命題変数の量化を持つ時相論理の表現能力について

東京工業大学 情報理工学院
佐藤 悠
Yu Sato
School of Computing
Tokyo Institute of Technology

1 Introduction

本稿では Second order の各種 Temporal Logic 及び Modal Logic, つまり **LTL**, **CTL**, **K**, $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{L}_\mu$(様相 μ 計算) に命題変数の量化を加えた体系 (それぞれ **QLTL**, **QCTL**, **QK**, $\mathbf{QK}^*$, $\mathbf{QL}_\mu$) の表現能力の比較を行う．本稿は大別して **LTL**, **CTL** の 2 体系の話題に分かれる．**LTL** の表現能力の強さとしては [CD88] でその特徴づけに関する定理が提示されているが, 証明の詳細が省略されており, その結果は有限モデルに対してしか適用できない．本稿ではこの証明を（無限モデルの場合にも拡張し）詳細に行い, 同様の結果を Second order の体系においても示した．この系として, **LTL** の Finite Model Property も簡単に示すことが可能である．**CTL** に関しては [LM14] で幾つかの考察が成されており, その手法に倣い $\mathbf{QK}^*$, **QCTL**, $\mathbf{QL}_\mu$ の表現能力を比較し, その強さが全て等しいこと, つまり $\mathbf{QK}^* = \mathbf{QCTL} = \mathbf{QL}_\mu$ 及び $\mathbf{QK} < \mathbf{QK}^*$ を示した．特に $\mathbf{QK} < \mathbf{QCTL}$ か否かという問題は [BHL18] で未解決の問題の 1 つとして挙げられていたが, それを (肯定的に) 解決した結果となる．

本稿で **QK**, $\mathbf{QK}^*$, **QLTL** と表記した体系は普通, **SOPML**(Second Order Propositional Modal Logic), $\mathbf{SOPML}^*$, **QPTL**(Quantified Propositional Temporal Logic) と表記されるが, 表記の統一性及び可読性を考慮しこのように呼ぶことにする．この呼び方は本稿独自のもので一般性がないことに注意されたい．

2 Expressibility of **LTL**

本章及び次章では **LTL**, **QLTL** それぞれにおいて, 特徴付け定理 Thm 2.16, Thm 3.9 を示すことが目標である．**QLTL** における Thm 3.9 の証明のほうが簡潔であり, 同様の手法で Thm 2.16 を示すこともできるが, ここでは異なる手法で Thm 2.16 を示した．ここで敢えて複雑な手法を採用したのは, 元論文 [CD88] の手法に倣うという意図と, 証明に使う Lem 2.5 を用いると, 論理式を真に保ったまま与えられたモデルを有限のものに変形できるため, 系として Finite Model Property を示すことができるという 2 つの理由がある．

2.1 Syntax

今後, 命題変数の集合を AP で表し, φ, ψ が文字列として等しいとき $\varphi \equiv \psi$ と書き表す．

Definition. 2.1 (syntax of $\mathbf{CTL}^*$, **LTL**)
$\mathbf{CTL}^*$ (Computational Tree Logic star) の *path-formulae* を以下で定める：

$$\varphi, \psi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \mathbf{X}\varphi \mid \varphi\mathbf{U}\psi \mid \mathbf{A}\varphi$$

ただし p は AP の上を走る命題変数を表す. **LTL** (Linear Temporal Logic) の path-formulae を $\mathbf{CTL}^*$ から記号 $\mathbf{A}$ を除いたものとして定める. $\mathbf{A}$ を *path quantifier*, $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ を *temporal modality* と呼ぶ. propositional connectives $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, path quantifier $\mathbf{E}$ 及び temporal modality $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ を以下のように定める：

- $\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\mathbf{E}\varphi := \neg\mathbf{A}\neg\varphi$
- $\mathbf{F}\varphi := \top\mathbf{U}\varphi$
- $\mathbf{G}\varphi := \neg\mathbf{F}\neg\varphi$

$\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ が全て $\mathbf{A}$ の scope 内に現れている path-formula を特に *state-formula* と呼ぶ. すなわち：

$$\varphi, \psi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \mathbf{A}\rho \ (\rho \text{ は path-formula})$$

という形の formulae を state-formula と呼ぶ.

2.2 Semantics

LTL の model としては linear なものを取ることが多いが, 本稿の目的は $\mathbf{CTL}^*$ との比較なので, **LTL** はあくまで $\mathbf{CTL}^*$ の部分体系として扱い, semantics もそれに準ずる.

Definition. 2.2 (Kripke model) *Kripke model* $\mathcal{M} = \langle S, R, V\rangle$ を以下のように定める：

- S は状態の集合 (set of *state*).
- R は S 上の total な遷移関係 (*transition relation*). (すなわち $^\forall s \in S\ ^\exists s' \in S\ sRs'$.)
- V は命題変数を状態の集合に割り当てる関数 (*valuation function*) $V : \mathrm{AP} \rightarrow 2^S$.

Definition. 2.3 (path, finite path) $\mathcal{M}$ を Kripke model とする. S の要素の無限列 $\pi = s_0 s_1 \cdots$ で 任意の s_i について $s_i R s_{i+1}$ を満たすものを $\mathcal{M}$ の *path* と呼ぶ. また $\pi(i) := s_i$, $\pi^i := s_i s_{i+1} \cdots$, $\pi_{s_i} := \pi^i$ と定める. 同様に S の要素の有限列 $x = s_0 s_1 \cdots s_n$ で 任意の s_i について $s_i R s_{i+1}$ を満たすものを $\mathcal{M}$ の *finite path* と呼ぶ. 特に空列を ε で表す. $x(i) := s_i$, ($i \le n$ に対して) $x^i := s_i s_{i+1} \cdots s_n$ と定める. $\pi(0) = s$ ($x(0) = s$) なる path (finite path) を特に *s-path* (*finite s-path*) と呼ぶ. finite path $x = s_0 \cdots s_i$ と path $\pi = s_{i+1} s_{i+2} \cdots$ に対して $s_i R s_{i+1}$ が成り立つとき path $s_0 s_1 \cdots s_i s_{i+1} \cdots$ を $x\pi$ で表す. s が path (finite path) π (x) の要素であるとき $s \in \pi$ ($s \in x$), path π が $\pi = x\pi'$ となっているとき $x \subset \pi$ と書く. (空でない)finite path $y = t_0 \cdots t_l$ について $t_l R t_0$ のとき $t_0 \cdots t_l t_0 \cdots t_l t_0 \cdots$ という path を y^ω で表す.

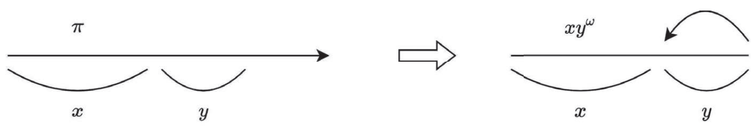
Definition. 2.4 (semantics of $\mathbf{CTL}^*$, **LTL**) $\mathcal{M}$ を Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path, φ を $\mathbf{CTL}^*$-formula とする. 充足関係 $\mathcal{M}, \pi \models \varphi$ を以下のように帰納的に定める：

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, \pi \models p & :\Leftrightarrow & \pi(0) \in V(p) \\
\mathcal{M}, \pi \models \neg\varphi & :\Leftrightarrow & \mathcal{M}, \pi \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models \varphi \vee \psi & :\Leftrightarrow & \mathcal{M}, \pi \models \varphi \text{ または } \mathcal{M}, \pi \models \psi \\
\mathcal{M}, \pi \models \mathbf{X}\varphi & :\Leftrightarrow & \mathcal{M}, \pi^1 \models \varphi \\
\mathcal{M}, \pi \models \varphi\mathbf{U}\psi & :\Leftrightarrow & \text{ある } j \ge 0 \text{ が存在し, 任意の } 0 \le i < j \text{ に対して } \mathcal{M}, \pi^i \models \varphi \text{ かつ } \mathcal{M}, \pi^j \models \psi \\
\mathcal{M}, \pi \models \mathbf{A}\varphi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } \pi(0) \text{ -path } \sigma \text{ に対して } \mathcal{M}, \sigma \models \varphi
\end{array}
$$

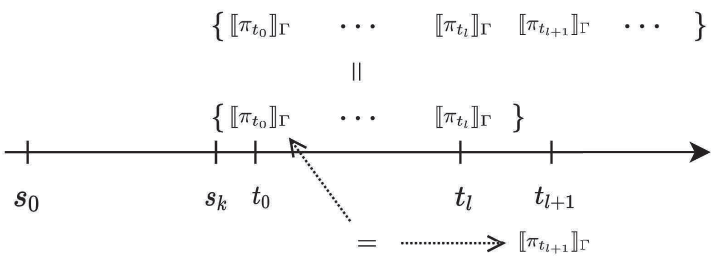
φ が state-formula の場合, 始点 s を決めれば φ の真偽は定まる. その場合単に $\mathcal{M}, s \models \varphi$ と書き表す.

2.3 Lasso Lemma

Lemma. 2.5 (Lasso Lemma) $\mathcal{M}$ を Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき任意の **LTL**-path formula の有限集合 Φ に対してある finite path $xy \subset \pi$ が存在し，任意の $\rho \in \Phi$ に対して，$\mathcal{M}, \pi \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}_y, xy^\omega \models \rho$ が成り立つ．ただし，Kripke model $\mathcal{M} = \langle S, R, V\rangle$ と $\mathcal{M}$ の finite path $y = t_0 \cdots t_l$ に対して $\mathcal{M}_y := \langle S, R \cup \{(t_l, t_0)\}, V\rangle$.



Proof. $\Gamma := \{\rho' \mid {}^\exists\rho \in \Phi,\ \rho'$ は ρ の部分論理式$\}$ とする．path π' に対して $[\![\pi']\!]_\Gamma := \{\rho \in \Gamma \mid \mathcal{M}, \pi' \models \rho\}$ と定める．Γ は有限なので，$\{[\![\pi^0]\!]_\Gamma, [\![\pi^1]\!]_\Gamma, \ldots\}$ も有限となる．その中で無限回出現する要素を $\Delta_0, \ldots, \Delta_N$ とすると，π の十分先では $\Delta_0, \ldots, \Delta_N$ しか現れず，またいずれこれらの全てが出現する．すなわち $\pi = s_0 \cdots s_k t_0 \cdots t_l t_{l+1} \cdots$ で $\{[\![\pi_{t_0}]\!]_\Gamma, [\![\pi_{t_1}]\!]_\Gamma, \ldots, [\![\pi_{t_l}]\!]_\Gamma, [\![\pi_{t_{l+1}}]\!]_\Gamma, \ldots\} = \{[\![\pi_{t_0}]\!]_\Gamma, \ldots, [\![\pi_{t_l}]\!]_\Gamma\} = \{\Delta_0, \ldots, \Delta_N\}$ かつ $[\![\pi_{t_0}]\!]_\Gamma = [\![\pi_{t_{l+1}}]\!]_\Gamma$ となる $s_0, \ldots, s_k, t_0, \ldots, t_l, t_{l+1}$ が存在する．

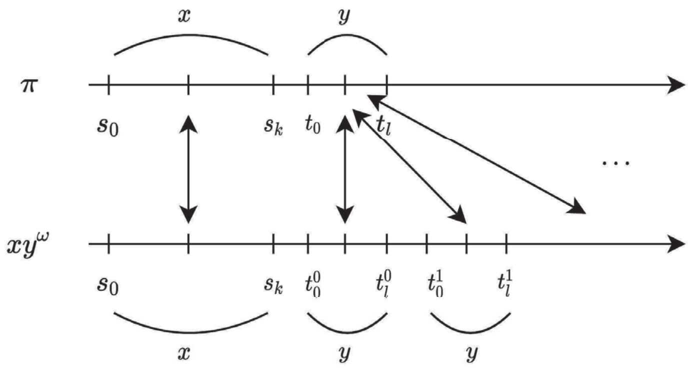


このとき $x := s_0 \cdots s_k$, $y := t_0 \cdots t_l$, $xy^\omega = s_0 \cdots s_k t_0^0 \cdots t_l^0 t_0^1 \cdots t_l^1 t_0^2 \cdots$ として：

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } \rho \in \Gamma,\ s \in xy \text{ に対して} \\
&\quad s = s_n \in x \ \Rightarrow\ (\mathcal{M}, \pi_{s_n} \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{s_n} \models \rho) \\
&\quad s = t_n \in y \ \Rightarrow\ {}^\forall m \geq 0,\ (\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_n^m} \models \rho)
\end{aligned}
$$

が示せればよい．(証明すべき補題は上の主張の $s = \pi(0)$ の場合に当たる) Γ は部分論理式について閉じているので $\rho \in \Gamma$ の構成に関する帰納法で示す．

- $\rho \equiv p$ のとき：$\mathcal{M}, \pi_s \models p \Leftrightarrow s \in V(p) \Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{s'} \models p$
- $\rho \equiv \neg\rho$ のとき：$\mathcal{M}, \pi_s \models \neg\rho \Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi_s \not\models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{s'} \not\models \rho$ (by IH) $\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{s'} \models \neg\rho$
  ただし上記の s' は，$s \in x$ のときは $s' = s$, $s \in y$ のときは $s' = t_n^m$ を表すとする．
- $\rho \equiv \rho \vee \tau$ のとき：$\neg\rho$ と同様．
- $\rho \equiv \mathbf{X}\rho$ のとき：



– $s = s_n \in x$ のとき：$s' := \pi^{n+1}(0)$ とすると $s' \in xy$ なので

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, \pi_{s_n} \models \mathbf{X}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}, (\pi_{s_n})^1 \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi_{s'} \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{s'} \models \rho && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, ((xy^\omega)_s)^1 \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_s \models \mathbf{X}\rho
\end{aligned}$$

– $s = t_n \in y$ のとき：$0 \le n < l$ の場合は $s = s_n \in x$ の場合と同様. $n = l$ の場合は,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, \pi_{t_l} \models \mathbf{X}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}, (\pi_{t_l})^1 \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, (\pi_{t_{l+1}}) \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, (\pi_{t_0}) \models \rho && (\llbracket t_0 \rrbracket_\Gamma = \llbracket t_{l+1} \rrbracket_\Gamma \text{ より}) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_0^{m+1}} \models \rho && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_l^m} \models \mathbf{X}\rho
\end{aligned}$$

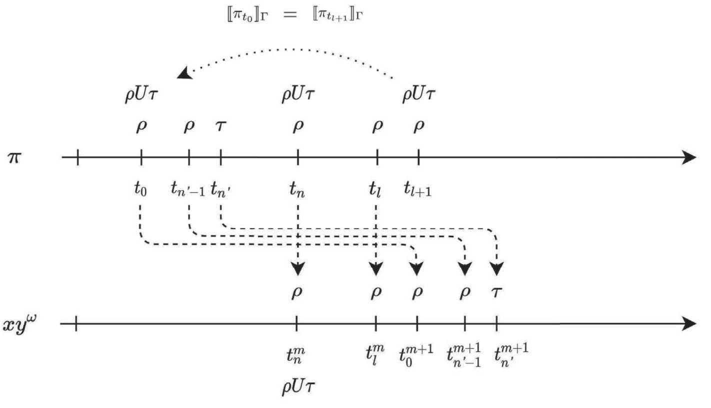
- $\rho \equiv \rho \mathbf{U} \tau$ のとき：
  – $s = t_n \in y$ のとき：

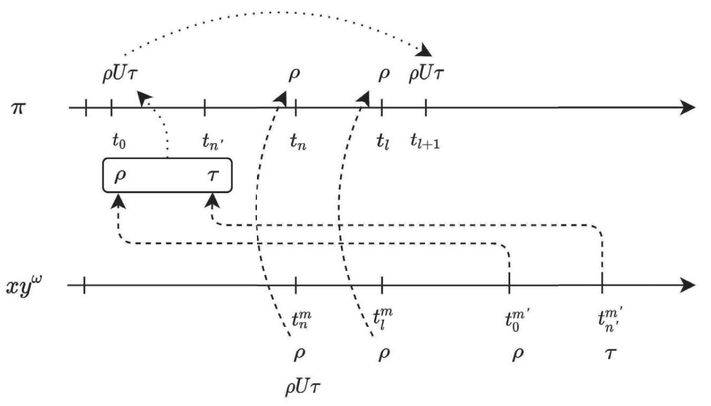
$$\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho \mathbf{U} \tau \Rightarrow {}^{\exists}j \ge 0,\ 0 \le {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}, (\pi_{t_n})^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}, (\pi_{t_n})^j \models \tau$$

$(\pi_{t_n})^j = \pi_{t_{n'}}$ の場合は IH より直ちに従う．そうでない場合 $\mathcal{M}, \pi_{t_{l+1}} \models \rho\mathbf{U}\tau$ なので $\mathcal{M}, \pi_{l_0} \models \rho\mathbf{U}\tau$ ($\llbracket t_0 \rrbracket_\Gamma = \llbracket t_{l+1} \rrbracket_\Gamma$ より). また $\{\llbracket \pi_{t_0} \rrbracket_\Gamma, \llbracket \pi_{t_1} \rrbracket_\Gamma \ldots, \} = \{\llbracket \pi_{t_0} \rrbracket_\Gamma, \ldots, \llbracket \pi_{t_l} \rrbracket_\Gamma\}$ なので, ある $t_{n'}$ が存在し $\mathcal{M}, \pi_{t_{n'}} \models \tau$. 以上より $\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}, \pi_{t_l} \models \rho, \mathcal{M}, \pi_{t_0} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}, \pi_{t_{n'-1}} \models \rho, \mathcal{M}, \pi_{t_{n'}} \models \tau$ なので IH より $\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_n^m} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_l^m} \models \rho, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_0^{m+1}} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_{n'-1}^{m+1}} \models \rho, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_{n'}^{m+1}} \models \tau$. よって $\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_n^m} \models \rho\mathbf{U}\tau$. 逆は：

$$\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_n^m} \models \rho\mathbf{U}\tau \Rightarrow {}^{\exists}j \ge 0,\ 0 \le {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}_y, ((xy^\omega)_{t_n^m})^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}_y, ((xy^\omega)_{t_n^m})^j \models \tau$$

$((xy^\omega)_{t_n^m})^j = (xy^\omega)_{t_{n'}^m}$ の場合は IH より直ちに従う．そうでない場合, $\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_n^m} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_l^m} \models \rho$. かつ, ある $m' > m$, $n' \ge 0$ が存在し $\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_0^{m'}} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_{n'-1}^{m'}} \models \rho$, $\mathcal{M}_y, (xy^\omega)_{t_{n'}^{m'}} \models \tau$ が成り立つ．よって IH より $\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}, \pi_{t_l} \models \rho$. かつ, $\mathcal{M}, \pi_{t_0} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}, \pi_{t_{n'-1}} \models \rho$, $\mathcal{M}, \pi_{t_{n'}} \models \tau$. が成り立つ．これより $\mathcal{M}, \pi_{t_0} \models \rho\mathbf{U}\tau$ が分かり, $\mathcal{M}, \pi_{t_{l+1}} \models \rho\mathbf{U}\tau$ ($\llbracket t_0 \rrbracket_\Gamma = \llbracket t_{l+1} \rrbracket_\Gamma$ より). 以上より $\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho, \ldots, \mathcal{M}, \pi_{t_l} \models \rho$, $\mathcal{M}, \pi_{t_{l+1}} \models \rho\mathbf{U}\tau$ が成り立つので $\mathcal{M}, \pi_{t_n} \models \rho\mathbf{U}\tau$.





– $s = s_n \in x$ のとき：$s = t_n \in y$ のときと同様.

□

2.4 Single Path Model

Definition. 2.6 (submodel) Kripke model $\mathcal{M} = \langle S, R, V \rangle, \mathcal{M}' = \langle S', R', V' \rangle$ が $S \subseteq S', R \subseteq R', V(p) = V'(p) \cap S$ を満たすとき $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ と書く.

Lemma. 2.7 $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ なる Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path, ρ を **LTL**-path formula とする. このとき $\mathcal{M}, \pi \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models \rho$.

Proof. ρ の構成に関する帰納法で示す.

- $\rho \equiv p$ のとき：$\mathcal{M}, \pi \models p \Leftrightarrow \pi(0) \in V(p) \Leftrightarrow \pi(0) \in V'(p)$ ($\pi(0) \in S$ なので) $\Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models p$
- $\rho \equiv \neg\rho$ のとき：$\mathcal{M}, \pi \models \neg\rho \Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi \not\models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \not\models \rho$ (by IH) $\Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models \neg\rho$
- $\rho \equiv \rho \vee \tau$ のとき：$\rho \equiv \neg\rho$ と同様.
- $\rho \equiv \mathbf{X}\rho$ のとき：$\mathcal{M}, \pi \models \mathbf{X}\rho \Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi^1 \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi^1 \models \rho$ (by IH) $\Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models \mathbf{X}\rho$

- $\rho \equiv \rho \mathbf{U} \tau$ のとき：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, \pi \models \rho \mathbf{U} \tau &\Leftrightarrow {}^{\exists} j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall} i < j,\ \mathcal{M}, \pi^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}, \pi^j \models \tau \\ &\Leftrightarrow {}^{\exists} j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall} i < j,\ \mathcal{M}', \pi^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}', \pi^j \models \tau \text{ (by IH)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models \rho \mathbf{U} \tau\end{aligned}$$

□

Definition. 2.8 (single-path Kripke model)　$\mathcal{M}$ を Kripke model, $xy^\omega = s_0 \cdots s_k(s_{k+1} \cdots s_l)(s_{k+1} \cdots s_l) \cdots$ を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき *single-path Kripke model* $\mathcal{M}(xy^\omega) = \langle S_{xy^\omega}, R_{xy^\omega}, V_{xy^\omega} \rangle$ を以下で定める．なお $i \neq j$ であるときには, もし $s_i = s_j$ であっても $\bar{s}_i \neq \bar{s}_j$ とする．つまり, $s_0, s_1, \ldots, s_l$ の中に重複があっても $\bar{s}_0, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_l$ はそれを区別して展開したものである：

- $S_{xy^\omega} := \{\bar{s}_0, \ldots, \bar{s}_l\}$
- $R_{xy^\omega} := \{(\bar{s}_0, \bar{s}_1), \ldots, (\bar{s}_{l-1}, \bar{s}_l), (\bar{s}_l, \bar{s}_{k+1})\}$
- $\bar{s} \in V_{xy^\omega}(p) :\Leftrightarrow s \in V(p)$

$\mathcal{M}(xy^\omega)$ の唯一の path $\bar{s}_0 \cdots \bar{s}_k(\bar{s}_{k+1} \cdots \bar{s}_l)(\bar{s}_{k+1} \cdots \bar{s}_l) \cdots$ も xy^ω で表す.

Lemma. 2.9　$\mathcal{M}$ を Kripke model, xy^ω を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき, 任意の $i \geq 0$ に対して $(xy^\omega)^i = zy^\omega$ となる z が存在し, 次が成り立つ：

$$\text{任意の } \mathbf{LTL}\text{-path formula } \rho \text{ に対して, } \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^i \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}(zy^\omega), zy^\omega \models \rho$$

Proof. $x = s_0 \cdots s_k$, $y = t_0 \cdots t_l$ とする．$i \leq k$ のときは $z := x^i$, $(xy^\omega)^i = t_j \cdots t_l(t_0 \cdots t_l)(t_0 \cdots t_l) \cdots$ のときは $z := t_j \cdots t_l$ とすればよい．このとき $\mathcal{M}(zy^\omega) \subseteq \mathcal{M}(xy^\omega)$ なので Lem 2.7 より証明すべき主張が成り立つ. □

Lemma. 2.10　$\mathcal{M}$ を Kripke model, xy^ω を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき任意の **LTL**-path formula ρ に対して $\mathcal{M}, xy^\omega \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho$

Proof. ρ の構成に関する帰納法で示す：

- $\rho \equiv p$ のとき：$\mathcal{M}, xy^\omega \models p \Leftrightarrow (xy^\omega)(0) \in V(p) \Leftrightarrow (xy^\omega)(0) \in V_{xy^\omega}(p) \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models p$
- $\rho \equiv \neg\rho$ のとき：$\mathcal{M}, xy^\omega \models \neg\rho \Leftrightarrow \mathcal{M}, xy^\omega \not\models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \not\models \rho$ (by IH) $\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \neg\rho$
- $\rho \equiv \rho \vee \tau$ のとき：$\rho \equiv \neg\rho$ の場合と同様
- $\rho \equiv \mathbf{X}\rho$ のとき：Lem 2.9 で $i = 1$ としたときの z をとり, $(xy^\omega)^1 = zy^\omega$ とする,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, xy^\omega \models \mathbf{X}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}, (xy^\omega)^1 \models \rho \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, zy^\omega \models \rho \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(zy^\omega), zy^\omega \models \rho && \text{(by IH)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^1 \models \rho && \text{(Lem 2.9 より)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \mathbf{X}\rho\end{aligned}$$

- $\rho \equiv \rho\mathbf{U}\tau$ のとき：Lem 2.9 で $i = k$ としたときの z_k をとり, $(xy^\omega)^k = z_k y^\omega$ とする,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}, xy^\omega \models \rho\mathbf{U}\tau &\Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}, (xy^\omega)^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}, (xy^\omega)^j \models \tau \\
&\Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}, z_i y^\omega \models \rho \text{ and } \mathcal{M}, z_j y^\omega \models \tau \\
&\Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(z_i y^\omega), z_i y^\omega \models \rho \text{ and } \mathcal{M}(z_j y^\omega), z_j y^\omega \models \tau \\
&\quad \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^j \models \tau \\
&\quad \text{(Lem 2.9 より)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho\mathbf{U}\tau
\end{aligned}
$$

□

Corollary. 2.11 (Finite model property**)** **LTL** は *Finite model property* を持つ．すなわち, **LTL**-path formula ρ に対して, ある Kripke model $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ の path π が存在して $\mathcal{M}, \pi \models \rho$ が成り立つならば, 状態集合が有限な Kripke model $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}}$ の path $\overline{\pi}$ が存在して $\overline{\mathcal{M}}, \overline{\pi} \models \rho$.

Proof. $\mathcal{M}_y(xy^\omega)$ が有限モデルであることと Lem 2.5, Lem 2.10 から従う．

□

2.5 Characterization Theorem

Definition. 2.12 (delete function**)** **CTL***-path formula φ から temporal modality **A** を全て削除した formula を φ^d で表す．定義から φ^d は常に **LTL**-path formula である．

Lemma. 2.13 $\mathcal{M}$ を Kripke model, xy^ω を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき任意の **CTL***-path formula ρ に対して $\mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho^d$

Proof. ρ の構成に関する帰納法で示す．

- $\rho \equiv p, \neg\rho, \rho \vee \tau$ のとき：IH より明らか．
- $\rho \equiv \mathbf{X}\rho$ のとき：Lem 2.9 で $i = 1$ としたときの z をとり, $(xy^\omega)^1 = zy^\omega$ とする,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \mathbf{X}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^1 \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(zy^\omega), zy^\omega \models \rho && \text{(Lem 2.9 より)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(zy^\omega), zy^\omega \models \rho^d && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^1 \models \rho^d && \text{(Lem 2.9 より)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \mathbf{X}\rho^d \equiv \rho^d
\end{aligned}
$$

- $\rho \equiv \rho\mathbf{U}\tau$ のとき：Lem 2.9 で $i = k$ としたときの z_k をとり, $(xy^\omega)^k = z_k y^\omega$ とする,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho\mathbf{U}\tau \\
&\quad \Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^i \models \rho \text{ and } \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^j \models \tau \\
&\quad \Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(z_i y^\omega), z_i y^\omega \models \rho \text{ and } \mathcal{M}(z_j y^\omega), z_j y^\omega \models \tau && \text{(Lem 2.9 より)} \\
&\quad \Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(z_i y^\omega), z_i y^\omega \models \rho^d \text{ and } \mathcal{M}(z_j y^\omega), z_j y^\omega \models \tau^d && \text{(by IH)} \\
&\quad \Leftrightarrow {}^{\exists}j \geq 0,\ 0 \leq {}^{\forall}i < j,\ \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^i \models \rho^d \text{ and } \mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)^j \models \tau^d && \text{(Lem 2.9 より)} \\
&\quad \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho^d\mathbf{U}\tau^d \equiv \rho^d
\end{aligned}
$$

- $\rho \equiv \mathbf{A}\rho$ のとき：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \mathbf{A}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho \ (xy^\omega \text{ は } \mathcal{M}(xy^\omega) \text{ の唯一の } (xy^\omega)(0)\text{-path なので})\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho^d \ \text{(by IH)}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \rho^d\end{aligned}$$

□

Corollary. 2.14 $\mathcal{M}$ を Kripke model, xy^ω を $\mathcal{M}$ の path とする．このとき任意の $\mathbf{CTL}^*$-state formula φ に対して $\mathcal{M}(xy^\omega), (xy^\omega)(0) \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}(xy^\omega), xy^\omega \models \varphi^d$

Proof. φ の構成に関する帰納法で示す．$\varphi \equiv \mathbf{A}\rho$ の形のときに Lem 2.13 を用いる． □

Definition. 2.15 (Expressibility) formulae φ, ψ が任意の Kripke model $\mathcal{M}$, state s に対して $\mathcal{M}, s \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, s \models \psi$ を満たすとき, $\varphi \simeq \psi$ と書く.(この記法は次章以降も同様に用いる) $\mathbf{CTL}^*$-state formula φ に対して, ある $\mathbf{LTL}$-path formula ρ が存在し $\varphi \simeq \mathbf{A}\rho$ が成り立つとき φ は $\mathbf{LTL}$ で表現可能と言う．

Theorem. 2.16 (Characterization theorem) φ が $\mathbf{LTL}$ で表現可能 $\Leftrightarrow \varphi \simeq \mathbf{A}\varphi^d$

Proof. $\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ を示す. φ が $\mathbf{LTL}$ で表現可能とすると, ある $\mathbf{LTL}$-path formula ρ が存在し $\varphi \simeq \mathbf{A}\rho$ が成り立つ．この ρ に対し $\mathbf{A}\rho \simeq \mathbf{A}\varphi^d$ を示す．Kripke model $\mathcal{M}$ と state s を任意に取る．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}\rho &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}, \pi \models \rho\\ &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}_y, xy^\omega \models \rho && (\Phi := \{\rho, \varphi^d\} \text{ として Lem 2.5 より})\\ &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}_y(xy^\omega), xy^\omega \models \rho && (\text{Lem 2.10 より})\\ &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}_y(xy^\omega), s \models \mathbf{A}\rho && (xy^\omega \text{ は } \mathcal{M}_y(xy^\omega) \text{ の唯一の } s\text{-path なので})\\ &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}_y(xy^\omega), s \models \varphi && (\varphi \simeq \mathbf{A}\rho \text{ より})\\ &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}_y(xy^\omega), xy^\omega \models \varphi^d && (\text{Cor 2.14 より})\\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, s \models \mathbf{A}\varphi^d && (\text{同様にして})\end{aligned}$$

よって $\mathbf{A}\rho \simeq \mathbf{A}\varphi^d$. □

Example. 2.17 $\mathbf{AFAG}p$ は $\mathbf{LTL}$ で表現不能.

Proof. $\mathcal{M} := \langle \{s_0, s_1, s_2\}, \{(s_0, s_0), (s_0, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_2)\}, \{(p, \{s_0, s_2\})\} \rangle$ とする．このとき $\mathcal{M}, s_0 \not\models \mathbf{AFAG}p$ ($(s_0)^\omega$ という path を取れば良い) だが $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{A}(\mathbf{AFAG}p)^d$. よって $\mathbf{AFAG}p \not\simeq \mathbf{A}(\mathbf{AFAG}p)^d$ なので Thm 2.16 より $\mathbf{AFAG}p$ は $\mathbf{LTL}$ で表現不能. □

Corollary. 2.18 $\mathbf{CTL}^*$ の表現能力は $\mathbf{LTL}$ よりも真に強い.

Proof. Example 2.17 より. □

3 Expressibility of QLTL

前章の Thm 2.16 の **QLTL** 版である Thm 3.9 を示すことが本章の目標である.

3.1 Syntax and Semantics

Definition. 3.1 (syntax of $\mathbf{QCTL}^*$, **QLTL**) $\mathbf{CTL}^*$-path formula に ${}^{\forall}p.\varphi$ という形の論理式を加えた体系を $\mathbf{QCTL}^*$ (Quantified $\mathbf{CTL}^*$) と呼ぶ．すなわち $\mathbf{QCTL}^*$-path formula とは以下で定義される論理式である：

$$\varphi, \psi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid {}^{\forall}p.\varphi \mid \mathbf{X}\varphi \mid \varphi\mathbf{U}\psi \mid \mathbf{A}\varphi$$

ただし p は AP の上を走る命題変数を表す．**LTL** のときと同様に $\mathbf{QCTL}^*$ から $\mathbf{A}$ を除いた体系を **QLTL** (Quantified **LTL**) と定める．$\forall$ を *propositional quantifier* と呼ぶ．$\wedge, \rightarrow \leftrightarrow$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ を以前と同様に定める．propositional quantifier $\exists$ を ${}^{\exists}p.\varphi := \neg{}^{\forall}p.\neg\varphi$ で定める．

Definition. 3.2 (Kripke model) Kripke model $\mathcal{M} = \langle S, R, V, D\rangle$ を以下のように定める：

- S, R, V は今までと同様.
- D は量化領域 (domain of quantification)：$D \subseteq 2^S$

V の p に対する割当てのみを U に変更したものを V_U^p, $\langle S, R, V_U^p, D\rangle$ を $\mathcal{M}_U^p$ と表す.

Definition. 3.3 (semantics of $\mathbf{QCTL}^*$, **QLTL**) $\mathcal{M}$ を Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path, φ を $\mathbf{QCTL}^*$-path formula とする．充足関係 $\mathcal{M}, \pi \models \varphi$ を今までの定義に次を加えて定める：

$$\mathcal{M}, \pi \models {}^{\forall}p.\varphi \ :\Leftrightarrow \ {}^{\forall}U \in D,\ \mathcal{M}_U^p, \pi \models \varphi$$

Propotisize. 3.4 (Finite model property) **QLTL** は Finite model property を持たない．すなわち, ある Kripke model が存在し, そこでは真になるが, 任意の有限 Kripke model で偽になる論理式が存在する.

Proof. $\rho := \mathbf{GF}\ {}^{\exists}p.(p \wedge \mathbf{XG}\neg p)$ とする．ρ は充足可能 (例えば $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, <, \bullet, 2^{\mathbb{N}}\rangle$)．$\mathcal{M}$ を任意の有限 Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の任意の path とし, $\mathcal{M}, \pi \models \rho$ とする．$\mathcal{M}$ は有限なので, 十分大きな N を取れば π の N 番目より先は, 無限回現れる要素しか含まれない．すると任意の $i \geq 0$ について ある $k > 0$ が存在して $\pi^N(i) = \pi^N(i+k)$．仮定より $\mathcal{M}, (\pi^N)^i \models {}^{\exists}p.(p \wedge \mathbf{XG}\neg p)$ とすると, ある $U \in D$ について $\mathcal{M}_U^p, (\pi^N)^i \models p \wedge \mathbf{XG}\neg p$ なので $\pi^N(i) \in U$ かつ $\pi^N(i+k) \notin U$．これは矛盾．よって $\mathcal{M}, \pi \not\models \rho$. □

3.2 Characterization Theorem

Kripke model $\mathcal{M} = \langle S, R, V, D\rangle, \mathcal{M}' = \langle S', R', V', D'\rangle$ が $S \subseteq S', R \subseteq R', V(p) = V'(p) \cap S$, $\{U' \cap S \mid U' \in D'\} = D$ を満たすとき $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ と書く.

Lemma. 3.5 $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ を $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ なる Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path, ρ を **QLTL**-path formula とする．このとき $\mathcal{M}, \pi \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models \rho$.

Proof. Lem 2.7 と同様. ${}^{\forall}p.\rho$ の場合のみ示す：$U' \cap S = U$ とする．$\mathcal{M}, \pi \models {}^{\forall}p.\rho \Leftrightarrow {}^{\forall}U \in D,\ \mathcal{M}_U^p, \pi \models \rho$. このとき $\mathcal{M}_U^p \subseteq (\mathcal{M}')_{U'}^p$ $(\because (V')_{U'}^p(q) \cap S = V_U^p(q))$．よって IH より ${}^{\forall}U' \in D'$, $(\mathcal{M}')_{U'}^p, \pi \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}', \pi \models {}^{\forall}p.\rho$. □

Definition. 3.6 (single-path Kripke model) $\mathcal{M}$ を Kripke model, $\pi = (s_0, s_1, \dots)$ を $\mathcal{M}$ の path とする. $\mathcal{M}(\pi) = \langle S_\pi, R_\pi, V_\pi, D_\pi\rangle$ を以下で定める．Def 2.8 と同様に, 同じ状態も区別して展開することに注意する：

- $S_\pi := \{\bar{s}_0, \bar{s}_1, \dots\}$.

- $R_\pi := \{(\bar{s}_0, \bar{s}_1), (\bar{s}_1, \bar{s}_2), \ldots\}$.
- $V_\pi(\bar{s}_i) := V(s_i)$.
- $D_\pi := \{U_\pi \mid$ ある $U \in D$ が存在し, $U \cap \{s_0, s_1, \ldots\} = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots\}$ かつ $U_\pi = \{\bar{s}_{i_1}, \bar{s}_{i_2}, \ldots\}\}$.

Lemma. 3.7 $\mathcal{M}$ を Kripke model, π を $\mathcal{M}$ の path, ρ を $\mathbf{QCTL}^*$-path formula とする. このとき $\mathcal{M}(\pi), \pi \models \rho \Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi \models \rho^d$

Proof. ρ の構成に関する帰納法で示す. $\rho \equiv p, \neg\rho, \rho \vee \tau$ のときは IH より明らか.

- $\rho \equiv \mathbf{X}\rho$ のとき：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\pi), \pi \models \mathbf{X}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}(\pi), \pi^1 \models \rho \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}(\pi^1), \pi^1 \models \rho && \text{(Lem 3.5 より)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi^1 \models \rho^d && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi \models (\mathbf{X}\rho)^d
\end{aligned}$$

- $\rho \equiv \rho\mathbf{U}\tau$ のとき：$\mathbf{X}\rho$ のときと同様.
- $\rho \equiv \mathbf{A}\rho$ のとき：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\pi), \pi \models \mathbf{A}\rho &\Leftrightarrow \mathcal{M}(\pi), \pi \models \rho && \text{(}\pi\text{ は }\mathcal{M}(\pi)\text{ の唯一の path なので)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi \models \rho^d \equiv (\mathbf{A}\rho)^d && \text{(by IH)}
\end{aligned}$$

- $\rho \equiv {}^\forall p.\rho$ のとき：

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\pi), \pi \models {}^\forall p.\rho &\Leftrightarrow {}^\forall U_\pi \in D_\pi, (\mathcal{M}(\pi))^p_{U_\pi}, \pi \models \rho \\
&\Leftrightarrow {}^\forall U \in D, (\mathcal{M}^p_U)(\pi), \pi \models \rho \\
&\Leftrightarrow {}^\forall U \in D, \mathcal{M}^p_U, \pi \models \rho^d && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, \pi \models ({}^\forall p.\rho)^d
\end{aligned}$$

□

Remark. 3.8 **QLTL** の semantics を所謂 standard semantics, つまり常に $D = 2^S$ と定義すると Lem 3.7 は成り立たない. $\because$ $\mathcal{M}$ をただ 1 点のみからなる model, π を $\mathcal{M}$ の唯一のパス, $\rho := {}^\forall p.(p \to \mathbf{X}p)$ とすると $\mathcal{M}, \pi \models \rho^d$ だが $\mathcal{M}(\pi), \pi \not\models \rho$.

Theorem. 3.9 (Characterization theorem) φ が **QLTL** で表現可能 $\Leftrightarrow \varphi \simeq \mathbf{A}\varphi^d$

Proof. $\varphi \simeq \mathbf{A}\rho$ とする. $\mathbf{A}\rho \simeq \mathbf{A}\varphi^d$ を示す.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}\rho &\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}, \pi \models \rho \equiv \rho^d \\
&\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}(\pi), \pi \models \rho && \text{(Lem 3.7 より)} \\
&\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}(\pi), s_0 \models \mathbf{A}\rho && \text{(}\pi\text{ は }\mathcal{M}(\pi)\text{ の唯一の path なので)} \\
&\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}(\pi), s_0 \models \varphi && \text{(}\varphi \simeq \mathbf{A}\rho\text{ より)} \\
&\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}(\pi), \pi \models \varphi \\
&\Leftrightarrow {}^\forall\text{s-path } \pi, \mathcal{M}, \pi \models \varphi^d && \text{(Lem 3.7 より)} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}, s \models \mathbf{A}\varphi^d
\end{aligned}$$

□

Corollary. 3.10 **QLTL** の表現能力は $\mathbf{CTL}^*$ の表現能力よりも真に強くはならない.

Proof. Thm 3.9 より Ex 2.17 と同様に $\mathbf{AFAG}p$ が **QLTL** で表現不能なことが示せるため. □

4 Expressibility of $\mathbf{QK}, \mathbf{QK}^*$

本章から **QCTL** 周辺の論理の話題を扱う. まず $\mathbf{QK} = \mathbf{QK}^*$ という関係を示す. 尚, 本章以降の証明のアイデアは [LM14] に依っている.

4.1 Syntax

Definition. 4.1 (syntax of $\mathbf{QK}, \mathbf{QK}^*$) **QK** (Quantified **K**) の *formulae* を以下で定める：

$$\varphi, \psi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box\varphi \mid {}^{\forall}p.\varphi$$

ただし p は AP の上を走る命題変数を表す. **QK**-formula に $\Box^*\varphi$ を加えた体系を $\mathbf{QK}^*$ で表す. temporal modality $\Diamond, \Diamond^*$ を $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$, $\Diamond^*\varphi := \neg\Box^*\neg\varphi$ と定める.

4.2 Semantics

本章以降, Kripke model の transition relation に total という条件は課さなくてよい.

Definition. 4.2 (semantics of $\mathbf{QK}, \mathbf{QK}^*$) $\mathcal{M}$ を Kripke model, $s \in S$ を state, φ を $\mathbf{QK}^*$-formula とする. 充足関係 $\mathcal{M}, s \models \varphi$ を以下のように定める：

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, s \models p & :\Leftrightarrow & s \in V(p) \\
\mathcal{M}, s \models \neg\varphi & :\Leftrightarrow & \mathcal{M}, s \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi \vee \psi & :\Leftrightarrow & \mathcal{M}, s \models \varphi \text{ または } \mathcal{M}, s \models \psi \\
\mathcal{M}, s \models \Box\varphi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } sRs' \text{ に対して}, \mathcal{M}, s' \models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \Box^*\varphi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } sR^*s' \text{ に対して}, \mathcal{M}, s' \models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models {}^{\forall}p.\varphi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } U \in 2^S \text{ に対して}, \mathcal{M}^p_U, \pi \models \varphi
\end{array}$$

ただし R^* は R の reflexive transitive closure.

4.3 Fragments of $\mathbf{QK}$, $\mathbf{QK}^*$

本節では $\mathbf{QK}$, $\mathbf{QK}^*$ を制限した体系 $\mathbf{EQK}$, $\mathbf{EQK}^*$ 定義し, 表現能力が変わらないことを示す.

Definition. 4.3 (prenex normal form) **QK** (resp. $\mathbf{QK}^*$) の論理式を, propositional quantifier の出現が最外のものに制限した体系を **EQK** ($\mathbf{EQK}^*$) で表す.

Lemma. 4.4 $\Diamond_1\varphi := \Diamond\varphi \wedge {}^{\forall}p.(\Diamond(\varphi \wedge p) \to \Box(\varphi \to p))$ と定める. このとき以下が成り立つ：

$$\mathcal{M}, s \models \Diamond_1\varphi \Leftrightarrow \text{ある } sRs' \text{ がただ 1 つ存在し } \mathcal{M}, s' \models \varphi$$

Proof.

(⇒) 対偶で示す．$\mathcal{M}, s' \models \varphi$ となる sRs' が存在しない場合は $\mathcal{M}, s \not\models \Diamond\varphi$．ある sRs', sRs'' について $\mathcal{M}, s' \models \varphi$, $\mathcal{M}, s'' \models \varphi$ とする．$U := \{s'\}$ とすると $\mathcal{M}^p_U, s \models \Diamond(\varphi \wedge p)$ だが $\mathcal{M}^p_U, s'' \not\models p$ なので $\mathcal{M}^p_U, s \not\models {}^\forall p.(\Diamond(\varphi \wedge p) \to \Box(\varphi \to p))$.

(⇐) $\mathcal{M}, s' \models \varphi$ とする．$\mathcal{M}, s \models \Diamond\varphi$ は明らか．$U \in 2^S$ を任意にとり $\mathcal{M}^p_U, s \models \Diamond(\varphi \wedge p)$ とする．このとき s' の一意性より $s' \in U$ なので $\mathcal{M}^p_U, s \models \Box(\varphi \to p)$．よって $\mathcal{M}, s \models \Diamond_1\varphi$.

□

Theorem. 4.5 (QK = EQK) **EQK** は **QK** と同等の表現能力を持つ．すなわち, 任意の $\varphi \in \mathbf{QK}$ に対して $\widehat{\varphi} \in \mathbf{EQK}$ が存在し $\varphi \simeq \widehat{\varphi}$.

Proof. φ の構成に関する帰納法で示す．$\mathcal{Q} \in \{\exists, \forall\}$ とし, $\overline{\mathcal{Q}}$ をその双対とする．propositional connectives については $\neg\mathcal{Q}p.\varphi \simeq \overline{\mathcal{Q}}p.\neg\varphi$, $\mathcal{Q}_1 p_1.\varphi_1 \vee \mathcal{Q}_2 p_2.\varphi_2 \simeq \mathcal{Q}_1 p_1 \mathcal{Q}_2 p_2.(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ なので IH より従う (ただし p_1 は φ_2, p_2 は φ_1 に出現しない)．□ については $\widehat{\Box{}^\exists p.\varphi} := {}^\forall q.(\Diamond_1 q \to {}^\exists p.\Box(q \to \varphi))$ (ただし q は φ に現れない命題変数), $\widehat{\Box{}^\forall p.\varphi} := {}^\forall p.\Box\varphi$ とすればよい．∵ 任意の Kripke model $\mathcal{M}$, $s \in S$ について $\mathcal{M}, s \models \Box{}^\exists p.\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, s \models {}^\forall q.(\Diamond_1 q \to {}^\exists p.\Box(q \to \varphi))$ のみ示す.

(⇒) 対偶を示す．$\mathcal{M}, s \models {}^\exists q.(\Diamond_1 q \wedge {}^\forall p.\Diamond(q \wedge \neg\varphi))$ とする．このとき, ある $U \in 2^S$ について $\mathcal{M}^q_U, s \models \Diamond_1 q \wedge {}^\forall p.\Diamond(q \wedge \neg\varphi)$．特に $\mathcal{M}^q_U, s \models \Diamond_1 q$ より, ある sRs' について $U = \{s'\}$．このとき $\mathcal{M}, s' \models {}^\forall p.\neg\varphi$ が成り立つ, ∵ $U' \in 2^S$ を任意に取ると, $\mathcal{M}^{q}_{\{s'\}}{}^{p}_{U'}, s \models \Diamond(q \wedge \neg\varphi)$ なので $\mathcal{M}^{q}_{\{s'\}}{}^{p}_{U'}, s' \models \neg\varphi$．$q$ は φ に現れないので $\mathcal{M}^p_{U'}, s' \models \neg\varphi$．よって $\mathcal{M}, s' \models {}^\forall p.\neg\varphi$.

(⇐) sRs' を任意にとる．$\mathcal{M}, s' \models {}^\exists p.\varphi$ を示す．仮定より $\mathcal{M}^q_{\{s'\}}, s \models {}^\exists p.\Box(q \to \varphi)$．よって, ある $U \in 2^S$ が存在し $\mathcal{M}^{q}_{\{s'\}}{}^{p}_{U}, s \models \Box(q \to \varphi)$ なので $\mathcal{M}^{q}_{\{s'\}}{}^{p}_{U}, s' \models \varphi$．$\varphi$ に q は現れないので $\mathcal{M}^p_U, s' \models \varphi$．よって $\mathcal{M}, s' \models {}^\exists p.\varphi$.

□

Lemma. 4.6 $\Diamond^*_1\varphi := \Diamond^*\varphi \wedge {}^\forall p.(\Diamond^*(\varphi \wedge p) \to \Box^*(\varphi \to p))$ と定める．このとき以下が成り立つ：

$$\mathcal{M}, s \models \Diamond_1\varphi \Leftrightarrow \text{ある } sR^*s' \text{ がただ 1 つ存在し } \mathcal{M}, s' \models \varphi$$

Proof. Lem 4.4 と同様に示せる. □

Theorem. 4.7 (QK* = EQK*) **EQK*** は **QK*** と同等の表現能力を持つ．すなわち, 任意の $\varphi \in \mathbf{QK}^*$ に対して $\widehat{\varphi} \in \mathbf{EQK}^*$ が存在し $\varphi \simeq \widehat{\varphi}$.

Proof. Thm 4.5 と同様に示せる．$\Box^*$ については $\widehat{\Box^*{}^\exists p.\varphi} := {}^\forall q.(\Diamond^*_1 q \to {}^\exists p.\Box^*(q \to \varphi))$, $\widehat{\Box^*{}^\forall p.\varphi} := {}^\forall p.\Box^*\varphi$ とすればよい. □

4.4 QK < QK*

Definition. 4.8 (generated submodel) Kripke model $\mathcal{M} = \langle S, R, V\rangle$, $S' \subseteq S$ に対して $\mathcal{M}{\upharpoonright_{S'}} := \langle S', R \cap (S' \times S'), V \cap (\mathrm{AP} \times S')\rangle$ と定める．$n \geq 0$, $s \in S$ に対して $R^{\leq n}(s)$ を s から n-step 以下で遷移可能な状態の集合とし $\mathcal{M}^n_s := \mathcal{M}{\upharpoonright_{R^{\leq n}(s)}}$ と定める.

Definition. 4.9 (modal depth) $\varphi \in \mathbf{QK}$ の *modal depth* $\mathrm{md}(\varphi)$ を以下のように定める.

- $\mathrm{md}(p) := 0$
- $\mathrm{md}(\neg\varphi) := \mathrm{md}(\varphi)$
- $\mathrm{md}(\varphi \vee \psi) := \max(\mathrm{md}(\varphi), \mathrm{md}(\psi))$
- $\mathrm{md}(\Box\varphi) := \mathrm{md}(\varphi) + 1$
- $\mathrm{md}(^{\forall}p.\varphi) := \mathrm{md}(\varphi)$

Lemma. 4.10

$$\text{任意の } n \geq \mathrm{md}(\varphi) \text{ に対して}, \mathcal{M}, s \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}^n_s, s \models \varphi$$

Proof. φ の構成に関する帰納法で示す.

- $\varphi \equiv p$ のとき：明らか
- $\varphi \equiv \neg\varphi, \varphi \vee \psi, {}^{\forall}p.\varphi$ のとき：IH より明らか
- $\varphi \equiv \Box\varphi$ のとき：$n \geq \mathrm{md}(\Box\varphi) = \mathrm{md}(\varphi) + 1$ とする.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}, s \models \Box\varphi &\Leftrightarrow {}^{\forall}sRs', \mathcal{M}, s' \models \varphi \\
&\Leftrightarrow {}^{\forall}sRs', \mathcal{M}^{n-1}_{s'}, s' \models \varphi && \text{(by IH)} \\
&\Leftrightarrow {}^{\forall}sRs', \mathcal{M}^{n}_{s}, s' \models \varphi && (\because (\mathcal{M}^n_s)^{n-1}_{s'} = \mathcal{M}^{n-1}_{s'}) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M}^n_s, s \models \Box\varphi
\end{aligned}$$

□

Theorem. 4.11 (QK < QK*) **QK*** の表現能力は **QK** よりも真に強い. すなわち, $\Box^*\varphi \simeq \widehat{\varphi}$ を満たす $\widehat{\varphi} \in \mathbf{QK}$ は存在しない.

Proof. 背理法で示す. $\Box^* p \simeq \varphi$ となる $\varphi \in \mathbf{QK}$ が存在するとする. $\mathcal{M} := \langle \mathbb{N}, R, V \rangle$ とする. ただし $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $V(p) = \mathbb{N}$. このとき $\mathcal{M}, 0 \models \Box^* p \Leftrightarrow \mathcal{M}, 0 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{md}(\varphi)}_0, 0 \models \varphi$. $\mathcal{M}' := \langle \mathbb{N}, R, V' \rangle$, $V'(p) = \{0, \ldots, \mathrm{md}(\varphi)\}$ とすると $\mathcal{M}^{\mathrm{md}(\varphi)}_0 = \mathcal{M'}^{\mathrm{md}(\varphi)}_0$ なので $\mathcal{M}, 0 \models \Box^* p \Leftrightarrow \mathcal{M'}^{\mathrm{md}(\varphi)}_0, 0 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}', 0 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}', 0 \models \Box^* p$. これは明らかに矛盾. □

5 Expressibility of $\mathbf{QL}_\mu$

本章では $\mathbf{QK}^* = \mathbf{QL}_\mu$ を証明することで $\mathbf{QK}^* = \mathbf{QCTL} = \mathbf{QL}_\mu$ を示す. 本節及び次節の各主張の証明は省略して認めることとする.(詳細は [Kas22] を参照)

5.1 Syntax and Semantics

Definition. 5.1 (syntax of $\mathbf{QL}_\mu$) $\mathbf{QL}_\mu$ (Quantified modal μ calculus) の formulae を以下で定める：

$$\varphi, \psi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Box\varphi \mid \mu p.\varphi \mid {}^{\forall}p.\varphi$$

ただし $\mu p.\varphi$ の φ 中の p は positive に出現するとする (すなわち p は偶数個の $\neg$ の下にのみ現れる). fixpoint operator ν を $\nu p.\varphi := \neg\mu p.\neg\varphi[p := \neg p]$ と定める.

Definition. 5.2 (semantics of $\mathbf{QL}_\mu$) $\mathcal{M}$ を Kripke model, s を state, φ を $\mathbf{QL}_\mu$-formula とする. $s \in$

$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$ を以下のように定める：

$$
\begin{aligned}
[\![p]\!]_{\mathcal{M}} &:= V(p)\\
[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M}} &:= S \setminus [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}\\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{M}} &:= [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \cup [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}\\
[\![\Box\varphi]\!]_{\mathcal{M}} &:= \{s \in S \mid {}^{\forall}sRs', s' \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}\}\\
[\![\mu p.\varphi]\!]_{\mathcal{M}} &:= \bigcap\{U \mid [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}^p_U} \subseteq U\}\\
[\![{}^{\forall}p.\varphi]\!]_{\mathcal{M}} &:= \bigcap_{U \in 2^S} [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}^p_U}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M}, s \models \varphi :\Leftrightarrow s \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$ と定める．$\varphi \in \mathbf{QK}$ に対して, 今までの充足関係の定義と今定めたものは同値になる．

Definition. 5.3 (LFP, GFP)　函数 $F : 2^A \to 2^A$ に対して $F(X) = X$ を満たす点 X を F の不動点という．不動点の中で $\subseteq$ に関して最小 (resp. 最大) のものを (もし存在すれば) 最小不動点 (Least Fix Point)(最大不動点 (Greatest Fix Point)) といい, それぞれ LFP(F), GFP(F) で表す．

Lemma. 5.4

1. $[\![\mu p.\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{LFP}(\lambda U.[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}^p_U})$
2. $[\![\nu p.\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \mathrm{GFP}(\lambda U.[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}^p_U})$

5.2 Game semantics

任意の $\mathbf{QL}_\mu$-formula はそれと同値な否定標準形 (Negative Standard Form) を持つ．否定標準形とは次の形の論理式のことをいう：

$$\varphi, \psi :=\ p \mid \neg p \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \mu p.\varphi \mid \nu p.\varphi \mid {}^{\forall}p.\varphi \mid {}^{\exists}p.\varphi$$

本節では $\mathbf{QL}_\mu$-formula は全て否定標準形とする．

Definition. 5.5 (Game)　verifier $\exists$ と refuter $\forall$ の 2Player による *Game* を局面の集合 G と rule の組と定める．rule は局面から手番の player を定める函数 player : $G \to \{\exists, \forall\}$, player が指すことのできる手を定める函数 next : $G \to 2^G$ および play の勝敗定義から成る．ただし play とは局面の有限もしくは無限列 $a_0 a_1 \cdots a_n \cdots$ であって, ${}^{\forall}i \geq 0, a_i \in \mathrm{next}(a_{i+1})$ を満たすものをいう．

Definition. 5.6 (Evaluation Game)　Kripke model $\mathcal{M}$, $\mathbf{QL}_\mu$-formula φ に対して $\exists, \forall$ の 2Player による *Evaluation Game* $\mathcal{G}(\mathcal{M}, \varphi)$ を表 1 で定義する．ただし η は μ, ν のいずれか．勝敗は次のように決める．有限プレイの場合, リテラル ξ がその局面で真なら $\exists$, 偽なら $\forall$ の勝利．無限プレイの場合, 無限回現れる束縛変数の内, 最も外側の変数が μ-変数なら $\forall$, ν-変数なら $\exists$ の勝利．

Theorem. 5.7 (Adequacy theorem)　Kripke model $\mathcal{M}$, state s, $\mathbf{QL}_\mu$-formula φ に対して次が成り立つ：

$\mathcal{M}, s \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{M}, \varphi)$ において局面 (φ, s, V) から始まる $\exists$ の必勝戦略が存在する

Proof. φ の構成に関する帰納法で示す．ここでは $\varphi \equiv {}^{\forall}p.\varphi$ の場合のみ示す．

($\Rightarrow$) $\mathcal{M}, s \models {}^{\forall}p.\varphi$ とする．$\therefore {}^{\forall}U \in 2^S, \mathcal{M}^p_U, s \models \varphi$. IH より局面 (φ, s, V^p_U) から始まる $\exists$ の必勝戦略が存在する．よって $({}^{\forall}p.\varphi, s, V)$ において $\forall$ がどのような手を指しても $\exists$ は必勝．$\therefore \exists$ は $({}^{\forall}p.\varphi, s, V)$ からの必勝戦略を持つ．

表 1　$\mathcal{G}(\mathcal{M},\varphi)$ のルール

局面	手番	可能な指し手
(リテラル $\xi, \bullet, \bullet$)	-	-
$(\varphi \wedge \psi, s, V)$	$\forall$	$\{(\varphi, s, V), (\psi, s, V)\}$
$(\varphi \vee \psi, s, V)$	$\exists$	$\{(\varphi, s, V), (\psi, s, V)\}$
$(\Box\varphi, s, V)$	$\forall$	$\{(\varphi, t, V) \mid sRt\}$
$(\Diamond\varphi, s, V)$	$\exists$	$\{(\varphi, t, V) \mid sRt\}$
$(\eta x.\varphi, s, V)$	-	$\{(\varphi, s, V)\}$
(束縛変数 x, s, V)	-	$\{(\eta x.\varphi, s, V)\}$
$({}^{\forall}p.\varphi, s, V)$	$\forall$	$\{(\varphi, s, V^p_U) \mid U \in 2^S\}$
$({}^{\exists}p.\varphi, s, V)$	$\exists$	$\{(\varphi, s, V^p_U) \mid U \in 2^S\}$

($\Leftarrow$) $\exists$ は 局面 $({}^{\forall}p.\varphi, s, V)$ から始まる必勝戦略を持つとする．$\therefore$ 任意の $U \in 2^S$ に対して $\forall$ が (φ, s, V^p_U) という手を指しても $\exists$ はそこからの必勝戦略を持つ．よって IH より $\mathcal{M}^p_U, s \models \varphi$. $U \in 2^S$ は任意だったので $\mathcal{M}, s \models {}^{\forall}p.\varphi$.

$\Box$

5.3　$\mathbf{QK}^* = \mathbf{QL}_\mu$

Lemma. 5.8　$\mathcal{M}$ を Kripke model, s を state とする．$R^*(s)$ を s から有限ステップで遷移可能な状態な集合とし $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}\restriction_{R^*(s)}$ と定める．このとき任意の $\mathbf{QK}^*$-formula, $\mathbf{QL}_\mu$-formula φ に対して $\mathcal{M}, s \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_s, s \models \varphi$.

Proof. $\mathbf{QK}^*$-formula の場合は φ の構成に関する帰納法で簡単に示せる．$\mathbf{QL}_\mu$-formula に関しては Game semantics を考えれば明らか． $\Box$

Theorem. 5.9　$\mathbf{QL}_\mu$ と $\mathbf{QK}^*$ の表現能力は等しい．

Proof.

- $(\mathbf{QK}^* \leq \mathbf{QL}_\mu)$
  $\Box^*\varphi \simeq \nu p.(\varphi \wedge \Box p)$ が成り立つのでよい．
- $(\mathbf{QL}_\mu \leq \mathbf{QK}^*)$
  $\mu p.\varphi \simeq {}^{\exists}p.(p \wedge \Box^*(p \leftrightarrow \varphi(p)) \wedge {}^{\forall}q.(\Box^*(q \leftrightarrow \varphi(q)) \rightarrow \Box^*(p \rightarrow q)))$ が成り立つ．$\because\ \psi := p \wedge \psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 := \Box^*(p \leftrightarrow \varphi(p))$, $\psi_2 := {}^{\forall}q.(\Box^*(q \leftrightarrow \varphi(q)) \rightarrow \Box^*(p \rightarrow q))$ と定める．Lem 5.8 より $\mathcal{M}$ を Kripke model, s を state とし $\mathcal{M}_s, s \models \mu p.\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_s, s \models {}^{\exists}p.\psi$ を示せば十分．

($\Rightarrow$)

$s \in [\![\mu p.\varphi]\!]_{\mathcal{M}_s} =: U$ とする．Lem 5.4 より，

① $U = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U}$

② ${}^{\forall}U' = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_{U'}}, (U \subseteq U')$

が成り立つ．以下では $(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models \psi$ を示す．

1. $(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models p$
   仮定より明らか．

2. $(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models \psi_1$
   sR^*s' とする．$(\mathcal{M}_s)^p_U, s' \models p \leftrightarrow \varphi(p) \Leftrightarrow (s' \in U \Leftrightarrow s' \in [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U})$ だが，これは ① より成り立つ．
3. $(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models \psi_2$
   任意の sRs' に対して $(\mathcal{M}_s)^{p\,q}_{U\,U'}, s' \models q \leftrightarrow \varphi(q)$ となる $U' \in 2^S$ を取る．$(\mathcal{M}_s)^{p\,q}_{U\,U'}, s \models \Box^*(p \to q)$ を示せばよいが，② より $U \subseteq U'$ が成り立つことから従う．

$(\Leftarrow)$

$(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models \psi$ とする．$s \in U$, $U = \mathrm{LFP}(\lambda U.[\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U})$ すなわち：

① $U = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U}$

② ${}^\forall U' = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_{U'}}, (U \subseteq U')$

を示せばよい．$s \in U$ は $(\mathcal{M}_s)^p_U, s \models p$ より明らか．

① $U = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U}$
$s' \in U \Leftrightarrow (\mathcal{M}_s)^p_U, s' \models p \Leftrightarrow (\mathcal{M}_s)^p_U, s' \models \varphi(p)$ $((\mathcal{M}_s)^p_U, s \models \psi_1$ より$) \Leftrightarrow s' \in [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_U}$ なのでよい．

② ${}^\forall U' = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_{U'}}, (U \subseteq U')$
$U' = [\![\varphi]\!]_{(\mathcal{M}_s)^p_{U'}}$, $s' \in U$ とする．仮定より $(\mathcal{M}_s)^{p\,q}_{U\,U'}, s \models \Box^*(q \leftrightarrow \varphi(q)) \to \Box^*(p \to q)$ なので $(\mathcal{M}_s)^{p\,q}_{U\,U'}, s' \models p \to q$．よって $s' \in U'$．$\therefore U \subseteq U'$．

□

5.4 QK* = QCTL

Definition. 5.10 (syntax and semantics of **QCTL)** **QCTL**(Quantified Computational Tree Logic) の formulae を以下で定める：

$$\varphi := \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \mathbf{AX}\varphi \mid \mathbf{EG}\varphi \mid \varphi\mathbf{EU}\psi \mid {}^\forall p.\varphi$$

$\mathcal{M}$ を total な Kripke model (すなわち ${}^\forall s \in S\ {}^\exists s' \in S, sRs'$), $s \in S$ を state, φ を **QCTL**-formula とする．充足関係 $\mathcal{M}, s \models \varphi$ は以下のように定める：

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}\varphi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } sRs' \text{ に対して}, \mathcal{M}, s' \models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}\varphi & :\Leftrightarrow & \text{ある } s\text{-path } (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ が存在し}, {}^\forall i \in \mathbb{N}, \mathcal{M}, s_i \models \varphi \\
\mathcal{M}, s \models \varphi\mathbf{AU}\psi & :\Leftrightarrow & \text{任意の } s\text{-path } (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ に対して}, {}^\exists j \geq 0,\ 0 \leq {}^\forall i < j,\ \mathcal{M}, s_j \models \psi \text{ and } \mathcal{M}, s_i \models \varphi
\end{array}$$

Theorem. 5.11 **QCTL** と **QK*** の表現能力は等しい．

Proof. $\mathbf{EG}\varphi \simeq \nu p.(\varphi \wedge \Diamond p)$, $\varphi\mathbf{EU}\psi \simeq \mu p.(\psi \vee (\varphi \wedge \Diamond p))$ が成り立つことと Thm 5.9 より． □

6 Conclusion & Future work

本稿で考察した Quantified Temporal Logic の表現能力の強さは Cor 2.18, Cor 3.10, Thm 4.5, Thm 4.7, Thm 5.9, Thm 5.11 より以下のようにまとめられる．比較のため 1 階の場合の関係を併記した：

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{QLTL} < \mathbf{QCTL}^* & \quad & (\mathbf{EQK} =)\ \mathbf{QK} < (\mathbf{EQK}^* =)\ \mathbf{QK}^* = \mathbf{QCTL} = \mathbf{QL}_\mu \\
\mathbf{LTL} < \quad \mathbf{CTL}^* & \quad & \mathbf{K} < \qquad\qquad \mathbf{K}^* < \quad \mathbf{CTL} < \quad \mathbf{L}_\mu
\end{array}
$$

今後の課題としては, Rem 3.8 から分かるように, 本稿の Thm 3.9 の証明をそのまま standard model の場合に変更することはできない, ということが挙げられる. そのため, これを示す場合は異なるアプローチが必要であると思われる. また, [CD88] には **CTL** に関する特徴づけ定理も述べられているが, 特殊な条件下での特徴づけであるので, その条件を外した一般的な主張での証明の完成も課題として挙げられる.

References

[BHL18] Francesco Belardinelli, Wiebe van der Hoek, Louwe B. Kuijer, *'Second-order propositional modal logic: Expressiveness and completeness results'*, Artificial Intelligence, Volume 263, Pages 3-45, 2018

[BK08] Baier. Christel, Joost-Pieter Katoen, *'Principles of model checking'*, MIT press, 2008

[Cat06] Balder Ten Cate, *'Expressivity of second order propositional modal logic'*, Journal of Philosophical Logic 35.2 : 209-223, 2006

[CD88] E. M. Clarke, I. A. Draghicescu, *'Expressibility results for linear time and branching time logics'*, J. W. de Bakker, W.-P. de Roever, G. Rozenberg, editors, Linear Time, Branching Time, and Partial Order in Logics and Model for Concurrency, Volume 354, pages 428–437, Springer-Verlag 1988

[Cla18] E. M. Clarke, et al, *'Model checking'*, MIT press, 2018

[Coe20] Norine Coenen, et al, *'The Hierarchy of Hyperlogics: A Knowledge Reasoning Perspective'*, 2020

[FR03] T. French, M. Reynolds, *'A sound and complete proof system for QPTL'* In Proceedings of the 4th Workshop on Advances in Modal Logic (AIML' 02), Pages 127-148, King's College Publications, 2003

[FT15] Bernd Finkbeiner, Leander Tentrup *'Detecting Unrealizability of Distributed Fault-tolerant Systems'*, Logical Methods in Computer Science 11, 2015

[HR04] Michael Huth, and Mark Ryan, *'Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems'*, Cambridge university press, 2004

[JW96] D. Janin, I. Walukiewicz, *'On the expressive completeness of the propositional μ calculus with respect to monadic second order logic'*, In proc of CONCUR '96, LNCS Volume 1119, Pages 263-277, 1996

[Kas22] Ryo Kashima, 'コンピュータサイエンスにおける様相論理', 森北出版, 2022

[KP02] Y. Kesten, A. Pnueli, *'Complete proof system for QPTL'*, Journal of Logic and Computation 12(5):701-745, 2002

[LM14] F. Laroussinie, N. Markey, *'Quantified CTL: expressiveness and complexity'*, Logical Methods in Computer Science, Volume 10, 2014

[LMS02] Francois Laroussinie, Nicolas Markey, Philippe Schnoebelen, *'Temporal logic with forgettable past'*, Proceedings 17th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. IEEE, 2002

[LS00] Francois Laroussinie, Philippe Schnoebelen, *'Specification in CTL+ past for verification in CTL'*, Information and Computation 156.1-2: 236-263, 2000

[Mad90] Dam Mads, *'Translating CTL* Into the Modal μ-Calculus'*, LFCS, Department of Computer Science, University of Edinburgh, 1990

[Oka10] Keishi Okamoto, *'Comparing Expressiveness of First-Order Modal μ-calculus and First-Order CTL*'*, 数理解析研究所講究録, Volume 1708, Pages 1-14, 2010

[Sti96] Colin Stirling, *'Games and modal mu-calculus'*, International Workshop on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996

[Var88] Moshe Y. Vardi, *'A temporal fixpoint calculus'*, Proceedings of the 15th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages, 1988