

# 深リーマン予想を用いた 「チェビシェフの偏り」の解明と一般化

東洋大学理工学部 小山信也  
Shin-ya Koyama  
Faculty of Science and Engineering  
Toyo University

## 1 研究のきっかけ

本研究は、2020年から2021年にかけて著した以下の2冊の啓蒙書に端を発している。

- [1] 小山信也 「数学の力～高校数学で読みとくりーマン予想」（日経サイエンス社）2020年7月。
- [2] 小山信也 『『数学をする』ってどういうこと?』（技術評論社）2021年5月。

[1]は高校数学と銘打っており、また、[2]は漫画をあしらった表紙であることから、これらの2冊は専門家には無縁と思われるが、私は文献[K]でも述べたように、初心者向けの本にも必ず新奇の着想を反映させるように努めている。そうした意味で、むしろ数学関係者にこそ、これらの本を手にとって頂くことを強く願っている。



図 1: 「数学の力」と『『数学をする』ってどういうこと?』

[1] は「深リーマン予想」の解説書である。副題の「高校数学」は「複素関数論を用いない」という意味である。従来のリーマン予想と異なり、深リーマン予想は中心点におけるオイラー積の収束のみで記述できる。すなわち、整関数であるような  $L$  関数に対し、

中心点  $s = \frac{1}{2}$  においてオイラー積が収束し、 $L$  関数の値を表す

が深リーマン予想である。4 を法とするディリクレ指標  $\chi(p) = (-1)^{(p-1)/2}$  ( $p$  は奇素数) を例に説明する。ディリクレ  $L$  関数

$$L(s, \chi) = \prod_{p: \text{奇素数}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

の深リーマン予想は、極限值

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{p \leq x: \text{奇素数}} (1 - \chi(p)p^{-\frac{1}{2}})^{-1}$$

が存在して非零となることを主張する。もし深リーマン予想が正しければ、この式の対数が有界であるから、

$$\sum_{p \leq x: \text{奇素数}} \log (1 - \chi(p)p^{-\frac{1}{2}})^{-1} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

が成り立つが、ここで  $\log$  をテイラー展開した

$$\sum_{p \leq x} \log \left( 1 - \frac{\chi(p)}{p^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} = \sum_{p \leq x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^k}{kp^{\frac{k}{2}}}$$

のうち、 $k \geq 3$  にわたる和は、リーマンゼータ関数  $\zeta(s)$  を用いた評価

$$\sum_{p \leq x} \sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{\chi(p)^k}{kp^{\frac{k}{2}}} \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{p \leq x} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{p^{\frac{k}{2}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \zeta(3/2)$$

により、 $x \rightarrow \infty$  で絶対収束する。一方、 $k=2$  の部分は、オイラーの定理より次式で評価できる。

$$\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)^2}{2p} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{2p} = \frac{1}{2} \log \log x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

よって、残った  $k=1$  の部分は次式を満たす。

$$\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{2} \log \log x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (1)$$

文献 [1] では、(1) の左辺の値を  $r$  とおき、

$$r = \sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{\sqrt{p}}$$

のグラフを 100 億以下の  $x$  に対して描いた。これが、図 2 の下側の曲線である。

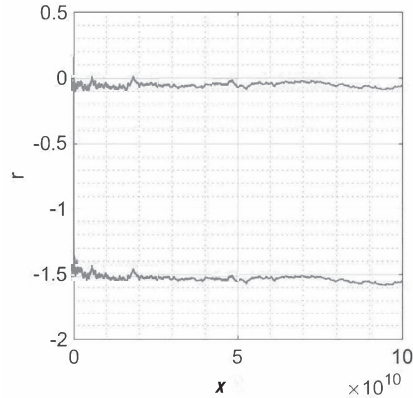


図 2: 補正項の有無による挙動の比較 (「数学の力」図 3.7 より)

一方、(1)において右辺第一項を移項した

$$r = \sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{\sqrt{p}} + \frac{1}{2} \log \log x$$

が上側の曲線である。2つのグラフは一見すると平行にも見えるが、よく見ると下側の曲線が微妙に右下がりになっている。これは [1] で「補正項」と呼んだ  $\frac{1}{2} \log \log x$  の影響である。

[1] の執筆時、私はこの補正項の意義がわからなかった。深リーマン予想を説明する際に「(1) が収束」と明言できれば簡単だが、「収束に近い程度の大人しい挙動」としか言えなかったため、歯がゆい思いをしたのである。

翌年、私はこの問題を [2] の執筆時にも引きずっていた。[2] p.240 において私は、4 で割って 1、3 余る素数のうち、 $x$  以下で最大のものをそれぞれ  $P, Q$  とした上で、(1) の左辺を

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{29}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{P}}}_{\text{「4 で割って 1 余る素数」にわたる和}} - \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{19}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{Q}} \right)}_{\text{「4 で割って 3 余る素数」にわたる和}}$$

と表し「この式の挙動に注目することが重要である」と説いた。そこでも「収束する」とか「有界である」などと言えれば明快な説明となったのだが、「非常に緩やかに発散する」という現象をどう捉えてよいかわからず、歯切れの悪い説明となったのだった。

## 2 チェビシエフの偏りとは

「チェビシエフの偏り」とは、「4で割って3余る素数」が「4で割って1余る素数」に比べて多く存在するよう見える現象であり、19世紀以来の未解決問題である。自然数  $q$  に対し、 $p \equiv a \pmod{q}$  なる  $x$  以下の素数  $p$  の個数を  $\pi(x; q, a)$  とおくと、 $x < 26861$  に対して不等式

$$\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1) \geq 0 \quad (2)$$

が成立し、この区間で等号が成り立つ素数  $x$  は4個のみである。そして、素数  $x = 26861$  で初めて逆側の不等号「 $<$ 」が成り立つものの、次の素数で再び等号が成立し、以後、616841までこの不等式が成り立つ。それ以降も大多数の  $x$  においてこの不等式が成り立つことが、数値計算により確かめられている。

しかしながら、個数関数の差  $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)$  は無限回符号を変えることが、Littlewood [L] により証明されている。また、正の実数全体に占める集合

$$A = \{x > 0 \mid \pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1) > 0\}$$

の割合（自然密度） $\mu(A)$  が1であろうとの予想（Knapowski-Turan の予想）が誤りであること、すなわち、極限值

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \mu(A \cap [2, X])$$

が存在しないことが、一般リーマン予想の下で示されている。したがって、チェビシエフの偏りを解明することは、個数関数の差を直接扱うだけではなし得ない。別の工夫が必要である。

ディリクレ素数定理（算術級数定理）により、 $(q, a) = 1$  なる任意の  $a \in \mathbb{Z}$  に対し

$$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \text{Li}(x) + (\text{誤差項}) \quad (\varphi(q) := \#(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)$$

であり、誤差項はディリクレ  $L$  関数  $L(s, \chi)$  ( $\chi$  は  $q$  を法とするディリクレ指標) の零点で表される。個数関数の差をとれば主要項は消え、誤差項のみの差となるので、この問題は必然的にゼータ関数の零点と関わっており、先行研究は、リーマン予想を含む複数の予想の仮定の上で行われてきた。その中で、Rubinstein-Sarnak [RS] による対数密度を用いた方法が標準的とされる。彼らは、集合  $A$  の対数密度

$$\delta(A) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{\log X} \int_{t \in A \cap [2, X]} \frac{dt}{t}$$

が収束し、 $\delta(A) = 0.9959\dots$  となることを示した。だが「チェビシエフの偏り」という現象が発生する真の理由が解明されたとは言いがたい。また、偏りの大きさ（差の値の評価）も未解明である。

私はこのたび、オイラー積の挙動に関する「深リーマン予想」の発想により、「チェビシェフの偏り」が素数全体のバランスを取る自然な現象であることを解明し、偏りの大きさがある漸近式で表すことに成功した。証明は単純明快であり、[RS]による複雑な考察の大幅な簡略化であるとともに、広範な  $L$  関数に拡張可能なものである。今回、青木美穂氏（島根大学）との共同研究 [AK] により、この結果を一般の法  $q$  に関する素数の偏りや、大域体の素イデアルの偏りに拡張することに成功した。

### 3 主なアイデア

4で割ったときに「3余る素数」と「1余る素数」の個数がディリクレ素数定理によって同程度である以上、「多く存在するように見える」とは「早めに出現している」ことを意味すると思われる。たとえば、最初の100個の素数のうち、仮に前半の50個が「3余る素数」、後半が「1余る素数」であれば、総数が等しくてもこの区間で常に  $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1) \geq 0$  が成り立ち、差の値は最大50になる。一方、「3余る素数」と「1余る素数」が交互に出現した場合、同じ不等式が成り立っても、差の値が最大1という状況もあり得る。

以上の考察から、チェビシェフの偏りの解明には、素数の大きさを反映させ「小さな素数ほど重くみなす」仕組みが有効である。そこで、個数関数を一般化した関数

$$\pi_s(x; q, a) = \sum_{\substack{p < x: \text{素数} \\ p \equiv a \pmod{q}}} p^{-s} \quad (s \geq 0)$$

を導入する。  $\pi_0(x; q, a) = \pi(x; q, a)$  である。私は、深リーマン予想の下で、(1)より以下を得た。

$$\pi_{\frac{1}{2}}(x; 4, 3) - \pi_{\frac{1}{2}}(x; 4, 1) = \frac{1}{2} \log \log x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (3)$$

漸近式(3)は、個数関数において各素数に対してカウントしていた「1」を「素数の平方根の逆数」に代えることにより、「3余る素数」と「1余る素数」の差の評価を表したものである。「素数の平方根の逆数」は、素数が小さいほど大きいので、早く出現する素数ほど重く算入されている。これによって、素数の出現のタイミングの偏りを測ることができる。したがって、漸近式(3)が偏りを表すと考えられる。

そこで、「チェビシェフの偏り」を以下のように定義する。

**定義 3.1.** 大域体  $K$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  上の実数列  $a(\mathfrak{p}) \in \mathbb{R}$  が

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{\mathfrak{p} \mid a(\mathfrak{p}) > 0, N(\mathfrak{p}) \leq x\}}{\#\{\mathfrak{p} \mid a(\mathfrak{p}) < 0, N(\mathfrak{p}) \leq x\}} = 1$$

を満たしているとする。「 $a(\mathfrak{p})$  が正値へのチェビシェフの偏りを持つ」あるいは「 $a(\mathfrak{p})$  に関して正値へのチェビシェフの偏りが存在する」とは、ある  $C > 0$  が存在して漸近式

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \frac{a(\mathfrak{p})}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} \sim C \log \log x \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと定義する. ただし,  $\mathfrak{p}$  は  $K$  の素イデアルをわたる. また, 「負値へのチェビシエフの偏り」とは,  $-a(\mathfrak{p})$  に関する正值へのチェビシエフの偏りと定義する. そして, 「 $a(\mathfrak{p})$  が偏りを持たない」とは,

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \frac{a(\mathfrak{p})}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと定義する.

**定義 3.2.** 大域体  $K$  の素イデアル  $\mathfrak{p}$  で  $N(\mathfrak{p}) \leq x$  なるものの全体からなる集合が, 共通部分を持たない2つの集合の合併として  $P_1(x) \cup P_2(x)$  と表され, 濃度の比率が

$$\delta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|P_1(x)|}{|P_2(x)|}$$

を満たしているとする. 「 $P_1$  へのチェビシエフの偏りが存在する」とは, ある  $C > 0$  に対して漸近式

$$\sum_{p \in P_1(x)} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} - \delta \sum_{p \in P_2(x)} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} \sim C \log \log x \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと定義する. また 「 $P_1$  と  $P_2$  の間に偏りが存在しない」とは,

$$\sum_{p \in P_1(x)} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} - \delta \sum_{p \in P_2(x)} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと定義する.

なお, ここで, 平方根を用いることには理由がある.  $s > \frac{1}{2}$  のとき, 深リーマン予想の下で

$$\pi_s(x; 4, 3) - \pi_s(x; 4, 1) = O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

となり,  $s = \frac{1}{2}$  において初めて差が現れるからである (なお,  $s < \frac{1}{2}$  ではこの左辺は振動して発散すると考えられ, そのうち  $s = 0$  の場合が Littlewood の定理となる). 一般に,  $s$  が大きすぎると各素数に対するカウントが小さ過ぎて自明な結果しか得られず, 逆に  $s$  が小さすぎると, 大きさという個性を無視して素数を一様に扱うことになり, 偏りを検出できない. その境界  $s = \frac{1}{2}$  において, チェビシエフの偏りが現れるのである.

集合  $A_s = \{x > 0 \mid \pi_s(x; 4, 3) - \pi_s(x; 4, 1) > 0\}$  の自然密度は,  $s = 0$  のときに存在しなかったわけだが, (3) によれば,  $s = \frac{1}{2}$  のとき自然密度は存在して1となることがわかる. すなわち, 次式が成り立つ.

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_{t \in A_{1/2} \cap [2, X]} dt = 1.$$

## 4 深リーマン予想

大域体  $K$  に対し、

$$\rho: \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \quad (\rho \neq \mathbf{1})$$

を非自明な  $n$  次元既約表現とし、 $L$  関数  $L_K(s, \rho)$  を以下のオイラー積によって定義する.

$$L_K(s, \rho) = \prod_{\mathfrak{p}} \det(1 - N(\mathfrak{p})^{-s} \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}|V^{I_{\mathfrak{p}}}))^{-1} \quad (\Re(s) > 1).$$

ただし、 $\mathfrak{p}$  は  $K$  の素イデアルをわたり、 $N(\mathfrak{p})$  をノルムとする。また、 $\text{Frob}_{\mathfrak{p}} \in \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$  はフロベニウス元、 $I_{\mathfrak{p}}$  は惰性群である。

**予想 4.1** (深リーマン予想 (DRH)).  $m = m_{\rho} = \text{ord}_{s=\frac{1}{2}} L_K(s, \rho)$  とおく。このとき、極限值

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (\log x)^m \prod_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \det(1 - \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}|V^{I_{\mathfrak{p}}})N(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})^{-1} \right) \quad (4)$$

が、以下を満たす。

**DRH(A)** 極限值 (4) は存在して非零である。

**DRH(B)** 極限值 (4) は次式を満たす。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (\log x)^m \prod_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \det(1 - \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}|V^{I_{\mathfrak{p}}})N(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})^{-1} \right) = \frac{\sqrt{2}^{\nu(\rho)} L_K^{(m)}(1/2, \rho)}{e^{m\gamma} m!}.$$

ただし、 $\nu(\rho) = \text{mult}(\mathbf{1}, \text{sym}^2 \rho) - \text{mult}(\mathbf{1}, \wedge^2 \rho) \in \mathbb{Z}$  であり、 $\text{mult}(\mathbf{1}, \sigma)$  は  $\sigma$  における自明表現  $\mathbf{1}$  の重複度を表す。

自明に、 $\text{DRH(B)} \implies \text{DRH(A)}$  である。また、 $m > 0$  すなわち  $L_K(1/2, \rho) = 0$  のとき、 $\text{DRH(A)}$  が成り立てば

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \det(1 - \rho(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}|V^{I_{\mathfrak{p}}})N(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})^{-1} = L_K(1/2, \rho) = 0$$

となるので、いずれにしてもオイラー積が  $L$  関数の値を表している。DRH の正否は組  $(K, \rho)$  によるので、DRH を仮定する際にはどの  $(K, \rho)$  に対する仮定であるかを明記する。本稿では  $K$  を固定するため、しばしば「 $L_K(s, \rho)$  に対する DRH」を略して「 $\rho$  に対する DRH」という。

予想 4.1 (DRH) の起源は、有名な Birch・Swinnerton-Dyer 予想 [BSD, p.79 (A)] である。彼らは楕円曲線  $E/\mathbb{Q}$  に付随する表現  $\rho_E$  に対し、 $L_{\mathbb{Q}}(s, \rho_E)$  のオイラー積が中心点で収束し、その値が非零であり、かつ、その挙動が  $C(\log x)^g$  (ただし、 $g = \text{rank}(E)$ ) とな

ることを予想した. Goldfeld [G] は、彼らの予想が成り立てば  $L_{\mathbb{Q}}(s, \rho_E)$  の GRH が成り立つこと、そして、 $g = m$  となることを示した. また、Conrad [C, Theorem 3.3, Theorem 6.3] により、DRH が成り立てばオイラー積は  $\Re(s) \geq 1/2$  で収束し、 $L_K(s, \rho)$  はリーマン予想 (GRH) を満たすことが示された.

[KKK] では、一千万以下の素数にわたる有限オイラー積の挙動を数値計算することにより、予想 4.1 をディリクレ  $L$  関数に対して検証している. さらに、本稿の冒頭に掲げた啓蒙書 [1] では、素数の範囲を百億以下に広げ、より広範なディリクレ  $L$  関数に対して検証している.

なお、 $\text{char}(K) > 0$  においては予想 4.1 (DRH) が成り立つことが [KKK2] によって証明されている. したがって、次節で述べる主定理や例における同値条件のうち、標数正においては (i) は成り立つので、これらの定理は、(ii) が仮定なしで証明できていることを意味している.

## 5 主定理

青木氏との共著論文 [AK] において得た結果を抜粋して述べる.

$L/K$  を大域体の有限次ガロア拡大とする.  $S$  を  $K$  の素イデアル全体の集合、その部分集合  $S_\sigma$  を、フロベニウス元  $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$  が  $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$  であるような不分岐な素イデアルの集合とする.

**定理 5.1** ([AK] Theorem 2.2 の一部).  $L/K$  を大域体のガロア拡大とすると、以下の (i) (ii) は同値である.

- (i)  $\text{Gal}(L/K)$  の任意の非自明既約表現に対し、 $\text{DRH}(A)$  が成り立つ.
- (ii) 任意の  $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$  に対し、定数  $C$  と  $c$  が存在して、次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in S \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} - \frac{[L:K]}{|c_\sigma|} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in S_\sigma \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} = C \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ここで、定数  $C$  は予想 4.1 の  $\nu(\rho)$  および  $m_\rho$  によって表される. (i) の下でこれらの定数をいろいろな場合に計算することにより、チェビシエフの偏りの様々な実例を得られる.

なお、定理 5.1 が同値の形で書かれていることから、チェビシエフの偏りはリーマン予想だけでは解明できない問題であることがわかる. 深リーマン予想は、リーマン予想よりも真に強い命題だからである. このことは、当初、私が本研究のアイデアを公表した際、一部の識者 (査読者) の方にご理解頂けなかった. それは 2 つの根拠から成っていた. 一つは「リーマン予想だけでもチェビシエフの偏りをある程度解明できるのに、わざわざ深リーマン予想まで仮定することに意味があるのか」というものであり、もう一つは「テ



イラー展開のような基本的な理論しか用いていない研究に価値があるのか」というものであった。しかし、チェビシェフの偏りが通常のリーマン予想から解明できないことは、Rubinstein と Sarnak が先行研究において、一般リーマン予想に加えて「非自明零点の虚部の線形独立性」という強い仮定を設けていることから、明らかである。さらに、深リーマン予想から基本的な議論のみでチェビシェフの偏りが解明できる事実は、深リーマン予想が本質を突いた予想であることの証拠であり、むしろ本研究の価値を高めているといえる。

この状況を、図を用いてより明快に説明する。図 1 は、 $L$  関数が整関数<sup>1</sup>である場合を扱っている。図 1 において、一般リーマン予想 (GRH) を単に「リーマン予想」(RH) と呼んでいる。ここでは、「深」か「普通」かに注目しているためである。まず、図の左上の RH を、その右隣の命題「 $\frac{1}{2} < \Re(s) < 1$  におけるオイラー積 (Euler Product, EP) の収束」と言い換える。この言い換えは同値ではないが、オイラー積が収束すればその値は (無限積の収束の定義により) 非零であるから「右から左」は従う。この収束域を  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  まで広げた命題が中央の DRH(A) である。本研究は、チェビシェフの偏り (Chebyshev's Bias) と DRH(A) の同値性を主題としている (中段)。これらは、深リーマン予想 DRH(B) より弱いものの、従来のリーマン予想よりも強いのである。

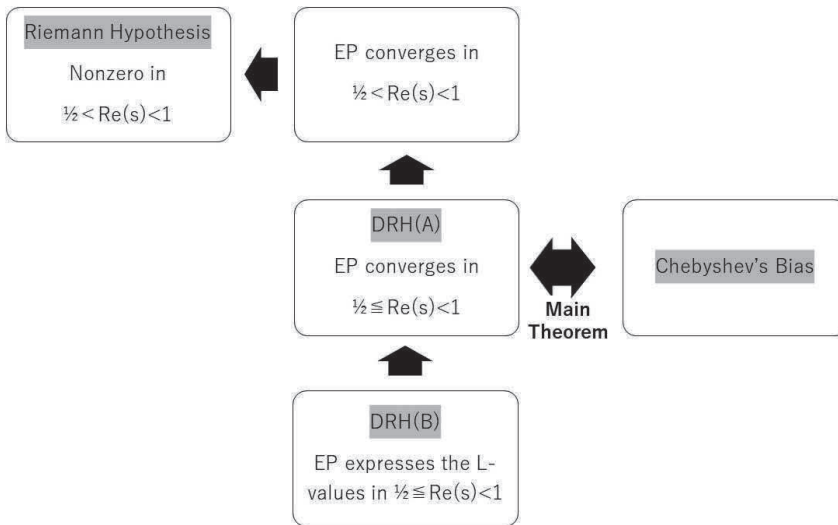


図 3: 深リーマン予想 (DRH) とチェビシェフの偏りの関係 ( $L$  関数が整関数の場合)

定理 5.1 から得られる事実の例を挙げる。

例 5.1 (完全分解しない素イデアルへの偏り ([AK] Example 3.3)).  $[L : K] = 2$  とし、 $\text{Gal}(L/K)$  の非自明な指標を  $\chi$  とする。次の (i) (ii) は同値である。

<sup>1</sup>整関数でない場合、すなわち  $s = 1$  で極を持つ場合は、赤塚 [A] による修正が必要である。

- (i)  $L_K(s, \chi)$  に対し、DRH(A) が成り立つ。
- (ii) 完全分解しない素イデアルへの「チェビシェフの偏り」が、以下の漸近式によって存在する。

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}: \text{nonsplit} \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} - \sum_{\substack{\mathfrak{p}: \text{split} \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} = \left(\frac{1}{2} + m_\chi\right) \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし、nonsplit, split はそれぞれ、完全分解しない素イデアル、完全分解する素イデアルにわたる和を表し、 $c$  は定数とする。

次の例では  $\varphi(q)$  をオイラー関数とし、 $t(q)$  を  $q$  の異なる素因数の個数、

$$t := \begin{cases} t(q) - 1 & (2 \parallel q), \\ t(q) & (4 \parallel q \text{ または } 2 \nmid q), \\ t(q) + 1 & (8 \parallel q) \end{cases}$$

とする。

**例 5.2** (平方非剰余な素数への偏り ([AK] Corollary 3.2)).  $q$  を正の整数とする。  $q$  を法とする任意のディリクレ指標  $\chi$  に対し、 $L(\frac{1}{2}, \chi) \neq 0$  を仮定する。このとき、次の (i) (ii) は同値である。

- (i)  $q$  を法とする任意のディリクレ指標  $\chi$  に対し、 $L(s, \chi)$  が DRH(A) を満たす。
- (ii)  $q$  を法とする平方非剰余な素数への「チェビシェフの偏り」が、以下の漸近式によって存在する。

$$\pi_{\frac{1}{2}}(x; q, b) - \pi_{\frac{1}{2}}(x; q, a) = \frac{2^{t-1}}{\varphi(q)} \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし、 $c$  は定数であり、組  $(a, b)$  は任意の平方剰余な  $a$  と、平方非剰余な  $b$  からなる組である。さらに、平方剰余どうし、平方非剰余どうしの組  $(a, b)$  については、偏りが存在しない。

**例 5.3** (単項でない素イデアルへの偏り ([AK] Corollary 3.5)).  $\tilde{K}$  を  $K$  のヒルベルト類体とする。イデアル類群は  $\text{Cl}_K \simeq \text{Gal}(\tilde{K}/K)$  と表される。イデアル類  $[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}_K$  はガロア群の元  $\sigma_{\mathfrak{a}} := \left(\frac{\tilde{K}/K}{\mathfrak{a}}\right) \in \text{Gal}(\tilde{K}/K)$  に対応する。  $\text{Cl}_K$  の任意の指標  $\chi$  に対し、 $L_K(s, \chi)$  が DRH(A) と  $L_K(\frac{1}{2}, \chi) \neq 0$  をともに満たすと仮定する。  $|\text{Cl}_K|$  が偶数であるとき、  $K$

の素イデアルの集合の中で、単項で無い素イデアルへのチェビシェフの偏りが存在する。すなわち、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p: \text{nonprincipal} \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} - (h_K - 1) \sum_{\substack{p: \text{principal} \\ N(\mathfrak{p}) \leq x}} \frac{1}{\sqrt{N(\mathfrak{p})}} \\ = \frac{|\text{Cl}_K / \text{Cl}_K^2| - 1}{2} \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ただし  $h_K = |\text{Cl}_K|$  である。

## 6 他の一般化

### 6.1 保型 $L$ 関数

$\tau(n)$  をラマヌジャンの関数、すなわち

$$\Delta(z) = q \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n \quad (q = e^{2\pi iz})$$

とする。小山・黒川により、 $\tau(p)$  ( $p$  は素数) の符号に関する偏りが、以下のように示された。

**定理 6.1** ([KK2] Theorem 2).  $L(s + \frac{11}{2}, \Delta)$  に対し DRH(A) を仮定する。数列  $a(p) = \tau(p)p^{-11/2}$  は、次式で表されるような正値へのチェビシェフの偏りを持つ。

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \text{素数}}} \frac{\tau(p)}{p^6} = \frac{1}{2} \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし、 $c$  は定数である。

ここで、ラマヌジャンの  $L$  関数を次式で定義している。

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \quad (\Re(s) > \frac{13}{2}).$$

定理 6.1 は、佐武パラメータ  $\theta(p) \in [0, \pi]$  の偏りが  $[0, \pi/2]$  にあることを表している。ただし、 $\theta(p)$  は  $\tau(p) = 2p^{\frac{11}{2}} \cos(\theta(p))$  で定義される。この方法により、一般の  $GL(n)$  の保型形式に対して佐武パラメータの偏りを得ることができる。たとえば  $GL(3)$  の例として、 $L(s, \Delta)$  の 2 乗対称冪の  $L$  関数に対して DRH(A) を仮定すると、素数の平方上の数列に関する「負値へのチェビシェフの偏り」の存在が示せる。すなわち、

$$\sum_{p \leq x} \frac{\tau(p^2)}{p^{\frac{23}{2}}} = -\frac{1}{2} \log \log x + c + o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし、 $c$  は定数である。

## 6.2 楕円曲線の $L$ 関数

$E$  を  $K$  上の楕円曲線とする.  $K$  の素点  $v$  に対して剰余体  $k_v$  の位数を  $q_v$  とおき、

$$a_v = a_v(E) = q_v + 1 - \#E_v^{\text{ns}}(k_v)$$

とおく.  $\theta_v \in [0, \pi]$  を  $a_v = 2q_v^{\frac{1}{2}} \cos(\theta_v)$  によって定義する.  $L$  関数

$$L(s, M_E) = \prod_{v: \text{good}} (1 - 2\cos(\theta_v)q_v^{-s} + q_v^{-2s})^{-1} \prod_{v: \text{bad}} (1 - a_v q_v^{-s})^{-1}$$

は  $s \leftrightarrow 1 - s$  で関数等式を持つ.

素数  $\ell$  と大域体  $K$  を、 $\ell \neq \text{char}(K)$  となるように固定すると、表現

$$\rho_E : \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow \text{Aut}(T_\ell(E) \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

がある. ただし、 $T_\ell(E) = \varprojlim_n E[\ell^n]$  は  $E/K$  の  $\ell$  進 Tate 加群である.  $L(s, M_E) = L_K(s, \rho_E)$  である.  $\rho_E$  が既約表現であるとき、先ほどと同様の議論により、 $L_K(s, \rho_E)$  の DRH(A) から数列  $a_v/\sqrt{q_v}$  の偏りが示せる. Ulmer [U] により、 $\text{char}(K) > 0$  で、かつ  $E$  が非定数型であるとき、 $\rho_E$  が既約表現になることが知られている. この結果を用い、金子・小山は次の定理を得た.

**定理 6.2** (金子・小山).  $\text{char}(K) > 0$  であり、かつ  $E$  が非定数型の楕円曲線であると仮定する.  $\text{rank}(K) > 0$  ならば、 $a_v/\sqrt{q_v}$  は次式で表されるような負値へのチェビシエフの偏りを持つ.

$$\sum_{q_v \leq x} \frac{a_v}{q_v} = C \log \log x + O(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ただし  $C = \frac{1}{2} - \text{rank}(K)$  である.

証明は、[KKK2] で示されている標数正の DRH と、Ulmer [U] によって示されている標数正の Birch・Swinnerton-Dyer 予想を用いる.

## 6.3 セルバーグ・ゼータ関数

セルバーグ・ゼータ関数に対する DRH は、標数正においては、[KS] で  $PGL(2, \mathbb{F}_q[T])$  の合同部分群の場合に証明されている. これを用いると、ラマヌジャン・グラフの被覆があるとき、素な閉軌道のうち、被覆から来るものとそれ以外のもの間に生ずる偏りが示される.

一方、標数 0 における DRH は未解決である. [KK] では、セルバーグ・ゼータ関数の非零領域においてオイラー積が収束することが証明されているが、境界上に収束域を伸ばせるかどうかはわかっていない. もしこれができれば、リーマン面の被覆があるときに、素測地線のうち、被覆から来るものとそれ以外のもの間に生ずる偏りが示される.

## 参考文献

- [A] H. Akatsuka. The Euler product for the Riemann zeta-function in the critical strip. *Kodai. Math. J.* **40** (2017) 79-101.
- [AK] M. Aoki and S. Koyama: Chebyshev's Bias against splitting and principal primes in global fields. (preprint) <https://arxiv.org/abs/2203.12266>
- [BSD] B.J. Birch and H.P.F. Swinnerton-Dyer: Notes on elliptic curves. II. *J. reine angew. Math.*, **218** (1965) 79-108.
- [C] K. Conrad: Partial Euler products on the critical line. *Canad. J. Math.* **57** (2005) 267-297.
- [G] D. Goldfeld: Sur les produits partiels eulériens attachés aux courbes elliptiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **294** (1982) 471-474.
- [K] 小山信也: 「リーマン予想」から「数学者殺人事件」まで. (数学セミナー 2022年5月号「特集: 数学と歩んできた道」) 日本評論社.
- [KK] I. Kaneko and S. Koyama: Euler products of Selberg zeta functions in the critical strip. *Ramanujan Journal*. (In Press)
- [KK2] S. Koyama and N. Kurokawa: Chebyshev's Bias for Ramanujan's  $\tau$ -function via the Deep Riemann Hypothesis. *Proc. Japan Acad* (to appear).
- [KKK] T. Kimura, S. Koyama and N. Kurokawa: Euler products beyond the boundary. *Letters in Math. Phys.* **104** (2014) 1-19.
- [KKK2] I. Kaneko, S. Koyama and N. Kurokawa: Toward the deep Riemann hypothesis for  $GL_n$  (preprint).
- [KS] S. Koyama and F. Suzuki: Euler products beyond the boundary for Selberg zeta functions. *Proc. Japan Acad.* **90A** (2014) 101-106.
- [L] J. E. Littlewood: Distribution des Nombres Premiers. *C. R. Acad. Sci. Paris* **158** (1914) 1869-1872.
- [RS] M. Rubinstein and P. Sarnak: Chebyshev's bias. *Exp. Math.* **3** (1994) 173-197.
- [U] D. Ulmer. Elliptic curves over function fields, Arithmetic of  $L$ -functions. IAS/Park City Math. Ser., vol. 18: Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 211-280.