

# 合流性と Z 性について

群馬大学理工学府 赤坂 陸来\*

Riku Akasaka

Department of Computer Science,  
Gunma University

群馬大学理工学府 藤田 憲悦†

Ken-etsu Fujita

Department of Computer Science,  
Gunma University

名古屋大学大学院情報学研究科 中澤 巧爾

Koji Nakazawa

Graduate School of Informatics  
Nagoya University

## 1 はじめに

抽象書き換え系には合流性や停止性などの重要な性質が存在する。合流性を証明する手段として、Z 性とよばれる性質を利用したものが知られている。本論文は、前半では Z 性を中心とした基本概念の相互関係について、V. van Oostrom[1] にしたがって調査したものを述べる。後半では Z 性を拡張した合成的 Z 定理について、Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita[2] より例を用いて紹介する。

## 2 準備

本節では、抽象書き換え系と例として用いる  $\lambda$  計算について、本論文で使用する記号を含め定義を述べる。

### 2.1 抽象書き換え系

抽象書き換え系は、任意の集合  $A$  と  $A$  上の二項関係  $\rightarrow$  の対  $(A, \rightarrow)$  である。  $a, b, c, \dots$  を集合  $A$  の要素とし、  $(a, b) \in \rightarrow$  のとき、  $a \rightarrow b$  と表し  $a$  から  $b$  への簡約という。  $a \rightarrow b$  を満たすような  $b$  が存在しないとき  $a$  は正規形であるという。  $\rightarrow$  の反射推移閉包を  $\twoheadrightarrow$ 、推移閉包を  $\rightarrow^+$  と表す。

### 2.2 簡約列

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  が与えられたとき、  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$  のような有限もしくは無限列を  $\rightarrow$  についての簡約列という。 とくに、  $a, b \in A$  について、  $a$  から始まる簡約列を  $a$  の簡約列、  $a$  から始まって  $b$  で終わる簡約列を  $a$  から  $b$  の簡約列という。 また、  $\sigma : a \twoheadrightarrow b$  と表記するとき  $\sigma$  は  $a$  から  $b$  の任意の簡約列を示す。

\*本研究は京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである。

†本研究の一部は KAKENHI(C)20K03711 の援助を受けたものである。

## 2.3 λ計算

### 2.3.1 λ項

$\Lambda$ をλ項の集合とし、以下のように定義する。

定義 1 (λ項)

1. 変数  $x, y, z, \dots$  はλ項である。
2.  $M$  がλ項であり、 $x$  が変数のとき  $(\lambda x.M)$  はλ項である。
3.  $M, N$  がλ項のとき  $(MN)$  はλ項である。

$(\lambda x.M)$  という形を関数抽象、 $(MN)$  という形を関数適用という。また、関数抽象  $(\lambda x.M)$  の  $M$  の中に変数  $x$  現れたとき、 $x$  は束縛されているという。束縛されている変数のことを束縛変数と呼び、束縛されていない変数を自由変数と呼ぶ。λ項  $M$  に含まれる自由変数の集合を  $FV(M)$  と表す。

### 2.3.2 β簡約 ( $\rightarrow_\beta$ )

$(\lambda x.M)N$  という形のλ項を  $M[x := N]$  に書き換えることをβ簡約と言い、 $M$  をβ簡約して  $M'$  を得るとき  $M \rightarrow_\beta M'$  と表記する。β簡約の反射推移閉包を  $\rightarrow_\beta$ 、推移閉包を  $\rightarrow_\beta^+$  と表す。 $(\lambda x.M)N$  という形の項をβ基 ( $\beta$ -redex) と言い、β基を含まないλ項 (それ以上β簡約できないλ項) をβ正規形という。

また、 $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  の同値関係を  $=_\beta$  で表し以下のように定義する。

定義 2 ( $\rightarrow_\beta$  の同値関係)

1.  $M \rightarrow_\beta N$  ならば  $M =_\beta N$
2.  $M =_\beta N$  ならば  $N =_\beta M$
3.  $M =_\beta N$  かつ  $N =_\beta L$  ならば  $M =_\beta L$

## 3 抽象書き換え系に関する性質

### 3.1 合流性と Church-Rosser の定理

定義 3 (合流性)

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  について、以下の性質を満たすとき  $(A, \rightarrow)$  は合流性をもつという。

$$\forall a, a_1, a_2 \in A, a \rightarrow a_1 \text{ かつ } a \rightarrow a_2 \implies \exists a_3 \in A, a_1 \rightarrow a_3 \text{ かつ } a_2 \rightarrow a_3$$

合流性はラムダ計算において成立し、関連した性質として Church-Rosser の定理が成立する。

定理 4 ( $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  の合流性)

$$\forall M, M_1, M_2 \in \Lambda, M \rightarrow_\beta M_1 \text{ かつ } M \rightarrow_\beta M_2 \implies \exists M_3 \in \Lambda, M_1 \rightarrow_\beta M_3 \text{ かつ } M_2 \rightarrow_\beta M_3$$

定理 5 (Church-Rosser の定理)

$$\forall M, N \in \Lambda, M =_\beta N \implies \exists L \in \Lambda, M \rightarrow_\beta L \text{ かつ } N \rightarrow_\beta L$$

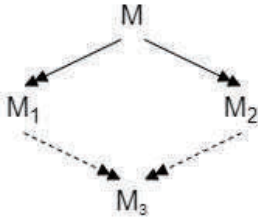
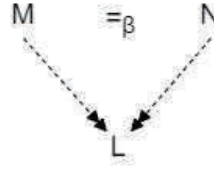
図 1:  $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  の合流性

図 2: Church-Rosser の定理

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  が定理 4 を満たすことを  $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  は CR 性をもつという。

定理 6 合流性と Church-Rosser の定理について、以下のことが言える。

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  が合流性をもつ  $\iff (\Lambda, \rightarrow_\beta)$  が CR 性をもつ

証明

( $\implies$ )

$=_\beta$  の定義に沿った帰納法により証明する。

1.  $M =_\beta N$  が  $M \rightarrow_\beta N$  から定義されるとき：  
 $M \rightarrow_\beta N, N \rightarrow_\beta N$  より成立する。
2.  $M =_\beta N$  が  $N =_\beta M$  から定義されるとき：  
 帰納法の定義から、ある  $L$  が存在し、 $N \rightarrow_\beta L, M \rightarrow_\beta L$  となる。
3.  $M =_\beta N$  が  $M =_\beta N', N' =_\beta N$  から定義されるとき：  
 帰納法の定義から、ある  $M_1, M_2$  が存在し、それぞれ  $M \rightarrow_\beta M_1$  かつ  $N' \rightarrow_\beta M_1, N' \rightarrow_\beta M_2$  かつ  $N \rightarrow_\beta M_2$  となる。さらに合流性より、ある  $M_3$  が存在し、 $M_1 \rightarrow_\beta M_3$  かつ  $M_2 \rightarrow_\beta M_3$  となる。つまり  $M \rightarrow_\beta M_3, N \rightarrow_\beta M_3$  となる  $M_3$  が存在する。

( $\impliedby$ )

任意の  $M, M_1, M_2$  に対して、 $M \rightarrow_\beta M_1, M \rightarrow_\beta M_2$  を仮定する。 $=_\beta$  の定義より  $M_1 =_\beta M_2$  である。定理 5 より、 $M_1 \rightarrow_\beta M_3, M_2 \rightarrow_\beta M_3$  となる  $M_3$  が存在する。

□

### 3.2 Triangle-property

定義 7 (Triangle-property)

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $f$  について、以下の性質を満たすとき関係  $\rightarrow$  は Triangle-property をもつという。

任意の  $a, b \in A$  について、 $a \rightarrow b \implies b \rightarrow f(a)$

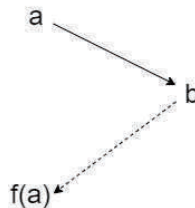


図 3: Triangle-property

例題 8 ( $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  における *Triangle-property*)

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  について, 並行簡約という二項関係と写像  $*$  (*complete-development*) を定義する.

定義 9 (並行簡約  $\Rightarrow_\beta$ )

1.  $x \Rightarrow_\beta x$
2.  $M \Rightarrow_\beta M'$  ならば  $\lambda x.M \Rightarrow_\beta \lambda x.M'$
3.  $M \Rightarrow_\beta M'$  かつ  $N \Rightarrow_\beta N'$  ならば  $(MN) \Rightarrow_\beta (M'N')$
4.  $M \Rightarrow_\beta M'$  かつ  $N \Rightarrow_\beta N'$  ならば  $(\lambda x.M)N \Rightarrow_\beta M'[x := N']$

定義 10 (写像  $*$  (*complete-development*))

1.  $x^* = x$
2.  $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$
3.  $((\lambda x.M)N)^* = M^*[x := N^*]$
4.  $(LN)^* = L^*N^*$  (ただし  $L$  は関数抽象以外の  $\lambda$  項)

$\forall M \in \Lambda$  について, 並行簡約は  $M$  の中に存在する  $\beta$  基を任意の数同時に簡約できる関係であり, 写像  $*$  は  $M$  中の  $\beta$  基をすべて簡約した  $\lambda$  項を返すような写像である. また,  $\Rightarrow_\beta$  は  $\rightarrow_\beta \subset \Rightarrow_\beta \subset \rightarrow_\beta$  といった大小関係となる. 並行簡約と写像  $*$  を定義することで次の命題が成り立つことが分かる.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{ について, } M \Rightarrow_\beta N \implies N \Rightarrow_\beta M^*$$

つまり, 並行簡約  $\Rightarrow_\beta$  は *Triangle-property* を満たす.

### 3.3 Cofinality

定義 11 (戦略)

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  において, 戦略  $F$  とは次の性質を満たす  $A$  から  $A$  への写像である.

1.  $a \equiv F(a)$       $a$  が正規形である場合
2.  $a \rightarrow^+ F(a)$      その他

$a$  が正規形でないとき,  $a$  から  $F(a)$  を求める際,  $a \rightarrow F(a)$  のとき  $F$  は 1 ステップ戦略,  $a \rightarrow^+ F(a)$  のとき  $F$  は多ステップ戦略と呼ぶ.

定義 12 ( $\rightarrow_F$ )

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と戦略  $F$  があり,  $a \rightarrow^+ F(a)$  のとき,  $a \rightarrow_F F(a)$  と書く.

定義 13 (*Cofinality*)

戦略  $F$  が以下の性質を満たすとき戦略  $F$  は *cofinal* である.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies \text{ある } n (\geq 1) \text{ が存在し, } b \rightarrow F^n(a)$$

定義 14 (*Hyper-Cofinality*)

任意の  $a, b \in A$  と  $A$  上の戦略  $F$  について, 最終的には常に簡約  $\rightarrow_F$  を含む  $a$  の任意の簡約列を  $\sigma$  とする. 以下の性質を満たすとき, 戦略  $F$  は *hyper-cofinal* である.

$$a \rightarrow b \implies \sigma \text{ 上の } c \text{ が存在し, } b \rightarrow c$$

### 3.4 Z 性

**定義 15** (Z 性)[Z] 抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  について, 次の性質を満たす  $A$  上の写像  $f$  が存在するとき, 写像  $f$  は Z 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \rightarrow f(a) \rightarrow f(b)$$

**例題 16**  $(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  における Z 性)

$(\Lambda, \rightarrow_\beta)$  について, 3.2 節で導入した写像  $*$  は Z 性を満たす写像である. つまり, 次の命題が成り立つ.

$$\text{任意の } M, N \in \Lambda \text{ について, } M \rightarrow_\beta N \implies N \rightarrow_\beta M^* \rightarrow_\beta N^*$$

証明

$M$  の構造に関する帰納法により  $M \rightarrow_\beta N \implies N \rightarrow_\beta M^* \rightarrow_\beta N^*$  を証明する.

1.  $M$  が関数抽象  $(\lambda x.M_1)$  のとき:

$M = \lambda x.M_1 \rightarrow_\beta \lambda x.N_1 = N$  と仮定すると, 帰納法の仮定より,  $N_1 \rightarrow_\beta M_1^* \rightarrow_\beta N_1^*$  となる. 従って,  $\lambda x.N_1 \rightarrow_\beta \lambda x.M_1^* (= (\lambda x.M_1)^*) \rightarrow_\beta \lambda x.N_1^* (= (\lambda x.N_1)^*)$  である.

2.  $M$  が関数適用  $M_1M_2$  のとき:

2-1  $M_1M_2 = (\lambda x.M_0)M_2 \rightarrow_\beta M_0[x := M_2] = N$  の場合:

$N = M_0[x := M_2] \rightarrow_\beta M_0^*[x := M_2^*] (= ((\lambda x.M_0)M_2)^* = M^*) \rightarrow_\beta M_0[x := M_2]^* = N^*$  となる.

2-2  $M = M_1M_2 \rightarrow_\beta N_1N_2 = N$  の場合:

$M_1 \rightarrow_\beta N_1 (M_2 = N_2)$  もしくは  $M_2 \rightarrow_\beta N_2 (M_1 = N_1)$  となる. それぞれの場合において帰納法の仮定より,  $N_i \rightarrow_\beta M_i^* \rightarrow_\beta N_i^* (i = 1, 2)$  である.  $M_1$  が関数抽象で  $M_1^* = \lambda x.M'_0$  であれば,  $M'_0 \rightarrow_\beta N'_0$  となる  $N'_0$  について  $N_1^* = \lambda x.N'_0$  となる. よって,

$$\begin{aligned} N_1N_2 &\rightarrow_\beta M_1^*M_2^* = M'_0[x := M_2^*] \\ &\rightarrow_\beta M'_0[x := M_2^*] (= (M_1M_2)^*) \\ &\rightarrow_\beta N'_0[x := N_2^*] (= (N_1N_2)^*) \end{aligned}$$

その他の場合,  $N_1N_2 \rightarrow_\beta M_1^*M_2^* \rightarrow_\beta N_1^*N_2^*$  となる.  $N_1$  が関数抽象で  $N_1^* = \lambda x.N'_0$  のとき,  $N_1^*N_2^* = (\lambda x.N'_0)N_2^* \rightarrow_\beta N'_0[x := N_2^*] = (N_1N_2)^*$  である. それ以外は  $N_1^*N_2^* = (N_1N_2)^*$  となる.  $\square$

## 4 相互関係

本節では, 3 節で挙げた 5 つの概念について, それらの相互関係を述べる.

### 4.1 Z 性と合流性

Z 性と合流性について次のことが成立する.

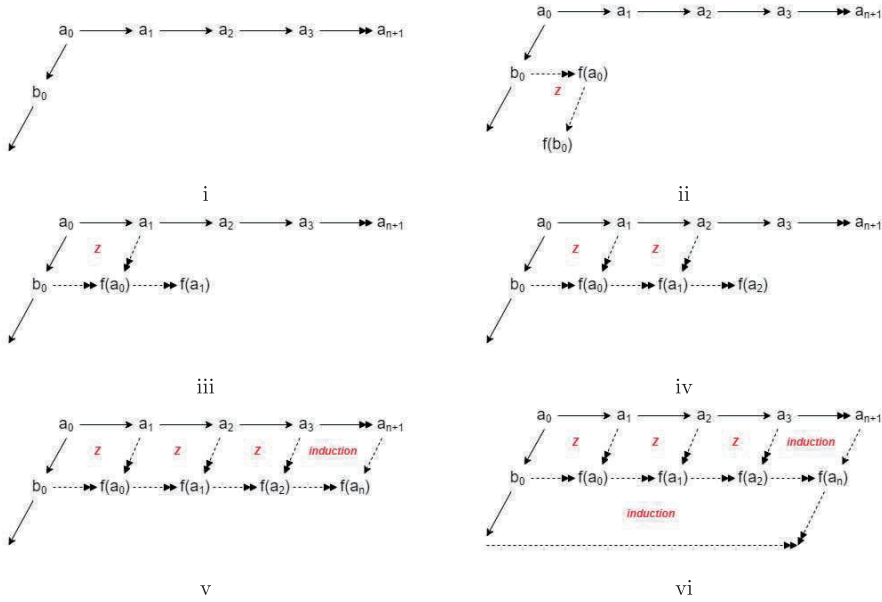
**定理 17** (Z 定理)

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $f$  が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が Z 性を満たす} \implies (A, \rightarrow) \text{ は合流性をもつ}$$

証明

$a \in A$  から分岐した任意の項について, Z 性を帰納的に用いることで下図のように示すことができる.



□

### 4.2 Z 性と Cofinality

Z 性と Cofinality について次のことが成立する.

**定理 18**

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $f$  が与えられたとき,

写像  $f$  が Z 性を満たす  $\implies$  戦略  $f$  は cofinal である

証明

$a$  の簡約列上の任意の項  $b_n$  について, ある  $k$  が存在し,  $b_n \rightarrow f^k(a)$  となればよい. Z 性より  $a \rightarrow b_0 \rightarrow b_1$  のとき,  $b_0 \rightarrow f^1(a)$ ,  $b_1 \rightarrow f^1(b_0)$  である.  $b_0 \rightarrow f^1(a)$  なので Z 性より,  $f^1(b_0) \rightarrow f^2(a)$  となる. 同様に考えると,  $a$  の簡約列上の任意の項  $b_n$  について  $b_n \rightarrow f^k(a)$  となる.

□

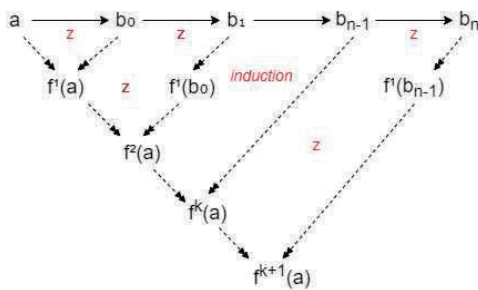


図 4: Z 性  $\implies$  Cofinality

4.3 「Z性  $\Leftarrow$  合流性」, 「Z性  $\Leftarrow$  *Cofinality*」の反例

以下のような項書き換えは, Z性  $\Leftarrow$  合流性, Z性  $\Leftarrow$  *Cofinality* の反例となる.

- $i \rightarrow i + 1 (\forall i \in \mathbb{Z})$
- $-(n + 1) \rightarrow n + 1 (\forall n \in \mathbb{N})$

証明

Z性を満たす写像  $*$  が存在すると仮定する.  $0^* = n (n > 0)$  であり, 書き換え規則より,  $-(n + 1) \rightarrow 0$ ,  $-(n + 1) \rightarrow n + 1$  となるので, それぞれ Z性より,  $-(n + 1)^* \rightarrow 0^*$ ,  $n + 1 \rightarrow -(n + 1)^*$  である. つまり,  $n + 1 \rightarrow 0^* = n$  となり, 書き換え規則に矛盾する.

□

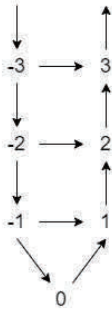


図 5: 「Z性  $\Leftarrow$  合流性」, 「Z性  $\Leftarrow$  *Cofinality*」の反例

4.4 Z性と *Hyper-Cofinality*

Z性と *Hyper-Cofinality* について次のことが成立する.

定理 19

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $f$  が与えられたとき,

$$\text{写像 } f \text{ が Z性を満たす} \implies \text{戦略 } f \text{ は hyper-cofinal である}$$

証明

$a \rightarrow b$  となる任意の  $a, b \in A$  と, 最終的には常に簡約  $\rightarrow_f$  を含むような  $a$  の簡約列  $\sigma$  が与えられたときに,  $\sigma$  に合流する  $b$  の簡約列  $\delta$  が存在することを示す.  $\sigma$  は正規形で終わるか,  $a$  から  $c$  の簡約列  $\sigma_1$  と,  $c \rightarrow_f f(c)$  と,  $f(c)$  の簡約列  $\sigma_2$  に分けられる.  $a \rightarrow b, a \rightarrow c$  なので, それぞれ Z性より  $b \rightarrow f(a), f(a) \rightarrow f(c)$  である. つまり,  $c \rightarrow d \rightarrow f(c)$  となる  $d$  が存在し,  $\delta_1 : b \rightarrow d$  が考えられる.  $c$  が正規形の場合,  $\delta := \delta_1$  とし, その他の場合,  $\delta_1$  と  $c \rightarrow f(c)$  と  $\sigma_2$  を合わせたものを  $\delta$  とすることで  $\delta$  は  $\sigma$  に合流する  $b$  の簡約列である.

□

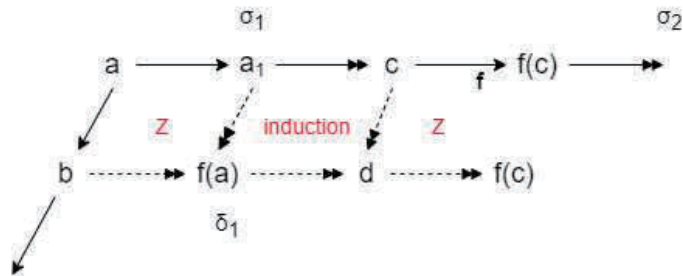


図 6:  $Z$  性  $\implies$  *Hyper-Cofinality*

#### 4.5 $Z$ 性と *Triangle-property*

$Z$  性と *Triangle-property* について次のことが成立する.

##### 定理 20

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $f$  が与えられたとき,

写像  $f$  が  $Z$  性を満たす

$\iff$

ある関係  $\rightarrow_t$  が存在し, 次の性質を満たす.

**T1.**  $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \rightarrow$

**T2.**  $a \rightarrow_t b \implies b \rightarrow_t f(a)$

証明

( $\implies$ )

$a \rightarrow b \rightarrow f(a)$  のとき,  $a \rightarrow_t b$  と定義する.  $\rightarrow_t$  が T1, T2 を満たすことを示す.

(T1)  $a \rightarrow b$  ならば  $Z$  性より,  $a \rightarrow b \rightarrow f(a)$  である. よって  $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t$  である.  $a \rightarrow_t b$  ならば, 明らかに  $a \rightarrow b$  である. よって  $\rightarrow_t \subseteq \rightarrow$  である. 以上より,  $\rightarrow \subseteq \rightarrow_t \subseteq \rightarrow$  の関係が得られる.

(T2)  $a \rightarrow_t b$  と仮定すると  $\rightarrow_t$  の定義から  $a \rightarrow b \rightarrow f(a)$  となり,  $Z$  性より  $f(a) \rightarrow f(b)$  である.  $b \rightarrow f(a) \rightarrow f(b)$  となるので  $\rightarrow_t$  の定義から  $b \rightarrow_t f(a)$  である. 従って,  $a \rightarrow_t b$  ならば  $b \rightarrow_t f(a)$  となり T2 が成り立つ.

( $\impliedby$ )

$a \rightarrow b$  を仮定すると, T1, T2 より  $a \rightarrow_t b \rightarrow_t f(a)$  となる.  $b \rightarrow_t f(a)$  なので T2 より,  $b \rightarrow_t f(a) \rightarrow_t f(b)$  となる. T1 より,  $b \rightarrow f(a) \rightarrow f(b)$  である. 従って,  $a \rightarrow b$  ならば  $b \rightarrow f(a) \rightarrow f(b)$  となり,  $Z$  性が示された.

□

#### 4.6 合流性と *Cofinality*

合流性と *Cofinality* について次のことが成立する.

##### 定理 21

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  と  $A$  上の写像  $F$  が与えられたとき,

戦略  $F$  が *cofinal*  $\implies (A, \rightarrow)$  は合流性をもつ.



証明

$a_1 \leftarrow a \rightarrow a_2$  となる任意の  $a, a_1, a_2 \in A$  について. 戦略  $F$  は *cofinal* なので, ある  $n, m$  が存在し,  $a_1 \rightarrow F^n(a)$  かつ  $a_2 \rightarrow F^m(a)$  となる.  $k = \max(n, m)$  とすると,  $F^n(a) \rightarrow F^k(a) \leftarrow F^m(a)$  である. 従って,  $a_1 \rightarrow F^k(a) \leftarrow a_2$  となり合流性が成立する.

□

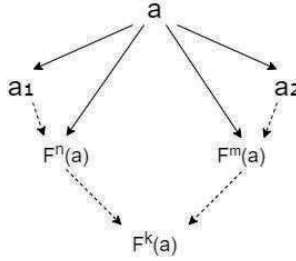


図 7: 合流性  $\implies$  Cofinality

## 5 合成的 Z 定理

### 5.1 弱 Z 性

定義 22 (弱 Z 性)

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  について,  $\rightarrow_x$  を  $A$  上の関係とし, その反射推移閉包を  $\rightarrow_x^*$  とする. 次の性質を満たす  $A$  上の写像  $f$  が存在するとき, 写像  $f$  は弱 Z 性を満たすという.

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ について, } a \rightarrow b \implies b \rightarrow_x^* f(a) \rightarrow_x^* f(b)$$

### 5.2 合成的 Z 定理

定理 23 (合成的 Z 定理)[2]

抽象書き換え系  $(A, \rightarrow)$  について,  $\rightarrow = \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$  とする. 次の性質を満たす  $A$  上の写像  $f_1, f_2$  が存在するとき, 合成写像  $f_2 \circ f_1$  は Z 性を満たす.

1.  $\rightarrow_1$  について,  $f_1$  が Z 性を満たす.
2.  $a \rightarrow_1 b$  となるとき  $f_2(a) \rightarrow f_2(b)$  である.
3. 任意の  $a \in \text{Im}(f_1)$  について,  $a \rightarrow f_2(a)$  である.
4.  $\rightarrow_2$  について,  $f_2 \circ f_1$  が弱 Z 性を満たす.

図 8 が上の性質を図示したものであり, 合成写像  $f_2 \circ f_1$  が Z 性を満たすことが確認できる.

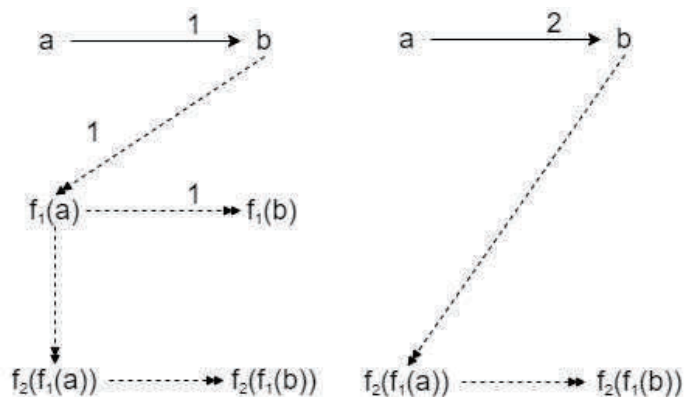


図 8: 合成的 Z 定理

**例題 24** ( $\lambda\mu$ 計算) [2]

以下のような項と簡約規則からなる  $\lambda\mu$ 計算 の体系を定義する.

**定義 25** ( $\lambda\mu$ 計算)

項:  $M ::= x \mid (\lambda x.M) \mid (MM) \mid (\mu\alpha.M) \mid ([\alpha]M)$

簡約規則:

1.  $(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]$
2.  $(\mu\alpha.M)N \rightarrow_S M[[\alpha]w := [\alpha](wN)]$
3.  $[\alpha](\mu\beta.M) \rightarrow_R M[\beta := \alpha]$
4.  $\mu\alpha.[\alpha]M \rightarrow_{\mu\eta} M \ (\alpha \notin FV(M))$

この体系で  $Z$ 性をみたく写像を求めるとき、例題 16 と同様と考えて、どれかの簡約規則を優先させる写像を考えたとしても  $Z$ 性を満たさない。そこで、 $\rightarrow_1 = \rightarrow_{\mu\eta}$ ,  $\rightarrow_2 = \rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_S \cup \rightarrow_R$  として、以下のような写像  $*^1, *^2$  を与える。すると、写像  $*^1, *^2$  が合成的  $Z$ の性質を満たし、合成写像  $*^2 \circ *^1$  が  $Z$ 性を満たすことが分かり、上の体系の合流性が示せる。

**定義 26** (写像 $*^1$ )

1.  $x^{*^1} = x$
2.  $(\lambda x.M)^{*^1} = \lambda x.M^{*^1}$
3.  $(MN)^{*^1} = (M^{*^1}N^{*^1})$
4.  $(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*^1} = M^{*^1} \ (\alpha \notin FV(M))$
5.  $(\mu\alpha.M)^{*^1} = \mu\alpha.M^{*^1}$
6.  $([\alpha]M)^{*^1} = [\alpha]M^{*^1}$

**定義 27** (写像 $*^2$ )

1.  $x^{*^2} = x$
2.  $(\lambda x.M)^{*^2} = \lambda x.M^{*^2}$

3.  $((\lambda x.M)N)^{*2} = M^{*2}[x := N^{*2}]$
4.  $((\mu\alpha.M)N)^{*2} = \mu\alpha.M^{*2}[[\alpha]w := [\alpha](wN^{*2})]$
5.  $(MN)^{*2} = (M^{*2}N^{*2})$
6.  $(\mu\alpha.M)^{*2} = \mu\alpha.M^{*2}$
7.  $([\alpha](\mu\beta.M)N)^{*2} = M^{*2}[[\beta]w := [\alpha](wN^{*2})]$
8.  $([\alpha]M)^{*2} = [\alpha]M^{*2}$

## 6 まとめ

文献 [1] [5] に従って、相互関係を図9のように整理することができる。また、Z性を拡張した合成的 Z 定理では、簡約規則が複数ある体系で Z 性を満たす写像が直接与えることが出来なくても、簡約規則を分けて考えることで Z 性を満たす写像について考えることができる。

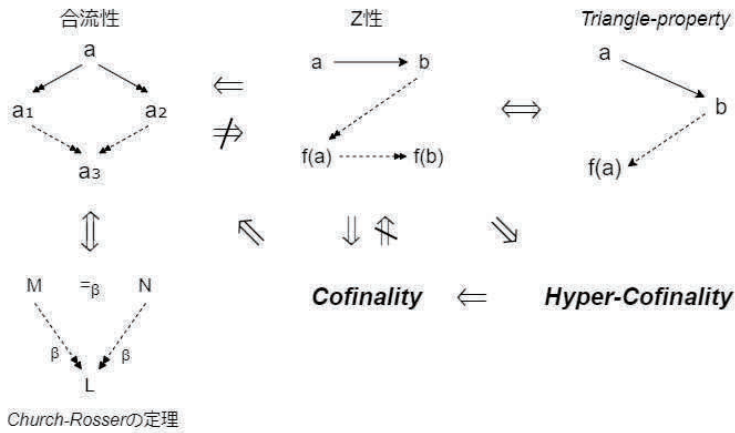


図 9: 5つの概念の相互関係

## 参考文献

- [1] V. van Oostrom, Z; Syntax-Free Developments, 6th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2021) Article No.24 pp.24:1-24:22, 2021.
- [2] Honda, Y., K. Nakazawa, and K. Fujita, Confluence Proofs of Lambda-Mu-Calculi by Z Theorem, *Studia Logica* 109:917-936, 2021.
- [3] Komori, Y., N. Matsuda, and F. Yamakawa, A simplified proof of the Church-Rosser theorem, *Studia Logica* 102(1):175-183, 2013.
- [4] Nakazawa, K., and K. Fujita, Compositional Z: Confluence proofs for permutative conversion, *Studia Logica* 104:1205-1224, 2016.
- [5] Terse, *Term Rewriting System*, Volume 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2003.