捻り三重積 p 進 L 関数の例外零点

大阪公立大学 山名 俊介
Shunsuke Yamana
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka Metropolitan University

1. 導入

E を有理数体上の楕円曲線とする. E の Hasse–Weil L 関数 $\Lambda(s,E)$ は, 関数等式

$$\Lambda(s,E)=\varepsilon\Lambda(2-s,E)$$

を満たす. 符号 ε は E の Mordell-Weil 階数の偶奇に一致すると予想されている.

楕円曲線 E が素数 p で**通常的**である, すなわち p 進単数である Hecke 固有値 α_E が存在すると仮定する. このとき, p 進解析関数 $L_p(s,E)$ $(s\in\mathbb{Z}_p)$ が存在して, 関数等式

$$L_p(s,E)=\varepsilon_pL_p(2-s,E)$$

を満たし, 補間公式

$$L_p(1,E)=(1-\alpha_E^{-1})^{\delta}\frac{L(1,E)}{\Omega_E}$$

が成り立つ. ここで, Ω_E は E の Neron 周期であり,

$$\delta=\begin{cases}2 & (|\alpha_E|=\sqrt{p})\\ 1 & (\alpha_E\in\{\pm1\})\end{cases}$$

Mazur と Tate と Teitelbaum は BSD 予想の p 進類似を定式化した.

Conjecture 1.1 ([MTT86]). E の導手を N とし, $E(\mathbb{Q})$ の捻れ部分群を $E(\mathbb{Q})_{\rm tor}$ と書き, $r:=\mathrm{ord}_{s=1}L_p(s,E)$ とおく. $\alpha_E\neq1$ のとき, $E(\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}^r\oplus E(\mathbb{Q})_{\rm tor}$ が成り立ち,

$$\lim_{s\to1}\frac{L_p(s,E)}{(s-1)^r}=\frac{\sharp Ш(E/\mathbb{Q})}{(\sharp E(\mathbb{Q})_{\rm tor})^2}\cdot p\,\text{進レギュレーター}\cdot(1-\alpha_E^{-1})^{\delta}\prod_{\ell|N}c_\ell.$$

$\alpha_E=1$ となるのは, E が p で分裂乗法還元を持つときであり, このとき (例え $L(1,E)\neq0$ でも) 自動的に $L_p(1,E)=0$ となる. このような零点は, E の**例外零点**もしくは**自明零点**と呼ばれる. さらに $\alpha_E=1$ なら**符号変化** $\varepsilon_p=-\varepsilon$ が起こっている. Mazur と Tate と Teitelbaum は, これらの現象を発見し, $\alpha_E=1$ の場合の $L_p(s,E)$ の $s=1$ での Taylor 展開の先頭項を予想した. その特別な場合が Greenberg と Stevens により証明された次の定理である:

Theorem 1.2 ([GS93]). $\alpha_E=1$ のとき

$$L_p'(1,E)=\mathscr{L}_p(E)\frac{\Lambda(1,E)}{\Omega_E}.$$

この原稿は, 当日の発表資料をほぼそのまま原稿におこしたものです. そのために曖昧な点, 説明の不十分な点が多々あると思いますが, 御寛恕くださいますよう御願い致します. 筆者の研究は, JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 18K03210 により支援されています.

比例因子 $\mathscr{L}_p(E)$ は以下のように定義され, E の **$\mathscr{L}$-不変量**と呼ばれる. $\alpha_E = 1$ のとき, E は p 進一意化 $E(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / q_E^{\mathbb{Z}}$ を持つ. この p 進数 $q_E \in \mathbb{Z}_p$ は **Tate 周期**と呼ばれ, $\mathbb{Q}$ 上超越的であることが知られている ([BSDGP96]).

$$\mathscr{L}_p(E) = \frac{\log_p q_E}{\mathrm{ord}_p q_E} \neq 0.$$

ここで, ord_p は $\mathbb{Q}_p^\times$ の正規加法付値, $\log_p$ は $\log_p p = 0$ を満たす p 進対数関数である.

2. 捻り三重積 p 進 L 関数

F を実二次体もしくは $F = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ とする. E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線と A を F 上の楕円曲線とする. $V_p(E)$ と $V_p(A)$ をそれぞれの Tate 加群とする. A^τ を A の F の非自明な自己同型 τ による捻りとする. F の絶対 Galois 群 $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の表現 $V_p(A) \otimes V_p(A^\tau)$ は, $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の表現に拡張される. これは**浅井表現**と呼ばれ, $\mathrm{As}V_p(A)$ と書くことにする.

次の $G_{\mathbb{Q}}$ の 8 次元 Galois 表現を考える:

$$V_p^{A,E} := \mathrm{As}V_p(A)(-1) \otimes V_p(E).$$

実二次体上の楕円曲線の保型性も証明されており ([FLHS15]), Garrett の積分表示 ([PSR87]) により, Galois 表現 $V_p^{A,E}$ の L 関数 $L(s, M_{A,E})$ は解析接続され, 関数等式を満たす. さらに全ての Dirichlet 指標 χ に対して, 中心値の代数性も知られている:

$$\frac{\Lambda(0, M_{A,E} \otimes \chi)}{\Omega_{A,E}} \in \overline{\mathbb{Q}}, \qquad \Omega_{A,E} := \Lambda(1, A, \mathrm{ad})\Lambda(1, E, \mathrm{ad}).$$

$I_p \subset G_{\mathbb{Q}}$ を p の惰性群, $\mathfrak{p}$ を F の p の上にある素点, $I_{\mathfrak{p}} \subset G_F$ をその惰性群とする. $V_p^{A,E}$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-不変な部分空間を次のように定める:

$$\begin{aligned}\mathrm{Fil}\, V_p^{A,E} := & V_p(A)^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes V_p(A^\tau)^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes V_p(E) \\ & + V_p(A) \otimes V_p(A^\tau)^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes V_p(E)^{I_p} \\ & + V_p(A)^{I_{\mathfrak{p}}} \otimes V_p(A^\tau) \otimes V_p(E)^{I_p}.\end{aligned}$$

$L(s, M_{A,E})$ の p 進類似を考える. $\mathbb{Q}_\infty$ を $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $G \simeq \mathbb{Z}_p$ をそのガロア群とする.

Theorem 2.1 (Hsieh-Y.). *以下を仮定する:*

(i) $p \geq 5$.
(ii) A と E の導手が平方因子を持たない.
(iii) F の判別式 D_F が 8 で割り切れる.
(iv) E は p で通常的, A も p の上にある全ての素点で通常的である.

このとき, $L_p(M_{A,E}) \in \mathbb{Z}_p[\![G]\!] \otimes \mathbb{Q}_p$ *が存在して, 全ての有限位数の指標* $\chi : G \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ *に対して, 次の補間公式を満たす:*

$$\chi(L_p(M_{A,E})) = \frac{\Lambda(0, M_{A,E} \otimes \chi)}{\Omega_{A,E}} \mathcal{E}_p(\mathrm{Fil}\, V_p^{A,E} \otimes \chi)(\sqrt{-1})^3.$$

指標の連続族 $\langle x \rangle^s = \exp_p(s \log_p x)$ $(s \in \mathbb{Z}_p)$ を用いて, 次の p 進解析関数を考える:

$$L_p(s, M_{A,E}) = \langle L_p(M_{A,E}) \rangle^s.$$

Remark 2.2. (1) (iv) 以外の仮定は技術的なものである.

(2) 定理 2.1に現れる因子

$$\mathcal{E}_p(\mathrm{Fil}\, V_p^{A,E} \otimes \chi) := \frac{1}{\gamma_p(\mathrm{Fil}\, V_p^{A,E} \otimes \chi, 0) \cdot L_p(V_p^{A,E} \otimes \chi, 0)}$$

は**修正 p 因子**と呼ばれることもある. ここで, 分母は素数 p の分解群の表現の局所ガンマ因子と局所 L 因子の積である.

(3) $L_p(M_{A,E})$ は一変数円分 p 進 L 関数であるが, 著者と Ming-Lun Hsieh は, parallel weight の肥田族に関する三変数 p 進 L 関数を構成した. parallel でない重さ変数も含めて関する四変数 p 進 L 関数を考えることもできるが, parallel でない重さも含めると肥田理論が遥かに複雑になる.

(4) $F = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ のときは, 筆者らは四変数 p 進 L 関数を構成した ([HY]).

3. 例外零点

p が F で分裂せず不分岐であるとする. このとき

$$\mathcal{E}_p(\mathrm{Fil}\, V_p^{A,E}) = 0 \Leftrightarrow E \text{ は } p \text{ で乗法還元を持つ.}$$

Theorem 3.1 (Hsieh-Y.)**.** *α_E と α_A を E と A の p 進単数 Hecke 固有値とする. E が p で乗法還元を持つとき, 次の等式が成り立つ:*

$$L_p'(0, M_{A,E}) = 2\mathscr{L}_p(E)(-\alpha_A^{-1}p)(1 - \alpha_A^{-1}\alpha_E)^{\delta} \frac{\Lambda(0, M_{A,E})}{\Omega_{A,E}}.$$

この定理より $\alpha_A = \alpha_E$ のとき, $L_p'(0, M_{A,E}) = 0$ となる. この場合の二階微分値に関して, 以下の予想を定式化した.

Conjecture 3.2. $\alpha_A = \alpha_E \in \{\pm 1\}$ のとき,

$$L_p''(0, M_{A,E}) = -p\mathscr{L}_p(A)^2 \frac{\Lambda(0, M_{A,E})}{\Omega_{A,E}}.$$

A の Tate 周期を q_A として, $\mathscr{L}_p(A) = \frac{\log_p q_A}{\mathrm{ord}_p q_A}$ である. Greenberg [Gre94] は, 通常的な Galois 表現の **$\mathscr{L}$-不変量**を定義しており, $V_p^{A,E}$ の $\mathscr{L}$-不変量は $-p\mathscr{L}_p(A)^2$ に一致する.

$F = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ のとき, 筆者と Ming-Lun Hsieh は, 以下のより正確な公式を証明している.

Theorem 3.3 (Hsieh-Y. [HY])**.** *$F = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $A = E_1 \times E_2$ とする. $E_3 := E$ とおくと, $L_p(s, M_{A,E})$ は, E_1, E_2, E_3 の三重積円分 p 進 L 関数である.*

(1) E_1, E_2, E_3 *が* p *で分裂乗法還元を持つとき,*

$$L_p'''(0, M_{A,E}) = -6p\mathscr{L}_p(E_1)\mathscr{L}_p(E_2)\mathscr{L}_p(E_3) \frac{\Lambda(0, M_{A,E})}{\Omega_{A,E}}.$$

(2) E_3 *が* p *で分裂乗法還元を持ち,* E_1 *と* E_2 *は* p *で良い通常還元を持ち,*

$$\alpha_{E_1} = \alpha_{E_2} =: \alpha$$

が成り立つとき,

$$L_p''(0, M_{A,E}) = 2\mathscr{L}_p(E_3)^2(-p\alpha^{-2})(1 - \alpha^{-2}) \frac{\Lambda(0, M_{A,E})}{\Omega_{A,E}}.$$

4. 応用

E と E' を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし, 次の 6 次元 Galois 表現

$$U_p^{E,E'} := (\mathrm{Sym}^2 V_p(E'))(-1) \otimes V_p(E)$$

を考える. A が E' の実二次体 F への基底変換であるとき, Galois 表現 $V_p^{A,E}$ は可約であり, $\epsilon_{F/\mathbb{Q}}$ を F に対応する 2 次の Dirichlet 指標とすると,

$$V_p^{A,E} = U_p^{E,E'} \oplus (V_p(E) \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}}). \tag{4.1}$$

この分解に対応して, L 関数も分解する:

$$L(s, M_{A,E}) = L(s, N_{E,E'})L(s+1, E \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}}).$$

Rohrlich の定理 [Roh84] より $L_p(s, E \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}})$ は恒等的に 0 ではない. 複素周期 $\Omega_{E,E'}$ を適当に選んで, $U_p^{E,E'}$ の p 進 L 関数を p 進有理型関数

$$L_p(s, N_{E,E'}) = \frac{L_p(s, M_{A,E})}{L_p(s+1, E \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}})} \times (\text{複素周期の比})$$

として定義する. $L_p(s, N_{E,E'})$ が p 進解析関数であることは証明できなかったが, $L_p(s, N_p^{E,E'})$ は F の取り方に依らず, 全ての臨界点で補間公式を満たすことは証明できる. この際, F を $L(1, E \otimes \epsilon_{F/\mathbb{Q}}) \neq 0$ が成り立つように選べることが重要である.

$L_p(N_{E,E'})$ が例外零点を持つのは, E が p で分裂乗法還元を持つときである. このときの p 進微分値に関して, 定理 3.1の応用として, 次の公式が証明される.

Corollary 4.1 (Hsieh-Y.). *E が p で分裂乗法還元を持つとき,*

$$L_p'(0, N_{E,E'}) = \mathscr{L}_p(E)(-\alpha_{E'}^{-2}p)(1-\alpha_{E'}^{-2})^2 \frac{\Lambda(0, N_{E,E'})}{\Omega_{E,E'}}.$$

E' も p で乗法還元を持つとき, $L_p'(0, N_{E,E'}) = 0$ である.

Conjecture 4.2. *E が p で分裂乗法還元を持ち, E' も p で乗法還元を持つとき,*

$$L_p''(0, N_{E,E'}) = -p\mathscr{L}_p(E')^2 \frac{\Lambda(0, N_{E,E'})}{\Omega_{E,E'}}.$$

もし $L(1, E) \neq 0$ のとき, この予想は定理 3.3と分解 (4.1) から従う.

References

[BSDGP96] Katia Barré-Sirieix, Guy Diaz, François Gramain, and Georges Philibert, *Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 1–9. MR 1369409

[FLHS15] N. Freitas, B.V. Le Hung, and S. Siksek, *Elliptic curves over real quadratic fields are modular*, Invent. Math. **201** (2015), no. 1, 159–206.

[Gre94] Ralph Greenberg, *Trivial zeros of p-adic L-functions*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 149–174. MR 1279608

[GS93] Ralph Greenberg and Glenn Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** (1993), no. 2, 407–447.

[HY] Min-Lun Hsieh and Shunsuke Yamana, *Four-variable triple product p-adic L-functions*, Preprint.

[MTT86] B. Mazur, J. Tate, and J. Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 1–48.

[PSR87] I. Piatetski-Shapiro and Stephen Rallis, *Rankin triple L functions*, Compositio Math. **64** (1987), no. 1, 31–115. MR 911357

[Roh84] David E. Rohrlich, *l-functions of elliptic curves and cyclotomic towers*, Invent. Math. **75** (1984), no. 3, 409–423.

Email address: yamana@omu.ac.jp

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan