極大独立集合による局所化について

On Localization by Maximal Independent Set

東京理科大学　石原侑樹 [*1]

Yuki Ishihara

Tokyo University of Science

Abstract

Localization is one of the fundamental tools in commutative algebra. In particular, in polynomial rings, localization by Maximal Independent Set is one of the most frequently used methods in Computer Algebra. By using maximal independent set, we can attribute the discussion of high-dimensional ideals to the discussion of 0-dimensional ideals. In this paper, localization by maximal independent set is discussed in comparison with localization by regular sequence.

1　はじめに

局所化は可換環論において基本的な道具の 1 つである．特に，多項式環において，極大独立集合（Maximal Independent Set）を用いた局所化は計算機代数においてよく登場する手法の 1 つである．体 K 上の n 変数多項式環 $K[x_1,\dots,x_n]$ のイデアル I に対し，$X=\{x_1,\dots,x_n\}$ の部分集合 U が $I\cap K[U]=\{0\}$ かつ $\#U=\dim(I)$ を満たすとき，U は I の極大独立集合と呼ばれる．ここで，$\#U$ は U の位数，$\dim(I)$ は I のクルル次元である．極大独立集合を用いると，高次元のイデアルの操作を 0 次元のイデアルの操作に帰着させることができる．例えば，極大独立集合は準素イデアル分解や根基の計算に応用されている．本稿では hull-primary イデアルの equidimensional hull の計算に関し，極大独立集合を用いた局所化と正則列を用いた局所化を比較する．

2　準備

本稿では，K を体とし，K 上の n 変数多項式環 $K[x_1,\dots,x_n]$ について考える．簡単のため，変数の集合を $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ とおく．また，I を $K[X]$ のイデアルとし，$K[X]$ の元 $f_1,\dots,f_s$ から生成されるイデアルを $\langle f_1,\dots,f_s\rangle$ で表す．ここでは，1 以上の整数のことを自然数と呼び，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す．また，イデアル I の根基を $\sqrt{I}$ で表す．すなわち，$\sqrt{I}=\{f\in K[X]\mid \exists m\in\mathbb{N}, f^m\in I\}$ である．イデアル I と J に対し，イデアル商，飽和イデアルはそれぞれ $I:J=\{f\in K[X]\mid fJ\subset I\}$，$I:J^\infty=\{f\in K[X]\mid \exists m\in\mathbb{N}, fJ^m\subset I\}$ と定義される．

[*1] 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: `yishihara@rs.tus.ac.jp`

2.1 極大独立集合と局所化

まず，極大独立集合は次のように定義される．

定義 1 (Definition 3.5.3, [5])
I をイデアル，U を X の部分集合とする． $I \cap K[U] = \{0\}$ が成り立つとき，U は I の**独立集合**と呼ばれる．I の独立集合 U の位数が I のクルル次元（すなわち， 剰余環 $K[X]/I$ の次元）と一致している時，U は I の**極大独立集合**（*Maximal Independent Set*）と呼ばれる．

例 1
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle \subset K[x, y, z]$ とする時，

$$\{\}, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}$$

が I のすべての独立集合である．また，$\{y, z\}$ は I の極大独立集合である．

極大独立集合の計算にはグレブナー基底を用いることができる．ここで，$in_\prec(I)$ を単項式順序 $\prec$ に関する I の先頭項イデアルとする．

命題 2 (Exercise 3.5.1, [5])
I をイデアル，$\prec$ を次数付きの単項式順序とする．U が $in_\prec(I)$ の極大独立集合である時，U は I の極大独立集合でもある．

先頭項イデアルはグレブナー基底を用いて計算できるため，命題 2 より，$in_\prec(I)$ の極大独立集合が分かれば，元のイデアルの極大独立集合が計算できる．$in_\prec(I)$ は単項式イデアルであるため，独立集合の計算は比較的容易である．効率的な極大独立集合の計算は参考文献 [2] に記載されている．

例 2
$I = \langle x^2+y-z, z^2+1 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ とする時，次数付き逆辞書式順序 $z \prec y \prec x$ に対して， $in_\prec(I) = \langle x^2, z^2 \rangle$ であり，$U = \{y\}$ は $in_\prec(I)$ の極大独立集合である．よって，命題 *2* より，$U = \{y\}$ は I の極大独立集合でもある．

次に，極大独立集合による局所化は以下のように定義される．

定義 3
I をイデアル，U を I の極大独立集合とする．この時，I の $K[U]^\times = K[U] \setminus \{0\}$ による局所化の引き戻し

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X]$$

を I の U に関する **MIS-localization** と呼ぶこととする．

例 3
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle \subset K[x, y, z]$，$U = \{y, z\}$ とする時，

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = \langle x^2 \rangle.$$

2.2 極大独立集合と準素イデアル分解

イデアルの構造を分析する上で，準素イデアル分解は効果的な手法の 1 つである．I の準素イデアル分解は次のように定義される．

定義 4 (Chapter 4, [1])
I をイデアルとする．準素イデアルの有限集合 $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ は $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ を満たす時，I の準素イデアル分解と呼ばれる．I の準素イデアル分解 $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ は

1. 各 $i \neq j$ に対し，$\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$,
2. 各 i に対し，$Q_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} Q_j$

を満たす時，**最短準素イデアル分解**と呼ばれる．I の最短準素イデアル分解 $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ に対し，その元は I の準素成分と呼ばれる．I の準素成分の根基は I の素因子と呼ばれ，素因子全体の集合は $\mathrm{Ass}(I)$ で表される．すなわち，$\mathrm{Ass}(I) = \{\sqrt{Q_1}, \ldots, \sqrt{Q_r}\}$ である．I の素因子の集合のうち，集合の包含関係で極小のものを**孤立素因子**，それ以外を**埋没素因子**と呼ぶ．対応する準素成分も同様に**孤立準素成分**，**埋没準素成分**と呼ぶ．

注意 1
イデアル I に対し，その最短準素イデアル分解は一意とは限らない．例えば，$I = \langle x^3, x^2y \rangle$ とする時，自然数 m に対して

$$I = \langle x^2 \rangle \cap \langle x^3, xy, y^m \rangle$$

は I の最短準素イデアル分解である．すなわち，イデアル $\langle x^3, x^2y \rangle$ の準素イデアル分解は無限に存在する．一方，孤立準素成分と素因子の集合は最短準素イデアル分解に依存せず，イデアル I によってのみ定まる．上の例では，$\langle x^2 \rangle$ が孤立準素成分であり，$\mathrm{Ass}(I) = \{\langle x \rangle, \langle x, y \rangle\}$ が素因子の集合である．特に，イデアル I が埋没成分を持たない場合には I の最短準素イデアル分解は一意に定まる．図 *1*，*2* のように素因子の包含関係に基づいて，準素成分のグラフを作成することができる．上に位置するものが埋没準素成分で，*1* 番下に位置するものが孤立準素成分である．一般のイデアルのグラフはより複雑なものとなる．

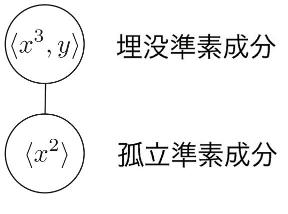

図 1: $\langle x^3, x^2y \rangle$ の準素成分のグラフ

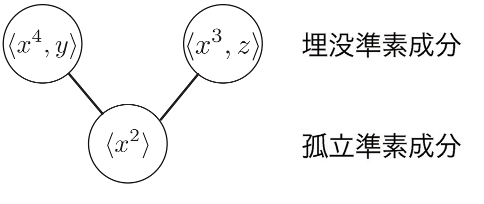

図 2: $\langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle$ の準素成分のグラフ

MIS-localization は準素イデアル分解と次のような関係がある．次の命題は [1] の Proposition 4.9 から直ちに従う．

命題 5
I をイデアル，$\mathcal{Q}$ を I の最短準素イデアル分解，$U \subset X$ を I の極大独立集合とする．この時，

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}, Q \cap K[U] = \{0\}} Q$$

が成り立つ．すなわち，U による I の *MIS-localization* は I の準素成分で U を極大独立集合に持つもの全体の共通部分になる．

例 4
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz\rangle \subset K[x,y,z]$ とすると，I の最短準素イデアル分解の 1 つは，

$$\mathcal{Q} = \{\langle x^2\rangle, \langle x^4, y\rangle, \langle x^3, z\rangle\}$$

であり，$U = \{y, z\}$ とすると，

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = \bigcap_{Q\in\mathcal{Q}, Q\cap K[U]=\{0\}} Q = \langle x^2\rangle$$

例 5
イデアル I が最短準素イデアル分解

$$I = Q_{(1,1)} \cap Q_{(1,2)} \cap Q_{(1,3)} \cap Q_{(2,1)} \cap Q_{(2,2)} \cap Q_{(2,3)} \cap Q_{(3,1)} \cap Q_{(3,2)}$$

を持ち，素因子が図 *3* のグラフのような包含関係を持っているとする．すなわち，$Q_{(1,1)}, Q_{(1,2)}, Q_{(1,3)}$ が孤立準素成分であり，それ以外は埋没準素成分である．また，U はイデアル I の極大独立集合であり，孤立準素成分のうち U を極大独立集合に持つのは $Q_{(1,1)}$，$Q_{(1,2)}$ だけとする．この時，I の U による *MIS-localization* は $IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = Q_{(1,1)} \cap Q_{(1,2)}$ となる．図 *3* のグラフにおいては一番下に位置する準素成分が抽出されている形になる．このように *MIS-localization* は I と同じ次元の孤立準素成分の一部を取り出すような操作である．

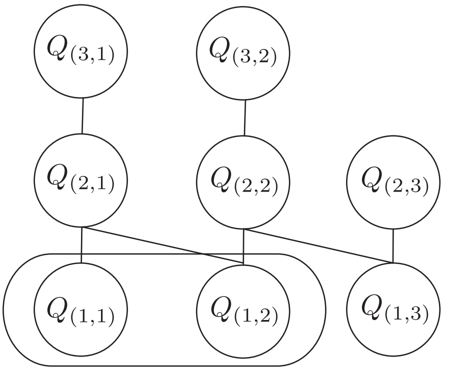

図 3: MIS-localization

2.3　極大独立集合と 0 次元化

続いて，MIS-localization は以下の命題の (2) により計算可能であることが知られている．

命題 6 (Proposition 4.3.1, [5])
I をイデアル，U を I の極大独立集合とする．

1. $IK(U)[X \setminus U]$ は $K(U)[X \setminus U]$ において 0 次元イデアルである．

2. $G = \{f_1, \ldots, f_s\}$ を $IK(U)[X \setminus U]$ のグレブナー基底で $G \subset I$ を満たすものとする．$h = \mathrm{lcm}(\mathrm{lc}(f_1), \ldots, \mathrm{lc}(f_s)) \in K(U)$ とすると，
$$IK(U)[X \setminus U] \cap K[X] = I : \langle h \rangle^\infty.$$
ただし，各 $\mathrm{lc}(f_i)$ は $K(U)[X \setminus U]$ における f_i の先頭係数である．

3. $\mathcal{Q}'$ を $IK(U)[X \setminus U]$ の最短準素イデアル分解とすると，$\{Q' \cap K[X] \mid Q' \in \mathcal{Q}'\}$ は $IK(U)[X \setminus U] \cap K[X]$ の最短準素イデアル分解となる.

命題 6 (1) より MIS-localization はイデアルを 0 次元化することが分かる．また，命題 6 (3) より MIS-localization は準素イデアル分解の計算に応用できることが分かる．

例 6
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle \subset K[x, y, z]$，$U = \{y, z\}$ とすると，$IK(U)[X \setminus U] = \langle x^2 \rangle$ は $K(U)[X \setminus U]$ において 0 次元イデアルである．また，$h = \mathrm{lcm}(\mathrm{lc}(x^4), \mathrm{lc}(x^3y), \mathrm{lc}(x^2yz)) = yz$ とすると，$I : h^\infty = \langle x^2 \rangle$ である．

例 7
$I = \langle (x^2 + y^2 - 1)z, x^3 + y^3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$，$U = \{z\}$ とすると，$I\mathbb{Q}(U)[X \setminus U] = \langle x^2 + y^2 - 1, x^3 + y^3 \rangle$ は $\mathbb{Q}(U)[X \setminus U]$ において 0 次元イデアルである．$J = I\mathbb{Q}(U)[X \setminus U] \cap \mathbb{Q}[X]$ とする．$G = \{x + 2y^5 - y^3 + y, 2y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1\}$ は辞書式順序 $y \prec x$ の J のグレブナー基底であり，1 変数多項式 $2y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$ が登場している．$2y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$ を因数分解すると，$2y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1 = (2y^2 - 1)(y^4 - y^2 + 1)$ である．この因数分解は J の準素イデアル分解

$$\begin{aligned} J &= (J + \langle 2y^2 - 1 \rangle) \cap (J + \langle y^4 - y^2 + 1 \rangle) \\ &= \langle 2y^5 - y^3 + x + y, 2y^2 - 1 \rangle \cap \langle 2y^5 - y^3 + x + y, y^4 - y^2 + 1 \rangle \end{aligned}$$

を与える．命題 *6 (3)* より，これはイデアル I の準素成分の一部となっている．このように，極大独立集合を用いることで，高次元のイデアルの準素分解を 0 次元のイデアル（さらには 1 変数の多項式の因数分解の問題）に帰着させることができる．厳密には，因数分解が必ずしも準素イデアル分解を与えるわけではなく，準素イデアルかどうかのチェックが必要である．また，完全な準素イデアル分解を得るためには *MIS-localization* を複数回行う必要がある．このように，準素イデアル分解の計算には，グレブナー基底や極大独立集合が応用されている．

準素イデアル分解の代表的なアルゴリズムとしては，Gianni-Trager-Zacharias アルゴリズム [4]，Eisenbud-Huneke-Vasconcelos アルゴリズム [3]，Shimoyama-Yokoyama アルゴリズム [9]，Noro-Kawazoe アルゴリズム [8] などが知られている．

3　MIS-localization と正則列

この節では MIS-localization の 1 つの応用である hull-primary イデアルの孤立準素成分の計算を説明する．また，別の計算方法として正則列を用いた手法を紹介する．

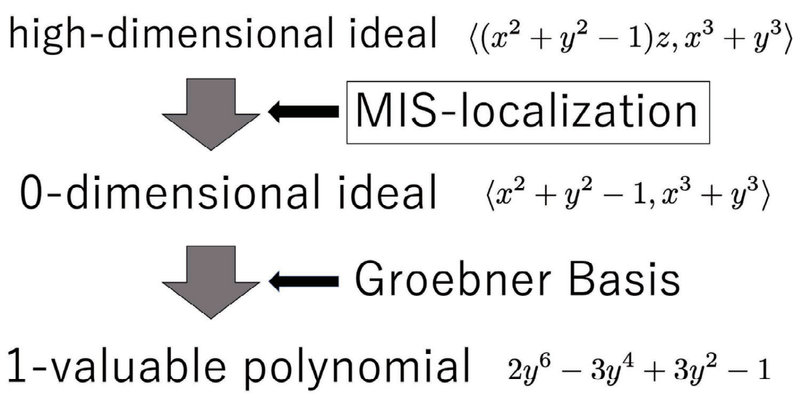

図 4: MIS-localization による 0 次元化

3.1 Equidimensional Hull と正則列

まず，equidimensional hull と呼ばれる局所化操作の一種を導入する．

定義 7 (Definition 11, [6])
I をイデアル，$\mathcal{Q}$ を I の最短準素イデアル分解，d を I のクルル次元とする．この時，I と同次元の準素成分の交わり $\bigcap_{Q\in\mathcal{Q},\dim(Q)=d} Q$ を I の **equidimensional hull** と呼び，$\mathrm{hull}(I)$ で表す．この $\mathrm{hull}(I)$ は $\mathcal{Q}$ に依らずに定義できる．

例 8
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz\rangle \subset K[x,y,z]$ の最短準素イデアル分解の 1 つは，$\mathcal{Q} = \{\langle x^2\rangle, \langle x^4, y\rangle, \langle x^3, z\rangle\}$ であり，$\dim(I) = 2$，$\dim\langle x^2\rangle = 2$，$\dim(\langle x^4, y\rangle) = \dim(\langle x^3, z\rangle) = 1$ であるから，

$$\mathrm{hull}(I) = \langle x^2\rangle$$

である．

equidimensional hull の計算のために正則列を以下で定義する．

定義 8 (Definition 7.6.1, [5])
列 $a_1, \ldots, a_r \in K[X]$ は次を満たす時，正則列と呼ばれる．

1. 各 i に対し，a_i は $K[X]/\langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle$ 上で零因子ではない，
2. $\langle a_1, \ldots, a_r\rangle \neq K[X]$.

例 9
$xy, y+1, yz$ は正則列である．一方，$xy, yz, y+1$ は正則列ではない．このように，正則列は順序に依存している．ネーター局所環においては正則列の順序を入れ替えても正則列であることが知られている．

正則列の判定は次のようにイデアル商を用いて行うことができる．

命題 9 (Proposition 2.9, [10])
I をイデアルとする．多項式 f が $K[X]/I$ 上で零因子でないことと， $I:\langle f\rangle = I$ であることは同値である．さらに， $a_1,\ldots,a_r \in K[X]$ が正則列であることと，

1. 各 i に対して，$\langle a_1,\ldots,a_{i-1}\rangle : \langle a_i\rangle = \langle a_1,\ldots,a_{i-1}\rangle$,
2. $\langle a_1,\ldots,a_r\rangle \neq K[X]$

は同値である．

例 10
$\langle xy, y+1, yz\rangle = \langle x, y+1, z\rangle \neq K[X]$ である．ここで，

- $\langle xy\rangle : \langle y+1\rangle = \langle xy\rangle$,
- $\langle xy, y+1\rangle : \langle yz\rangle = \langle xy, y+1\rangle$

であるから，$xy, y+1, yz$ は正則列である．一方，

$$\langle xy\rangle : \langle yz\rangle = \langle x\rangle$$

であるから，$xy, yz, y+1$ は正則列ではないことが分かる．

I の equidimensional hull は以下のように正則列と二重イデアル商を用いて計算することができる．

命題 10 (Proposition 3.41, [10])
I を余次元が c のイデアル，$u = \{a_1,\ldots,a_c\} \subset I$ を長さが c の正則列とする．この時，

$$\mathrm{hull}(I) = \langle u\rangle : (\langle u\rangle : I)$$

が成り立つ．

例 11
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz\rangle \subset K[x,y,z]$ とすると，x^4 は長さ 1 の正則列となる．ここで，イデアル I の余次元は 1 である．この時，$\langle x^4\rangle : I = \langle x^2\rangle$，$\langle x^4\rangle : \langle x^2\rangle = \langle x^2\rangle$ であるから，

$$\mathrm{hull}(I) = \langle x^4\rangle : (\langle x^4\rangle : \langle x^4, x^3y, x^2yz\rangle) = \langle x^2\rangle$$

となる．別の正則列 x^3y で計算しても，

$$\mathrm{hull}(I) = \langle x^3y\rangle : (\langle x^3y\rangle : \langle x^4, x^3y, x^2yz\rangle) = \langle x^3y\rangle : \langle xy\rangle = \langle x^2\rangle$$

となることが分かる．

3.2 Equidimensional Hull と極大独立集合

イデアルが I が hull-primary であるなら，MIS-localization で equidimensional hull を計算することもできる．ここで，hull-primary は以下のように定義される．

定義 11 (Definition 13, [6])
I をイデアルとする．$\mathrm{hull}(I)$ が準素イデアルである時，I を *hull-primary* イデアルと呼ぶ．また，$P = \sqrt{\mathrm{hull}(I)}$ とする時，*hull-primary* イデアル I を *P-hull-primary* と呼ぶ．

例 12
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle \subset K[x,y,z]$ とすると，$\mathrm{hull}(I) = \langle x^2 \rangle$ であるから，I は *hull-primary* である．一方，$J = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle \cap \langle x^2, y^2 \rangle$ は $\mathrm{hull}(J) = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ であるため，*hull-primary* イデアルではない．

イデアル I は $\sqrt{I}$ が素イデアルである時,（$\sqrt{I}$-）擬準素イデアルと呼ばれる（[9] の Definition 2.3）．擬準素イデアルは準素イデアルよりも弱く，hull-primary イデアルよりも強い概念である．

例 13
$\mathbb{Q}[x,y]$ において，$\langle x,y \rangle$ は素イデアルである．$\langle x^2, y \rangle$ は準素イデアルであるが，素イデアルではない．$\langle x^2, xy \rangle$ は $\sqrt{\langle x^2, xy \rangle} = \langle x, y \rangle$ であるから，擬準素イデアルである．しかし，$\langle x^2, xy \rangle = \langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle$ であるから準素イデアルではない．$\langle x(x-y), xy(y+1) \rangle$ は $\mathrm{hull}(\langle x(x-y), xy(y+1) \rangle) = \langle x \rangle$ であるから，$\langle x \rangle$*-hull-primary* イデアルである．しかし，$\sqrt{\langle x(x-y), xy(y+1) \rangle} = \langle x \rangle \cap \langle x+1, y+1 \rangle$ であるから，擬準素イデアルではない．以上の関係をまとめると図 5 になる．

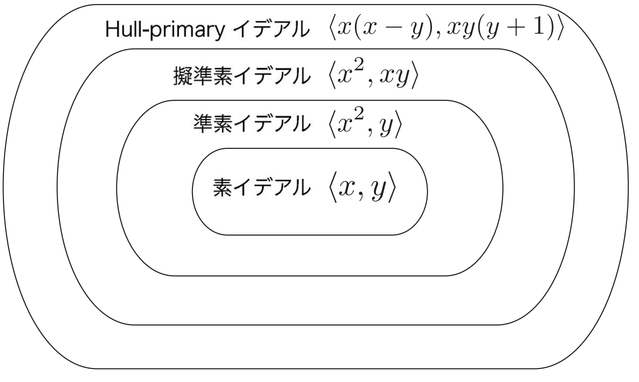

図 5: イデアルの概念の関係

I が P-擬準素イデアルの時，P に含まれる正則列から I に含まれる正則列を計算することもできる

命題 12 (Lemma 56, [7])
P を素イデアル，I を P-擬準素イデアル，$f_1, \ldots, f_c$ を P に含まれる正則列とする．この時， 十分大きな整数 $m_1, \ldots, m_c$ に対して，, $f_1^{m_1}, \ldots, f_c^{m_c}$ は I に含まれる正則列となる．

例 14
$I = \langle x^2, xy \rangle$，$P = \langle x \rangle$ とする．I は P-擬準素イデアルである．x は P に含まれる正則列であり，x^2 は I に含まれる正則列である．

hull-primary イデアルは孤立準素成分を複数持つ場合もあるが，イデアルと同じ次元の孤立準素成分は 1 つしか持たない．したがって，hull-primary イデアル I の極大独立集合 U による MIS-localization は I と同次元の準素成分，すなわち $\mathrm{hull}(I)$ と一致する．

命題 13 (Lemma 39, [6])
I を *hull-primary* イデアルとする．U を I の極大独立集合とする時，

$$\mathrm{hull}(I) = IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X].$$

例 15
$I = \langle x^4, x^3y, x^2yz \rangle \subset K[x,y,z]$，$U = \{y,z\}$ とする時，

$$IK[X]_{K[U]^\times} \cap K[X] = \langle x^2 \rangle = \mathrm{hull}(I).$$

注意 2
I が *P-hull-primary* である時，P の極大独立集合は I の極大独立集合でもある．

3.3 Equidimensional Hull の応用

擬準素イデアルの例として，二重飽和イデアルが挙げられる．イデアル I とその孤立素因子 P に対して，$I : (I : P^\infty)^\infty$ は P-擬準素イデアルとなり，その equidimensional hull は I の P-孤立準素成分と一致する．

命題 14 (Theorem 36, [6])
I をイデアル，P を I の孤立素因子とする．この時，

$$\mathrm{hull}(I : (I : P^\infty)^\infty)$$

は P の孤立準素成分と等しい．

例 16
$I = \langle x\rangle\cap\langle x^2, y\rangle\cap\langle y+1\rangle$，$P = \langle x\rangle$ とする時，$I : (I : P^\infty)^\infty = \langle x\rangle\cap\langle x^2, y\rangle$ であり，$\mathrm{hull}(I : (I : P^\infty)^\infty) = \langle x\rangle$ が成り立つ．

イデアル I とその素因子 P に対し，$I + P^m$ は擬準素イデアルになる（m は自然数）．さらに，m が十分大きい時，$\mathrm{hull}(I + P^m)$ は I の P-準素成分となる．

命題 15 (Section 4, [3])
I をイデアル，P をその素因子とする．十分大きな m に対し，$\mathrm{hull}(I + P^m)$ は I の P-準素成分である．

例 17
$I = \langle x\rangle \cap \langle x^2, y\rangle \cap \langle y + 1\rangle$，$P = \langle x, y\rangle$ とする時，$\mathrm{hull}(I + P^2) = \langle x^2, xy, y^2\rangle$ であり，これは I の埋没 P-準素成分である．

以上のように，特定の準素成分の計算に equidimensional hull を利用することができる．そして，その equidimensional hull の計算には，極大独立集合，正則列どちらも用いることができる．論文 [7] においては数式処理ソフトウェア Risa/Asir 上で実装した P-準素成分計算アルゴリズム”Local Primary Algorithm(LPA)” の計算時間を，極大独立集合または正則列を用いた場合にそれぞれ比較している．そこでは，極大独立集合を用いた LPA は，ほとんどの例で正則列を用いた LPA より高速に計算できているが，一部の例においては後者より多くの時間を要していた．一方，正則列は 1 つのイデアルの素因子ごとの計算時間のブレが小さく安定的といえるようであった．

注意 3
イデアル I とその素因子 P に対して，P の極大独立集合 U で I を局所化することも可能である．その場合，命題 5 と同様に I の準素成分のうち U を独立集合として持つもの全体の共通部分とその局所化は一致する．この利点としては P-準素成分を計算の際に，イデアルから余分な情報を取り除くことができる点がある．

4　まとめ

極大独立集合による局所化は計算機代数において基本的な操作の 1 つであり，準素イデアル分解などに応用されている．equidimensional hull は一般に正則列を用いて計算できるが，イデアル I が特殊なイデアル（hull-primary イデアル）である時，極大独立集合を用いて equidimensional hull を計算することが可能である．equidimensional hull の計算は準素成分の計算にも応用することができる．

参　考　文　献

[1] Atiyah, M.F., MacDonald, I.G.: Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Series in Mathematics, Avalon Publishing, New York (1994)

[2] Becker, T., Weispfenning, V.: Gröbner Basis: A Computational Approach to Commutative Algebra. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (1993)

[3] Eisenbud, D., Huneke, C., Vasconcelos, W.: Direct methods for primary decomposition. Inventi. Math., **110** (1), 207-235 (1992)

[4] Gianni, P., Trager, B., Zacharias, G.: Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals. J. Symb. Comput., **6** (2), 149-167 (1988)

[5] Greuel, G.-M., Pfister, G.: A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer, Heidelberg (2002)

[6] Ishihara, Y., Yokoyama, K.: Effective Localization Using Double Ideal Quotient and Its Implementation. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham. vol 11077, 272-287 (2018)

[7] Ishihara, Y., Yokoyama, K.: Computation of a primary component of an ideal from its associated prime by effective localization. Communications of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, **4**, Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, 1-31 (2020)

[8] Kawazoe, T., Noro, M.: Algorithms for computing a primary ideal decomposition without producing intermediate redundant components. J. Symb. Comput., **46** (10), 1158-1172 (2011)

[9] Shimoyama, T., Yokoyama, K.: Localization and primary decomposition of polynomial ideals. J. Symb. Comput., **22** (3), 247-277 (1996)

[10] Vasconcelos, W.: Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Heidelberg (2004)