中間曲面では最適化問題の目的関数値，面積のすべてで可展面と極小曲面の中間的な値を取っている。また，Fig. 7に示す$h = 2.0$ mの場合の各wにおける原型曲面の立面形状の比較より，中間曲面の中心点のz座標は可展面と極小曲面の中間的な値をとっており，中間曲面は形状においても可展面と極小曲面の中間的な性質を有する。cutting pattern 1, 2を比較すると，特にwが小さいときcutting pattern 1で$K(\mathbf{X})$および$D(\mathbf{X}^d)$の値がより小さく，平面へ展開する際の誤差が小さい。また，Fig. 7より，cutting pattern 1がより極小曲面に近い形状をとっており，$H(\mathbf{X})$の値もやや小さい。

続いて，各原型曲面より得られた膜構造の応力状態を検証する。各曲面の釣合形状解析により得られたx, y軸方向の応力の最小値（Min.），最大値（Max.），平均値（Avg.）および標準偏差を平均値で割った変動係数（COV）とx, y軸方向のCOVの平均値をそれぞれTable 2, 3に示す。また，Fig. 5, 6にx, y軸方向の応力分布と応力の最大値，最小値を示す。Table 2, 3より，幾何学的性質と同様に，中間曲面は可展面と極小曲面の中間的な応力状態を実現している。いずれのcutting patternにおいても，可展面を原型曲面とした場合には，y軸方向応力はすべての要素で正の値（引張）をとっておりCOVで表される応力のばらつきも小さいが，x軸方向応力は最小値が負の値（圧縮）であることからしわの発生が予測され，平均値も目標応力（5 MPa）と比較して小さい。一方，極小曲面を原型曲面とした場合には，x, y軸方向ともに平均応力は目標応力に近い値をとっているものの，すべての例において最大応力が目標応力の2倍以上の値をとっており，y軸方向応力は最小値が負の値となっている。中間曲面を原型曲面とした場合には，x, y軸方向ともに最小応力が正である応力状態を実現できており，しわの発生を避けられていると考えられる。また，Fig. 5、6より，曲面内部の膜材接合部および骨組境界部に応力集中を確認できるが，特に極小曲面と比較した場合に，中間曲面では応力集中を緩和できている。

いずれのcutting patternにおいてもCOVで表される応力のばらつきは，x軸方向では極小曲面が最も小さく，y軸方向では可展面が最も小さいものの，可展面ではx軸方向，極小曲面ではy軸方向の応力のばらつきが大きくなっている。一方，中間曲面はx, y両軸方向の応力のばらつきが比較的小さく，$w = 0.7$または0.9の場合にx, y軸方向のCOVの平均値が最小となっている。このことから，円筒境界においては，中間曲面を用いることで最も一様な応力状態を実現できると考えられる。中間曲面による応力のCOVの低減効果はhが大きいほど，やや大きくなる傾向があり，ライズの大きい曲面ではより中間曲面を用いることで応力のばらつきの低減を期待できると考えられる。また，cutting patternで比較すると，cutting pattern 1ではy方向，cutting pattern 2ではx方向の応力のCOVが特に小さくなっている。

Table 1 Results of form generation of intermediate surface with H(X) constraint and area constraint (h = 2.0 m, w = 0.5)

constraint	$K(\mathbf{X})$ [(rad·m^{-2})^2]	$H(\mathbf{X})$ [m^{-2}]	Area [m^2]	$D(\mathbf{X}^d)$ [m^2]
$H(\mathbf{X})$	4.56×10^{-1}	11.7	32.4	7.35×10^{-5}
Area	1.13×10^{-5}	1.17×10^{2}	32.1	4.41×10^{-8}



(a) isometric (b) elevation

Fig. 4 Intermediate surface generated with area constraint (h = 2.0 m, w = 0.5)

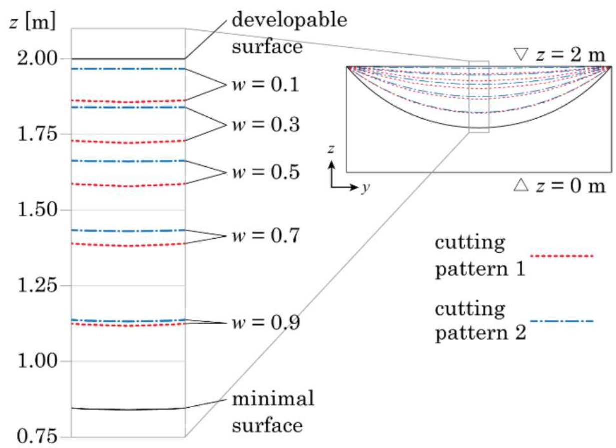
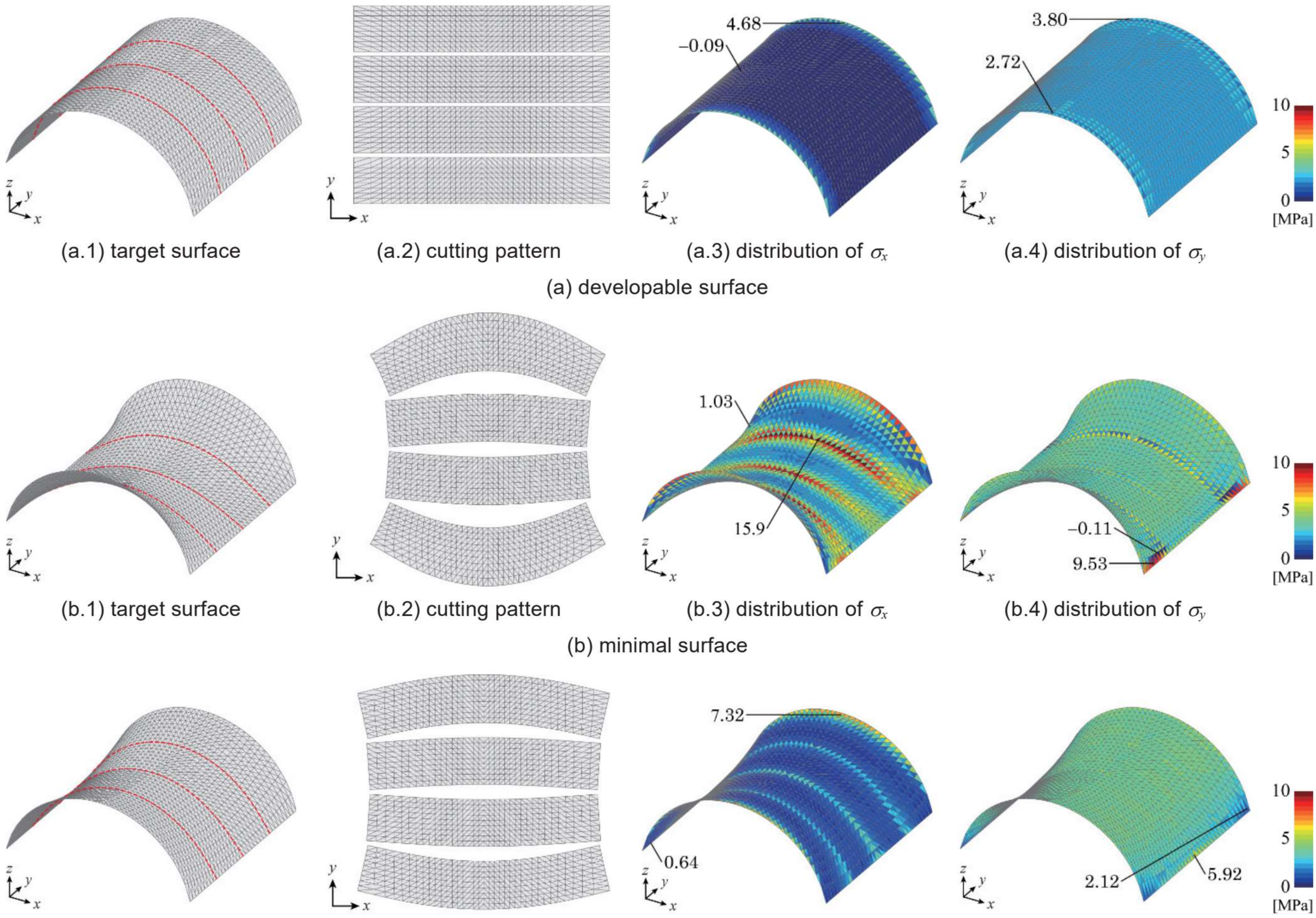


Fig. 7 Elevations of target surfaces (h = 2.0 m)



(a.1) target surface (a.2) cutting pattern (a.3) distribution of σ_x (a.4) distribution of σ_y

(a) developable surface

(b.1) target surface (b.2) cutting pattern (b.3) distribution of σ_x (b.4) distribution of σ_y

(b) minimal surface

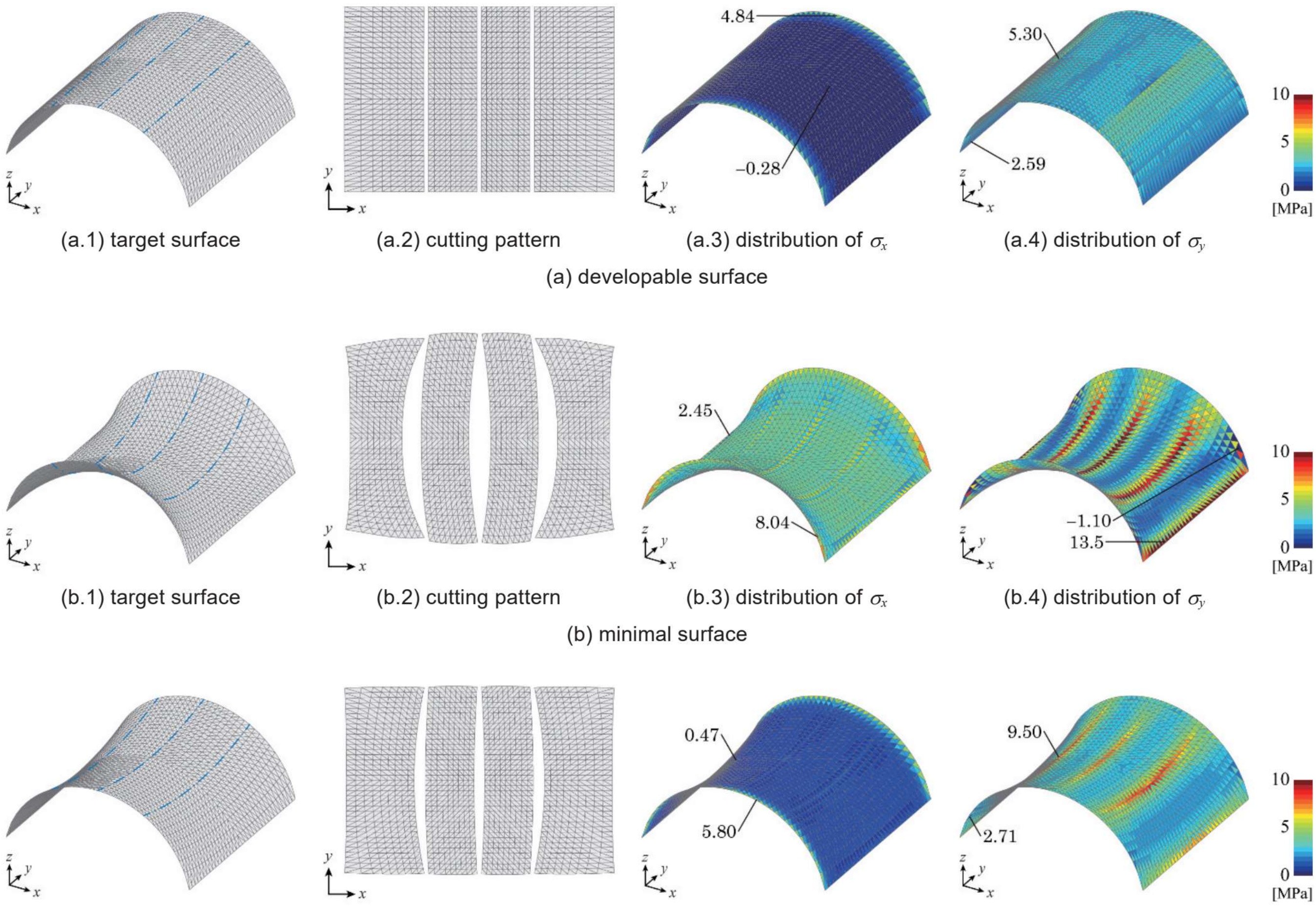
(c.1) target surface (c.2) cutting pattern (c.3) distribution of σ_x (c.4) distribution of σ_y

(c) intermediate surface with w = 0.5

Fig. 5 Surfaces generated with cutting pattern 1 (m = 4) and h = 2.0 m

Table 2 Results of optimization and equilibrium analysis with cutting pattern 1 (m = 4)

h	surface type	w	$K(\mathbf{X})$ [(rad·m^{-2})^2]	$H(\mathbf{X})$ [m^{-2}]	Area [m^2]	$D(\mathbf{X}^d)$ [m^2]	σ_x [MPa] Min.	Max.	Avg.	COV	σ_y [MPa] Min.	Max.	Avg.	COV	Avg. of COV
1.6	dev.	-	3.23×10^{-11}	20.2	31.3	5.72×10^{-5}	−2.95	6.60	0.53	2.43	2.68	4.32	3.55	0.06	1.25
	min.	-	4.72	6.80×10^{-4}	28.9	6.74×10^{-4}	2.27	13.81	4.62	0.35	2.53	8.11	4.67	0.12	0.24
	int.	0.1	2.00×10^{-7}	17.5	30.9	1.94×10^{-6}	0.09	4.98	0.66	1.33	2.30	4.28	3.61	0.06	0.69
		0.3	2.86×10^{-2}	14.1	30.3	1.09×10^{-5}	0.38	5.82	1.18	0.80	1.99	5.19	4.17	0.08	0.44
		0.5	2.28×10^{-1}	10.1	29.8	4.15×10^{-5}	0.65	6.57	1.78	0.59	1.95	5.55	4.61	0.10	0.34
		0.7	7.19×10^{-1}	6.06	29.4	1.02×10^{-4}	1.12	7.45	2.65	0.46	2.38	5.98	5.05	0.10	0.28
		0.9	1.89	2.02	29.1	2.72×10^{-4}	1.67	8.64	3.76	0.37	3.11	6.25	5.17	0.09	**0.23**
2.0	dev.	-	8.35×10^{-11}	23.3	34.6	1.62×10^{-8}	−0.09	4.68	0.38	2.35	2.72	3.80	3.26	0.04	1.19
	min.	-	6.80	1.13×10^{-3}	31.1	1.31×10^{-3}	1.03	15.91	4.58	0.44	−0.11	9.53	4.59	0.18	0.31
	int.	0.1	5.61×10^{-8}	20.6	33.8	4.76×10^{-8}	0.11	5.05	0.70	1.25	2.34	4.34	3.62	0.06	0.65
		0.3	8.22×10^{-2}	16.3	33.0	2.13×10^{-5}	0.38	5.82	1.18	0.80	1.99	5.19	4.17	0.08	0.44
		0.5	4.56×10^{-1}	11.7	32.4	7.35×10^{-5}	0.64	7.32	1.89	0.65	2.12	5.92	4.63	0.10	0.37
		0.7	1.27	7.00	31.8	2.13×10^{-4}	1.12	7.45	2.65	0.46	2.38	5.98	5.05	0.10	**0.28**
		0.9	3.01	2.33	31.3	5.32×10^{-4}	0.73	9.80	3.76	0.45	1.57	6.52	5.08	0.12	0.28
2.4	dev.	-	7.29×10^{-10}	24.5	38.2	1.89×10^{-6}	−0.23	4.81	0.38	2.37	2.67	3.88	3.29	0.05	1.21
	min.	-	8.23	1.26×10^{-3}	33.8	2.13×10^{-3}	−0.40	16.86	4.50	0.52	−3.15	11.53	4.49	0.26	0.39
	int.	0.1	4.00×10^{-5}	22.0	37.1	5.73×10^{-6}	0.10	5.39	0.79	1.17	2.54	4.33	3.71	0.05	0.61
		0.3	1.65×10^{-1}	17.1	36.3	3.46×10^{-5}	0.34	6.79	1.34	0.87	2.40	5.25	4.23	0.07	0.47
		0.5	7.23×10^{-1}	12.2	35.5	1.42×10^{-4}	−0.11	7.71	2.01	0.70	2.58	6.02	4.64	0.09	0.40
		0.7	1.84	7.34	34.8	3.57×10^{-4}	−1.03	8.43	2.81	0.58	2.04	6.16	4.93	0.11	0.34
		0.9	4.05	2.45	34.1	8.78×10^{-4}	−1.84	10.43	3.77	0.50	0.07	6.89	4.99	0.14	**0.32**



(a.1) target surface (a.2) cutting pattern (a.3) distribution of σ_x (a.4) distribution of σ_y

(a) developable surface

(b.1) target surface (b.2) cutting pattern (b.3) distribution of σ_x (b.4) distribution of σ_y

(b) minimal surface

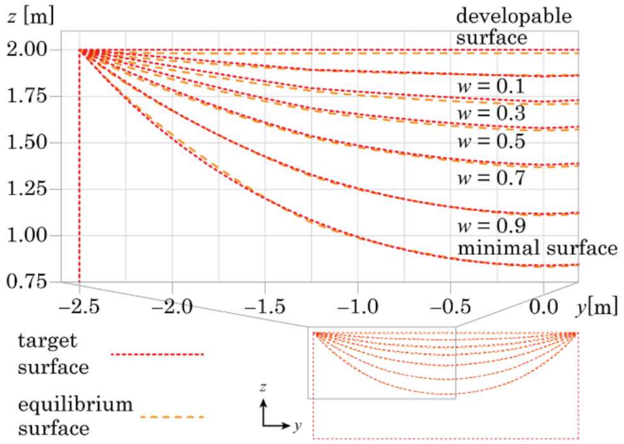
(c.1) target surface (c.2) cutting pattern (c.3) distribution of σ_x (c.4) distribution of σ_y

(c) intermediate surface with w = 0.5

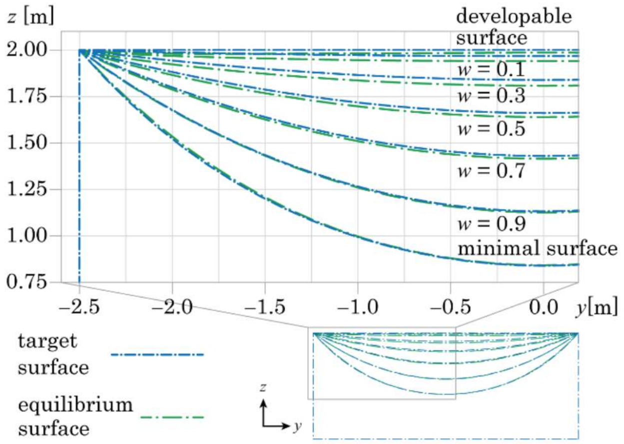
Fig. 6 Surfaces generated with cutting pattern 2 (m = 4) and h = 2.0 m

Table 3 Results of optimization and equilibrium analysis with cutting pattern 2 (m = 4)

h	surface type	w	$K(\mathbf{X})$ [(rad·m^{-2})^2]	$H(\mathbf{X})$ [m^{-2}]	Area [m^2]	$D(\mathbf{X}^d)$ [m^2]	σ_x [MPa] Min.	Max.	Avg.	COV	σ_y [MPa] Min.	Max.	Avg.	COV	Avg. of COV
1.6	dev.	-	1.66×10^{-11}	20.2	31.3	1.37×10^{-5}	−0.13	5.02	0.45	2.13	2.83	4.41	3.67	0.08	1.11
	min.	-	4.63	6.80×10^{-4}	28.9	5.03×10^{-4}	3.29	9.64	4.67	0.13	2.15	10.71	4.66	0.37	0.25
	int.	0.1	5.50×10^{-3}	18.2	31.1	1.08×10^{-5}	−0.13	4.80	0.50	1.79	2.50	4.96	3.39	0.12	0.95
		0.3	9.60×10^{-2}	14.1	30.6	2.15×10^{-5}	0.18	5.41	0.88	1.03	2.89	6.05	3.83	0.14	0.59
		0.5	3.44×10^{-1}	10.1	30.0	6.05×10^{-5}	0.69	5.78	1.43	0.60	3.24	7.47	4.28	0.20	0.40
		0.7	8.20×10^{-1}	6.06	29.5	1.30×10^{-4}	1.47	6.22	2.34	0.33	3.50	9.14	4.85	0.25	0.29
		0.9	1.89	2.02	29.1	2.63×10^{-4}	2.43	7.05	3.62	0.20	3.32	10.07	5.13	0.29	**0.25**
2.0	dev.	-	2.43×10^{-11}	23.3	34.6	1.92×10^{-5}	−0.28	4.84	0.40	2.28	2.59	5.30	3.57	0.13	1.21
	min.	-	6.72	1.13×10^{-3}	31.1	1.07×10^{-3}	2.45	8.04	4.57	0.15	−1.10	13.52	4.58	0.50	0.32
	int.	0.1	1.71×10^{-2}	21.0	34.2	1.54×10^{-5}	−0.09	4.96	0.54	1.70	2.61	5.03	3.52	0.12	0.91
		0.3	2.00×10^{-1}	16.3	33.4	6.20×10^{-5}	0.00	5.48	0.92	0.98	2.77	7.24	3.87	0.21	0.59
		0.5	6.44×10^{-1}	11.7	32.7	1.49×10^{-4}	0.47	5.80	1.49	0.58	2.71	9.50	4.33	0.28	0.43
		0.7	1.44	7.00	32.0	3.00×10^{-4}	1.32	6.40	2.35	0.36	2.38	10.95	4.82	0.33	0.35
		0.9	3.04	2.33	31.3	5.73×10^{-4}	2.11	6.69	3.56	0.22	1.17	11.49	5.06	0.40	**0.31**
2.4	dev.	-	2.82×10^{-11}	24.5	38.2	2.33×10^{-5}	−0.24	4.18	0.32	2.45	1.21	4.33	2.95	0.15	1.30
	min.	-	8.19	1.26×10^{-3}	33.8	1.94×10^{-3}	0.95	8.18	4.51	0.18	−3.37	16.53	4.41	0.65	0.42
	int.	0.1	3.52×10^{-2}	22.0	37.7	2.46×10^{-5}	−0.12	4.84	0.53	1.69	2.46	4.80	3.38	0.14	0.91
		0.3	3.25×10^{-1}	17.1	36.7	1.65×10^{-4}	−0.23	5.27	0.95	0.94	1.71	9.42	3.81	0.30	0.62
		0.5	9.66×10^{-1}	12.2	35.8	3.15×10^{-4}	0.07	5.83	1.54	0.59	1.23	11.91	4.32	0.37	0.48
		0.7	2.08	7.34	34.9	6.03×10^{-4}	0.79	6.17	2.31	0.38	0.29	13.73	4.65	0.45	0.41
		0.9	4.13	2.45	34.1	1.02×10^{-3}	1.58	6.96	3.57	0.25	−1.19	14.52	5.01	0.52	**0.38**



(a) cutting pattern 1



(b) cutting pattern 2

Fig. 8 Elevations of target and equilibrium surfaces (h = 2.0 m)

Table 4 Errors of z coordinates between center points of target and equilibrium surfaces

h	surface type	w	cutting pattern 1	cutting pattern 2
1.6	dev.	-	−0.018	−0.027
	min.	-	−0.005	0.001
	int.	0.1	0.003	−0.033
		0.3	−0.022	−0.039
		0.5	−0.022	−0.027
		0.7	−0.016	−0.019
		0.9	−0.010	−0.008
2.0	dev.	-	−0.018	−0.014
	min.	-	−0.008	0.003
	int.	0.1	0.005	−0.027
		0.3	−0.015	−0.031
		0.5	−0.013	−0.021
		0.7	−0.013	−0.015
		0.9	−0.009	−0.006
2.4	dev.	-	−0.015	−0.022
	min.	-	−0.012	0.007
	int.	0.1	−0.005	−0.012
		0.3	−0.007	−0.024
		0.5	−0.006	−0.017
		0.7	−0.006	−0.013
		0.9	−0.011	−0.003

原型曲面と釣合形状の立面形状の比較をFig. 8に示す。また，原型曲面と釣合形状の$x=y=0$の点のz座標の差をTable 4に示す。これより，可展面と極小曲面では極小曲面の形状誤差が小さいが，最適化問題の目的関数値などとは異なり，中間曲面においてwの値が大きくなるほど形状誤差が小さくなるといった傾向は見られない。展開図の原型曲面の3次元形状との誤差を表す最適化問題(9)の目的関数$D(\mathbf{X}^{\mathrm{d}})$の値は可展面に近づくほど小さくなることから，本稿の例では曲面の展開精度と原型曲面と釣合形状の誤差には明確な相関は認められない。

6.　結

離散微分幾何学で用いられるガウス曲率と平均曲率を用いて可展面と極小曲面の中間的な性質をもつ曲面を生成し，骨組膜構造の原型曲面として用いることで簡便に一様に近い応力状態を実現する膜構造の裁断図を得る手法を提案した。曲面を三角形で離散化し，パラメータ表現に依存することなく曲面上の点の位置を直接変数とすることで，任意の境界形状をもつさまざまな曲面を生成できる。曲面の曲率は内部頂点で定義し，内部頂点と接続する頂点との位置関係のみによって定まるという特徴を持つため，パラメータ曲面等での曲率を求める際に必要な微分表現などは必要としない。

可展面，極小曲面はそれぞれ曲面の内部頂点での離散ガウス曲率または離散平均曲率の2乗和を最小化することで生成する。また，中間曲面の生成はガウス曲率の2乗和と平均曲率の2乗和をともに最小化する多目的最適化問題として定式化できる。本論文では，目的関数の一つを最小化し，もう一つの目的関数には上限制約を与え単目的最適化問題を解く制約法を用いて多目的最適化問題のパレート解を得た。原型曲面を複数の曲面で生成するとき，平均曲率に制約を与えることで滑らかな中間曲面が得られるが，曲面の面積を制約すると，不連続な勾配をもつ曲面が生成される。

膜構造の裁断図は，原型曲面と同様の辺の接続関係をもつ平面上の展開図を対応する辺の長さの誤差の2乗和を最小化する最適化問題を解くことで得て，目標応力に応じて展開図を縮小することで作成する。作成した裁断図の三角形要素の形状を初期形状として，与えられた骨組に張られた膜材のひずみエネルギーの最小化問題を解くことで膜構造の釣合形状を求め，応力状態を確認する。最適化問題を解く際に曲面の対称性などを考慮する場合，線形等式制約条件式からRREFを用いて独立な頂点座標を抽出することで変数の数を削減することも可能である。

数値例題では平面形状が同一でライズの異なる3種の円筒形境界形状をもつ骨組からなる膜構造の生成を行い，提案手法を検証した。2種の裁断パターンで可展面，極小曲面，および中間曲面を生成し，それらを原型曲面とする骨組膜構造の解析から応力状態を比較した。応力のばらつきはx軸方向（円筒の半径方向）では極小曲面，y軸方向（円筒の軸方向）では可展面を原型曲面とした場合に最も小さいものの，いずれの曲面も直交方向の応力のばらつきは大きい。一方，中間曲面を原型曲面とした場合には，可展面と極小曲面の中間的な応力状態を実現しており，x, y両軸方向において応力のばらつきを比較的小さくすることができている。また，中間曲面を原型曲面とすることで，とくに極小曲面を用いた場合と比較して応力集中を緩和できる。

本論文での裁断図は形状の誤差が最小となるように原型曲面を平面に展開したものを目標応力に応じて各軸方向に一様に縮小して求めており，釣合形状解析の結果を用いて裁断図形状を改善することでよりよい応力状態を実現することが可能であると考えられる。また，提案手法では曲面の裁断数および曲面上での裁断線の位置をあらかじめ与えているが，実用面を考慮した場合，これらの決定手法に関してさらに検討する必要がある。しかし，本論文で提案した中間曲面を用いることで裁断図の最適化をすることなく可展面や極小曲面を原型曲面とした場合よりも良好な応力状態を実現することができることから，裁断図形状の解析に関する計算コストを抑えるうえで本手法は有効であると考えられる。また，離散化された曲面の頂点位置を直接変数とするため，変数の数はパラメトリック曲面等を用いる場合と比較して増加するものの，さまざまな複雑な境界形状に適用することが可能である。

謝辞

本研究は JST CREST JPMJCR1911, JSPS科研費 JP20J21650の助成を受けた。

参考文献

1) K. Ishii and N. Ataka: Membrane structure, Kogyo Chosakai, 1969 (in Japanese)
石井一夫，安宅信行：膜構造の設計，工業調査会，1969

2) K. Ishii: Kyokumen-noheimenhenokinzitenkai Makukouzoukyokume-n-no cutting zunituite (Developing of curved surfaces: On cutting diagram of membrane structures), Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, Structures, pp. 783–784, 1972.7 (in Japanese)
石井一夫：曲面の平面への近似展開 膜構造曲面のカッティング図について，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造系，pp. 783–784, 1972.7

3) N. Ataka and Y. Kozuka: A determination method of geodesic lines on the surface of membrane structures, SSummaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, Structures, pp. 2603–2604, 1984.7 (in Japanese)
安宅信行，小塚裕一：膜構造における膜曲面上の測地線の決定法について，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造系，pp. 2603–2604, 1984.7

4) H. Ohmori: Shape finding or original surface for structural design, Seisan kenkyu, No. 1, pp. 18–19, 1995.1 (in Japanese)
大森博司：設計用原型曲面の形態解析，生産研究，Vol. 47, No. 1, pp. 18–19, 1995.1

5) K. Ishihara, T. Yagi, N. Hagiwara and H. Ohmori: Shape finding analysis of membrane structure: Minimal surface analysis by using combined variational functional, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 60, No. 469, pp. 61–70, 1995.3 (in Japanese)
石原　競，八木孝憲，萩原伸幸，大森 博司：極小面解析による膜構造の形状解析：複合変分汎関数を用いて，日本建築学会構造系論文集，Vol. 60, No. 469, pp. 61–70, 1995.3

6) T. Yagi, H. Ohmori, K. Ishihara: Study on shape determination of membrane structure by using minimal surface method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 62, No. 502, pp. 99–104, 1997.12 (in Japanese)
八木孝憲，大森博司，石原　競：極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究，日本建築学会構造系論文集，Vol. 62, No. 502, pp. 99–104, 1997.12

7) T. Suzuki and Y. Hangai: Finite element analysis if minimal surface based on the reduction of variables, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 425, pp. 111–120, 1991.7 (in Japanese)
鈴木俊男，半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 425, pp. 111–120, 1991.7

8) K. Kawaguchi, W.-L. Ke and M. Miki: Minimal surface with constraint conditions and steepest descent method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 73, No. 632, pp. 1773–1777, 2008.10 (in Japanese)
川口健一，柯宛伶，三木優彰：付帯条件付き極小曲面と一般最急降下法に関する研究，日本建築学会構造系論文集，Vol. 73, No. 632, pp. 1773–1777, 2008.10

9) H. Tsubota and A. Yoshida: Theoretical analysis for determining cutting patterns for membrane structures by adopting optimization technique, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 395, pp. 101–111, 1989.1 (in Japanese)
坪田張二，吉田　新：最適化手法を用いた膜構造物の裁断図解析，日本建築学会構造系論文報告集，No. 395, pp. 101–111, 1989.1

10) M. Ohsaki, K. Uetani and S. Takatani: Shape-stress trade-off design method of membrane structures by using inverse problem approach, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 61, No. 488, pp. 107–115, 1996.10 (in Japanese)
大崎　純，上谷宏二，高谷真次：逆問題型手法による膜構造物の目標形状・応力トレードオフ設計法，日本建築学会構造系論文集，Vol. 61, No. 488, pp. 107–115, 1996.10

11) T. Yagi, N. Hagiwara, H. Ohmori and T. Matsui: A new approach for cutting pattern analysis of membrane structures by simultaneous consideration on both equilibrium condition and initial configuration, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 63, No. 508, pp. 71–78, 1998.6 (in Japanese)
八木孝憲，萩原伸幸，大森博司，松井徹哉：膜構造物の釣合形状と裁断形状の同時解析手法に関する研究，日本建築学会構造系論文集，Vol. 63, No. 508, pp. 71–78, 1998.6

12) J. Cui and M. Ohsaki: An optimization method for generating self-equilibrium shape of curved surface from developable surface, Proc. of the IASS Annual Symposium 2017, Paper No. 9574, 2017

13) J. Cui and M. Ohsaki: Shape design of curved surface of membrane structure using developable surface, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol. 59, pp. 199–214, 2018

14) G. Farin: Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 5th edition, 2001.

15) A. I. Bobenko and Y. B. Suris: Discrete Differential Geometry: Integrable Structure, American Mathematical Society, 2008.

16) J. M. Sullivan: Curvatures of smooth and discrete surfaces, Discrete Differential Geometry. Oberwolfach Seminars, Birkhäuser Basel, Vol. 38, pp. 175–188, 2008

17) M. Shimoda and K. Yamane: A free-form optimization method for form-finding of membrane structure, Transactions of the JSME, Vol. 79, No. 807, pp. 352–366, 2013.11 (in Japanese)
下田昌利，山根滉一：膜構造の形状決定のためのフリーフォルム最適化，日本機械学会論文集，Vol. 79, No. 807, pp. 352–366, 2013.11

18) X. Tellier, C. Douthe, L. Hauswirth and O. Baverel: Linear Weingarten surfaces for conceptual design of double-curvature envelopes, in Proc. fib Conceptual Design Symposium 2019, Madrid, 2019.

19) K. Hayakawa, M. Ohsaki and R. Uemura: Design of frame-supported membrane structure using geometric characteristics of discrete surface, AIJ Kinki Chapter research meeting, pp. 265–268, 2020 (in Japanese)
早川健太郎，大崎　純，植村亮平：離散的な曲面の幾何学的特性を用いた骨組膜構造の設計，日本建築学会近畿支部研究報告集，pp. 265–268, 2020

20) R. Uemura, M. Ohsaki and K. Hayakawa: Shape optimization of curved structures using discrete developable surfaces, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, Structures-1, pp. 923–924, 2020.7 (in Japanese)
植村亮平，大崎　純，早川健太郎：離散的可展面を用いた曲面構造の形状最適化，日本建築学会大会学術講演梗概集，構造I, pp. 923–924, 2020.7

21) M. Meyer, M. Desbrun, P, Schröder and A. H. Barr: Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds, Visualization and Mathematics III, Springer, pp. 34–47, 2003
22) M. Ohsaki, J. Fujiwara and F. Takeda: Approximate cutting pattern optimization of frame-supported and pneumatic membrane structures, Int. J. Mechanics and Materials in Design, published online, 2020
23) J. Y. Zhang, M. Ohsaki and Y. Kanno: A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems, International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, pp. 2260–2278, 2006.4
24) G. J. Borse: Numerical Methods with MATLAB, International Thomson Publishing Inc., 1997

付録

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times N}$を係数行列とする以下の線形等式を満たすベクトル$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N}$の独立な成分を抽出する行列のRREFを用いた一般的な手法を示す。

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{0} \tag{a.1}$$

行列のRREFは行の基本変形から得られ，以下のような性質を持つ[24)]。

A) 非ゼロの行の最初の非ゼロの成分は1であり，これを「ピボット」とよぶ。また，ピボットを含む列を「ピボット列」とよぶ。

B) すべてのピボット列においてピボット以外の成分はすべて0であり，これらの列は互いに線形独立である。

C) ある行のピボットを含む列は，その行より上のピボットを含む列よりも右側にある。

これらの性質より，以下のアルゴリズムで式(a.1)を満たす$\mathbf{x}$の独立な成分を抽出する。

1. 整数tについて$t = 0$とする。また，$\mathbf{x}$の独立な成分の位置を指定するための関数$O^t(i)$を定め，$O^0(i) = i \ (i = 1,\ldots,N)$とする。
2. 行列$\mathbf{C}$のRREFとして行列$\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{M\times N}$を以下のように計算する。ただし，$\mathbf{I}_r$は$p \ (1 \le p \le M)$次の単位行列，$\hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{U}}, \hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{L}}$はそれぞれ$r$行$N-p$列，$M-p$行$N-p$列の実行列である。

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{U}} \\ \mathbf{O} & \hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \tag{a.2}$$

3. $p = M$または$\hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{L}} = \mathbf{O}$のとき，$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{I}_p, \tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}^{\mathrm{U}}$とする。このとき，$\mathbf{x}$の第1から$p$成分が式(a.1)を満たす$\mathbf{x}$の従属な成分であり，これらを順に並べたベクトルを$\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{p}$とする。また，$\mathbf{x}$の第$p$+1から$N$成分が式(a.1)を満たす$\mathbf{x}$の独立な成分であり，これらを順に並べたベクトルを$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{N-p}$としてアルゴリズムを終了する。上記以外の場合には$j = p+1$として次の手順に進む。
4. RREFの性質からピボットを含まない列は$\hat{\mathbf{C}}$の第p列よりも右側にある。第j列がピボットを含まないとき，関数$O^{t+1}(i)$を以下のように定め，$t \leftarrow t+1$とする。

$$O^{t+1}(i) = \begin{cases} O^t(i) & (i < j) \\ N - t & (i = j) \\ O^t(i) - 1 & (i > j) \end{cases} \tag{a.3}$$

5. $j \leftarrow j+1$とする。$j \le N$のとき，手順4に戻る。$j > N$のとき，$\hat{\mathbf{C}}$の$i \ (i = 1,\ldots,N)$列目が$O^{t+1}(i)$列目である行列$\hat{\mathbf{C}}' \in \mathbb{R}^{M\times N}$は以下のように表される。

$$\hat{\mathbf{C}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p'} & \hat{\mathbf{C}}'^{\mathrm{U}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{a.4}$$

このとき，$p' = \mathrm{rank}(\mathbf{C})$であり，$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{I}_{p'}, \tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}'^{\mathrm{U}}$とする。また，$\mathbf{x}$の第$i$成分が第$O^{t+1}(i)$成分であるようなベクトルを$\mathbf{x}'$とすると，$\mathbf{x}'$の第1から$p'$成分が式(a.1)を満たす$\mathbf{x}$の従属な成分，第$p'$+1から$N$成分が式(a.1)を満たす$\mathbf{x}$の独立な成分であり，$\mathbf{x}'$の第1から$p'$成分および第$p'$+1から$N$成分を順に並べたベクトルをそれぞれ$\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{p'}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{N-p'}$としてアルゴリズムを終了する。

以上のアルゴリズムにより得られる整数関数$O^{t+1}(i)$に関して$O^{t+1}(i) \le \mathrm{rank}(\mathbf{C})$を満たす$i$の集合をIとすると，線形等式(a.1)を満たすベクトル$\mathbf{x}$の独立な成分は$\mathbf{x}$の第$i \in$ I成分である。また，行列$\bar{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{C}}$およびベクトル$\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}$は次式を満たし，次式より$\mathbf{x}$の従属成分を独立成分より求めることができる。

$$\bar{\mathbf{x}} = -\bar{\mathbf{C}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \tag{a.5}$$

SHAPE DESIGN OF MEMBRANE STRUCTURE
USING GEOMETRIC INVARIANTS OF DISCRETE SURFACE

Kentaro HAYAKAWA [*1] *and Makoto OHSAKI* [*2]

[*1] Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., M.Eng.
[*2] Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

The target surfaces of the frame supported membrane structures are generated by using the Gaussian and mean curvatures. The surface is discretized into a triangular mesh, and the Gaussian and mean curvatures are defined at the interior vertices of the surface based on the formulations of discrete differential geometry. The minimal surface with zero mean curvature, which is equivalent to the uniform stressed surface, is often used as the target surface because uniform stress distribution is desirable. However, while the membrane structure is generated by connecting planar membrane sheets; i.e. cutting patterns, the minimal surface cannot be developed to a plane without out-of-plane deformation. In this respect, the developable surface with zero Gaussian curvature may be desirable; however, it cannot realize uniform stress distribution. Therefore, in this study, the curved surface with a geometric property intermediate between those of developable and minimal surfaces is generated and used as the target surface of a membrane structure.

The Gaussian curvature at an inner vertex is defined using the angle defect, which is the difference between 2π and the sum of the angles between edges connecting to the vertex. The mean curvature is defined using a cotangent formula for the mean curvature vector at the vertices. The developable and minimal surfaces are generated by minimizing the sum of the squares of Gaussian and mean curvatures, respectively. The positions of the vertices on the outer boundary of the surface are fixed, and the optimization problem is solved by using the z-coordinates of the interior vertices as variables. In addition, the intermediate surface can be obtained by solving a multi-objective optimization problem that minimizes the sum of squares of both Gaussian and mean curvatures. The constraint approach is applied to obtain a Pareto solution; i.e., the sum of squares of Gaussian curvature is minimized under the upper bound constraint on the sum of squares of the mean curvature.

After obtaining the target surface, it is flattened by minimizing the sum of squares of differences between the edge lengths of on the surface in three-dimensional space and those in its development diagram on a plane. The cutting pattern is obtained by shrinking the obtained development diagram according to the target stress. Then, the equilibrium shape of the membrane structure is obtained by installing the obtained cutting patterns to the frame. The equilibrium state is achieved by solving the optimization problem that minimizes the strain energy of the membrane elements.

The effectiveness of the proposed method is demonstrated in the examples of curved surfaces with cylindrical boundary shapes of various heights. The membrane structure is constructed with four cutting patterns. The intermediate surfaces obtained by the proposed method have shown to have intermediate properties between the minimal and developable surfaces with respect to Gaussian curvature, mean curvature, and surface area in every height. The intermediate surfaces have realized the most preferable distributions of stresses in two directions while the developable and minimal surfaces have realized the uniform stresses in only one direction. The average values of the stresses in two directions are also closest to the target stresses when the intermediate surface is used. Therefore, when the intermediate surface is used as the target surface of the membrane structure, the preferable equilibrium state can be obtained easily without optimization of the cutting pattern.

（2020 年 10 月 8 日原稿受理，2021 年 1 月 27 日採用決定）