Gentzen から始まる証明論の 50 年
- 順序数解析を中心として -

東京大学・数理科学研究科　新井 敏康
Toshiyasu Arai
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo

おおよそ 1930-80 年における証明論の主な結果・アイデアを, 順序数解析 (ordinal analysis) を中心として述べていく. 但しこの期間の問題に関わる限り, 90 年以降の結果も一部盛り込む. 尚, 記述や記法は後に整理されたかたちで述べるので原論文のままというわけではない. したがって証明論の通史や学史のようなものをこの原稿に期待しないで頂きたい.

ここでは紙幅の制限により証明の詳細は省いてある. sequent calculi（と ε-calucli も少々）については [A2020a] をご参照願いたい.

1 Gentzen

1.1 [Gentzen34/35]

この G. Gentzen の学位論文こそが証明論という分野をいまあるかたちにあらしめたものである. しかしパイオニアによる論文に以後のすべてがあると思いたいのは, [Kreisel71b] が述べている通りロマンティックな幻想に過ぎないだろう.

この論文において Gentzen は, 論理的な推論を表す体系としての論理計算 (logic calculi) として先ず, 自然演繹 (Natural Deduction) NJ, NK を導入し, さらに sequent calculi（推件計算）LJ, LK を導入した. 論理計算は Frege, Russell, Hilbert 以来, 既にあり, その完全性も K. Gödel によって示されていたのだが, 新たにこれらの論理計算を導入した理由を Gentzen は「実際の推論にできる限り近い形の形式的な論理体系を作る」ためであったと書いている（翻訳は [前原 73] による. 尚、Gentzen の原論文を学ぶには [前原 73] から読むとよい.). ここで NJ は直観主義（述語）論理のための自然演繹であり, NK は古典論理のそれである. さらに Gentzen は NJ, NK が「或る独特な性質をもっているということや, さらにその点に関しては, 直観主義者が否認するところの '排中律' が特殊な地位を占めているということもわかってきた」と続ける. 自然演繹においては, 論理記号 $\lor, \land, \neg, \supset$（ならば[1]）$\exists, \forall$ ひとつひとつに対して導入規則と除去規則と呼ばれる推論規則がある. これらは BHK 解釈 (Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation) に似て, いわばそれぞれの論理結合詞の（操作主義的）意味を規定する. 例えば $\land$ については

$$\frac{A_0 \quad A_1}{A_0 \land A_1}\ (\land I) \qquad \frac{A_0 \land A_1}{A_i}\ (\land E)\ (i = 0, 1)$$

左の $(\land I)$ は $\land$ の導入規則と呼ばれ, 右の $(\land E)$ は $\land$ の除去規則と呼ばれる. また $\supset$ については

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\ (\supset I) \qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\ (\supset E)$$

[1]尚ここで矢印 $\to$ は後に述べる sequent で用いられるので, 「ならば」は $\to$ ではなく馬蹄形 $\supset$ を用いた.

左の $\supset$ の導入規則を用いると仮定 A が「落ちる」(closed, discharged) あるいは束縛される．さらに NJ では矛盾 $\bot$ に関する規則 $(\bot)$ が，そして NK では二重否定の除去規則 $(\neg\neg)$ がそれぞれ用いられる．

$$\dfrac{\bot}{A}\,(\bot) \qquad \dfrac{\neg\neg A}{A}\,(\neg\neg)$$

さて上記の「或る独特な性質」とは基本定理 (Hauptsatz) 「純粋に論理的な証明は，すべて或る特定な標準形に変形することができる」ということで，いまの言葉で言えば正規化定理 (normalization theorem) である．標準形の証明では，導入規則に続いて除去規則を用いるということがない．例えば $\wedge$ なら左の証明は標準形ではなく，それは右に変形される：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\,\pi_0 & \vdots\,\pi_1\\ A_0 & A_1\end{array}}{A_0\wedge A_1}\,(\wedge I)}{A_i}\,(\wedge E) \rightsquigarrow \begin{array}{c}\vdots\,\pi_i\\ A_i\end{array}$$

また $\supset$ では

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\,\rho\\ B\end{array}}{A\supset B}\,(\supset I) \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ A\end{array}}{B}\,(\supset E) \rightsquigarrow \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ A\\ \vdots\,\rho\\ B\end{array}$$

右の証明では，証明 ρ での仮定 A のところに A に至る証明 π を代入している．

Gentzen は「標準形になおされた証明の最も本質的な性質を一言にして言えば，それは‘まわり道がない’ということである．証明の最後の結論に含まれている概念は，その結論を得るために必然的に用いざるを得ないものであるが，それ以外の一切の概念は，この証明には現れない」と述べている．

さて自然演繹の導入の影響をごく簡単に触れておこう．[Gentzen34/35] には正規化 (normalization) 定理とその証明は述べられていないが，Gentzen は A. Turing による型付きラムダ計算に対する正規化定理と同工異曲の証明を少なくとも NJ に対しては持っていた，cf. [Plato2008]．正規化定理の証明の出版には [Prawitz65] を待たなければならなかった．この [Prawitz65] は当時の証明論に自然演繹の復権をもたらしたと思う．例えば [2ndScand71,Kreisel71a] を参照．また自然演繹での証明とプログラムの対応および命題と型の対応，さらに証明の変形と型付きラムダ計算における計算との対応は，[Howard82] において Curry-Howard 対応 (isomorphism) として定式化されて証明論と理論的計算機科学の交流をもたらした，cf. [Girard89]．さらに [Martin-Löf98] における型理論は BHK 解釈と自然演繹に刺激を受けているものと考えられる．他方で section 2 で触れる [Gödel58] でのクラス T を，型付き λ-式の拡張とみなして，そこでの強正規化 (strong normalization, あらゆる計算の停止性) が [Tait67] で示されている．T の強正規化というその事実そのものより重要なのは [Tait67] で用いられた論法にある．それは computability predicate という概念によっていて，これは正に section 2 で説明する (generalized) inductive definition の例になっている．この computability predicate による強正規化の証明は，その後，様々に拡張されている．

さて Gentzen が sequent calculi LJ, LK を導入した理由は，自然演繹 NJ, NK では基本定理を述べるためにふさわしくないからだと言っている．少し長くなるが [Gentzen34/35] より引用しよう．

> 基本定理をすっきりした形で表現し証明することができるようにするためには，特にそれに適した論理計算を基礎におかねばならなかった．この目的のためには，自然な論理計算が不適当であることはわかっていた．確かにそれは基本定理を成立させるための本質的な性質をすでに示してはいる．しかし，前にも注意しておいたように，この性質に関連して排中律が特殊な地位を占めている限りは，このことは直観主義論理にのみ限定されてしまうのである．

つまり正規化定理としての基本定理は直観主義論理 NJ についてはきれいに述べて証明することができるが，古典論理 NK についてはそうではない．両方の論理に共通に成り立つ事実として定式化して証明するために論理計算自体を変更したのである．

sequent calculus LK で証明される対象は sequent $\Gamma \to \Delta$ である．ここで Γ や Δ は論理式の有限列．論理式 A について $A \to A$ が LK での公理に当る sequent である．その推論規則は, 構造に関する規則と論理記号に関する規則に分けられるが, カット (cut)（は構造に関する規則のひとつ, [Gentzen34/35] では）以外はそれぞれ左右ひとつずつである．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, C \quad C, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}\ (cut)$$

(cut) 以外の構造に関する規則は weakening, contraction, exchange でそれぞれ論理式を増やす, ひとつにまとめる, 交換する．矢印 $\to$ の左側で行う規則だけ書いておく．

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ (wL) \qquad \frac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}\ (cL) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Lambda \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Lambda \to \Delta}\ (eL)$$

論理記号に関する規則を $\vee, \wedge, \exists, \forall, \supset$ について記しておく．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A_i}{\Gamma \to \Delta, A_0 \vee A_1}\ (\vee R) \qquad \frac{A_i, \Gamma \to \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \to \Delta}\ (\wedge L)$$

$$\frac{A_0, \Gamma \to \Delta \quad A_1, \Gamma \to \Delta}{A_0 \vee A_1, \Gamma \to \Delta}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A_0 \quad \Gamma \to \Delta, A_1}{\Gamma \to \Delta, A_0 \wedge A_1}\ (\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\, A(x)}\ (\exists R) \qquad \frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\, A(x), \Gamma \to \Delta}\ (\forall L)$$

$$\frac{A(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x\, A(x), \Gamma \to \Delta}\ (\exists L) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\, A(x)}\ (\forall R)$$

$(\exists L), (\forall R)$ における自由変数 a (eigenvariable) は lower sequent に現れない[2].

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}\ (\supset R) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Lambda \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Lambda \to \Delta, \Theta}\ (\supset L)$$

これらの規則は (cut) と $\supset$ に関する規則以外は左右が完全に対称である．また (cut) 以外では推論規則の上にある sequent に現れる論理式は下にある sequent のある論理式の部分論理式であることが分かる．但しここで任意の term t について $A(t)$ は $\exists x\, A(x), \forall x\, A(x)$ のそれぞれ部分論理式である．

Remark 1.1 $(\exists R), (\forall L)$ の upper sequents での term t は lower sequent から一意的に読み取れない．つまり term が derivation で果たす役割を, 我々はいまだ十分に理解できていない．さらに (cut) での cut formula C についても同様に下から上が決まらない．これらが proof complexity での難所となる．

つぎに直観主義論理の sequent calculus LJ は古典論理のそれ LK において, sequent を「矢印 $\to$ の右に含まれる論理式はたかだかひとつ」となるものに制限して得られる．つまり sequent $\Gamma \to B_1, \ldots, B_n$ が LJ の sequent なのは $n = 0, 1$ の場合だけである．

自然演繹との関係で言えば, 論理記号の導入規則は右規則に当たる．例えば $(\wedge I)$ は $(\wedge R)$ に．他方で除去規則は左規則と (cut) の組合せである．

$$\frac{\Gamma \to A_0 \wedge A_1}{\Gamma \to A_i}\ (\wedge E)$$

は

$$\cfrac{\Gamma \to A_0 \wedge A_1 \quad \cfrac{A_i \to A_i}{A_0 \wedge A_1 \to A_i}\ (\wedge L)}{\Gamma \to A_i}\ (cut)$$

つまり (cut) という規則は自然演繹を sequent calculus で模倣するときに出現する．

さてそこで [Gentzen34/35] での基本定理は「LK [LJ] における証明を上手に変形していくとそこから (cut) がすべて取り除かれて (cut) 無しの LK [LJ] の証明が得られ, それが証明している sequent は元の証明のそれ

[2] [Gentzen34/35] では変数は自由変数と束縛変数の 2 種類に分けられている．

と同じである」という内容なのでカット消去定理 (cut elimination theorem) とも言われる．上で注意したようにそのような証明に現れる論理式は, 証明されている sequent に現れるどれかの論理式の部分論理式に限る, cf. Remark 1.1. またあり得る証明のかたちもかなり限定されてしまう．この事実から論理に関するたくさんの定理が証明論において生み出されてきた．その後の証明論研究の多くは [Gentzen34/35] への注釈に過ぎないと自嘲気味に言う証明論研究者もいるほどである．

ところで, 直観主義論理の形式化としては自然演繹 NJ に軍配を上げたい．sequent calculus LJ も証明論的研究には有効なのだが, やはり sequent calculus は古典論理に最もふさわしいと思う．ひとつには上で述べた左右対称で整った規則の束としての美しさ．その証明における論理式の出現を辿ることの容易さ, 等々．またその規則の意味は, 個々の論理記号に関する規則を逆読み（下から上に向かって読む）すると理解し易い．丁度, その sequent を反駁するモデルでの論理式の真偽条件を言っているからだ, cf. semantic tableaux [Beth55, Smullyan68].

この observation から, canonical proof search によって, completeness theorem (for cut-free fragment) と cut elimination theorem を同時に示す Schütte's schema (dichotomy) が出てくる, cf. [Schütte56, Takeuti87]. なお [A2022] ではこの Schütte's schema を無理矢理に直観主義論理に当て嵌めようとしている．また [Afshari-Rathjen2009, A2020a] で示されているように, canonical proof search の方法はこれら以外にも応用されている．

尚, 基本定理の応用として [Gentzen34/35] では, 直観主義命題論理の決定問題の解法と数学的帰納法を含まない古典的算術の無矛盾性証明が与えられている．後者について一言すれば, 先ず古典論理（そして直観主義論理）の無矛盾性はなんら問題ない．例えば one element model を考えればよい．しかしこの方法では Peano の公理 $\forall x(x+1\neq 0), \forall x, y(x+1=y+1\supset x=y)$ の無矛盾性は出せない．Eq を等号 $=$ に関する公理,「$=$ は同値関係で $\forall x, y(x=y\supset x+1=y+1)$」として, PA^- を列 $\forall x(x+1\neq 0), \forall x, y(x+1=y+1\supset x=y), Eq$ に足し算, 掛け算 $+, \cdot$ などの関数記号に関する有限個の公理を Π^0_1-論理式で書いたのを付け加えたものとおくと, sequent $\mathrm{PA}^-\to$ の証明から (cut) を除去すればそのような証明は存在し得ないことが分かる．

古典論理に基づく公理系を分析するには, 現在では one-sided sequent calculus が多く用いられる．それは one-sided sequent calculus は (cut) 以外の構造に関する規則を一切含まないので, そのほうがその体系に関する証明をする際に場合分けが少なくて済むからである．しかし部分構造論理 (substructural logic) のその後の発展を考えると, 構造に関する規則を Gentzen が分離して取り出しておいてくれたのが幸いであったと言えるだろう．

とにもかくにも [Gentzen34/35] によって証明論の舞台が設定された．

1.2 [Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38, Gentzen43]

これらの一連の論文に関して考えなければならないことがいくつかある． 先ず [Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38] は, タイトルが示す通り一階の自然数論＝算術 PA の無矛盾性証明ではあるのだが, 単なる「無矛盾性証明」ではない. [Gentzen74a, Gentzen36] にはかなりのページ数を使って PA の無矛盾性証明がなぜ必要なのかが説かれている. [Kolmogorov25, Gödel33, Gentzen74b] において直観主義論理から古典論理への解釈が得られ, これより PA から直観主義自然数論 HA への解釈も得られていた．もし直観主義による構成的数学を全体としてその基礎に置けるのなら, 少なくとも PA の無矛盾性問題は終わっていることになる．しかし Gödel, Gentzen はともにそうは考えなかった．その主たる理由は「ならば」の BHK 解釈に潜むと考えられる循環である．つまり $A\to B$ の「構成」を, A の任意の「構成」を B の「構成」に対応づける operation と考えようとすると, $A\to B$ の「構成」が何であるかを理解するのに「構成」全体が既に把捉されていないといけないことになる．仮にもし型理論を持ち出して「型」$A\to B$ は「型」A より複雑だからと,「型」に関する帰納法による定義と思いたくても, 単に「構成」というものを高階の対象としているわけだから, どうしても到底「有限的」対象とは言えない．

PA の無矛盾性証明がせめて望ましいことを認めたとしても, それは如何にして可能なのか？あるいはどのようなものであらねばならないのか？先ず, モデル $\mathbb{N}$ が存在するから, では不可である．そして直観主義での構成の概念でも満足できない．といって [Gödel31] により, その証明は PA では形式化できないことも判ってい

る．D. Hilbert が想定した記号の操作程度の有限的な手法はもちろん PA の手の平を出ていない．有限的な方法の延長にありながら, それを超え出る方法を見い出さなければならない．そのために Gentzen がしようとしたのは, $\mathbb{N}$ での真偽でもなく, 構成的な正しさでもないように PA の論理式を解釈することである．ここで, PA で証明できる論理式はこの解釈の下で正しくなっていないといけない．このような解釈をつくることは既に無矛盾性証明ではないのである. 無矛盾性はその系に過ぎない．それは矛盾 $1=2$ は正しくないと解釈されるからである．

ここで無矛盾性証明について筆者の考えを断っておく. [A2007] に書いたのでここでは繰り返さないが, 無矛盾性証明をすることは我々に与えられた数学的に困難な問題のクラスであると考えている．「なぜ無矛盾性証明をしなければならないのか？」と問われたことが何度もある．これを敷衍すれば恐らくは「そんなことはする必要がない．なぜなら例えば $\mathbb{N}$ や V が存在するのは明らかだから」ということらしい．この問いからはなにかその証明が倫理的な要請であると質問者が思い込んでいる, もしくは質問を投げかけられた筆者がそう考えていると質問者が思い込んでいるかのようである．そうではない．しなければならない倫理上の問題ではまったくない．少なくとも眼前に矛盾が無い以上は．それは恐らく質問者である数学者, 数理論理学者が取り組んでいる問題と同じである．「なぜその証明をしたいのか？」と訊かれても, 言い訳以上のことを言えるだろうか.

さて [Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38, Gentzen43] を通じた発想をひとことで言うと「有限の証明 proof figure は, 無限の (cut) 無しの証明 cut-free ω-derivation を encode している, もしくは前者は後者の表記である」ということであろうと思う．少し順を追って説明しよう．

[Gentzen74a] は投稿を取り下げられ, [Gentzen69, Bernays70] によって初めてわれわれの知るところとなったものである．尚, [Gentzen74a] の証明がいかなる原理によるのか, つまりどのように形式化されるべきかについては考えると難しい問題になるのでここでは触れない, cf. [Tait2015]．また, [Gentzen74a] では順序数は未だ表に出てこず, derivation tree の wellfoundedness に基づいた一種の cut-elimination がなされている．順序数が初めて証明論において本格的に用いられたのは [Gentzen36] においてである．ここで言う順序数とは, 実際には有限個の記号上の term とそれらの間の計算可能な大小関係のことであり, この故に順序数と言わずに ordinal term と呼ぶこともある. [Gentzen36] については [Gödel95, Tait2005, Buchholz2015] を読むのがよい.

最も雑な論理である古典論理上でそこでなされた解釈を述べれば, 論理式, より一般には sequent が正しいとは, その cut-free ω-derivation が存在することである, としている．すると実際に示さなければならないのは, PA で証明できる sequent がこの意味で正しいことであり, これは本質的には, [Schütte51, Tait68, Mints75] でのように ω-logic での cut-elimination をすればよい．記号を使って説明する．自由変数の無い one-sided sequent calculus において $\vdash \Gamma$ は, sequent [3] Γ の cut-free ω-derivation が存在することを意味するとしよう．ここで $\forall$ の導入は ω-rule で置き換える：$\forall x\, A(x)$ は Γ に含まれるとして

$$\frac{\cdots \quad \Gamma, A(\bar{n}) \quad \cdots}{\Gamma}$$

ここで上には無限個の sequents $\Gamma, A(\bar{n})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ があり, $\bar{n}$ は n-番目の numeral $(\cdots((0+1)+1)\cdots+1)$ である．よって ω-derivation は sequents の ω-branching wellfounded tree となる.

すると示したいのは $\mathrm{PA} \vdash \Gamma(a,\ldots)$ ならば, 任意の $n,\ldots$ について $\vdash \Gamma(\bar{n},\ldots)$ ということである．ここで問題になるのは数学的帰納法の推論規則：$\forall x\, A(x)$ は Γ に含まれるとして

$$\frac{\Gamma, A(\bar{0}) \quad \Gamma, \neg A(a), A(a+1)}{\Gamma} \tag{1}$$

は, 当座は (cut) の連なり

$$\frac{\Gamma, A(\bar{0}) \qquad \dfrac{\Gamma, A(\bar{0}) \quad \Gamma, \neg A(\bar{0}), A(\bar{1})}{\Gamma, A(\bar{1})} \qquad \dfrac{\Gamma, A(\bar{1}) \quad \Gamma, \neg A(\bar{1}), A(\bar{2})}{\Gamma, A(\bar{2})} \qquad \cdots}{\Gamma}$$

[3] $\Gamma = \{A_i\}_{i<n}$ の意味は $\bigvee_{i<n} A_i$

で置き換えるしかなく, すると

Lemma 1.2 $\vdash \Gamma, \neg C$ かつ $\vdash C, \Delta$ ならば $\vdash \Gamma, \Delta$.

を示すことが枢要となる．Lemma 1.2 は$\vdash \Gamma, \neg C$ および$\vdash C, \Delta$ をそれぞれ示す wellfounded trees に関する帰納法で示される．この Lemma 1.2 により得られる Γ の cut-free ω-derivation を (1) は encode していると考えるわけである．Lemma 1.2 とそれから得られる解釈の証拠である PA で証明できる sequent Γ の cut-free ω-derivation は, もちろん wellfounded であるからその depth, height を順序数として考えて, 順序数が表にでる [Gentzen36] が得られる．

Gentzen の解釈をこう言ってしまっては身も蓋もない. [Gentzen74a, Gentzen36] では細心の注意を払って, 無限の対象 (infinitary derivation=wellfounded ω-branching tree) に言及することを避けている．無限の tree が存在する, という代わりに, その path を生成する手続き (reduction procedure) しか述べていない．だからその証明は解り辛い．そのせいなのか [Gentzen38] で再度, 証明を作り直している. [Buchholz97] で正確に確かめられたのだが, ここまでくると Gentzen がしているのは, [Schütte51, Tait68, Mints75] での infinitary derivation の cut-elimination をその code あるいは embedding の preimage である有限の証明図上でしているのだろうと想像がつく．だから当然, 関与する順序数は $\varepsilon_0 = \min\{\lambda > \omega : \forall\alpha < \lambda(2^\alpha < \lambda)\}$ である．ω より大きくならざるを得ないのは, 数学的帰納法のせいで, 指数関数 2^α で閉じていてほしいのは, $\vdash^\alpha_d \Gamma$ を, その depth$\leq \alpha$, その中の (cut) の cut formula の複雑さ $< d$ という Γ の ω-derivation が存在することを意味するとしてつぎが成り立つからである．

Lemma 1.3 $\vdash^\alpha_{d+1} \Gamma$ ならば$\vdash^{2^\alpha}_d \Gamma$.

$d = 0$ の場合の$\vdash^\alpha_0 \Gamma$ は Γ の cut-free ω-derivation でその depth$\leq \alpha$ なるものが存在することを意味する．

[Gentzen38] の結果をうわべだけ述べておく．計算可能（elementary recursive ですらある）な関数をふたつ $r : p \mapsto r(p)$, $o : p \mapsto o(p)$ つくって, 矛盾 (empty sequent) $\rightarrow$ の証明図の code p に対して, $r(p)$ もまた矛盾の証明図の code で, また $o(p)$ は ordinal term $o(p) < \varepsilon_0$ で, $o(r(p)) < o(p)$ となっていることが文句無く有限的に示されている．よって p がそのような code であるなら, 関数の n-th iterate を $r^{(n)}$ と書けば $\alpha_n = o(r^{(n)}(p))$ が ε_0 より下での無限下降列になってしまうので, 具体的につくられた ordinal terms$< \varepsilon_0$ が無限下降列にならないことを有限的数学に付け加えれば, PA の無矛盾性が従う．

これは無矛盾性証明なのだが, 例えば [Gentzen38] の証明を少しいじれば, PA で証明できる任意の sequent に対して, その cut-free ω-derivation を ε_0-recursion で作ることができる．しかもその nodes には葉に近づけば下がるように順序数 $< \varepsilon_0$ が貼られている．

このように有限の proof figure は cut-free ω-derivation の code ではあるのだが, 一旦, [Gentzen38] において, proof figure と ordinal term という有限の対象（どちらも無限の対象を denote している）同士が結びつけられれば, そこから無限の対象を経ずとも直に動き出すこともあるものである, cf. section 3.

また [Gentzen38] の証明は, 組合せ論的命題の独立性証明に inspiration を与えてきた．例えば [Rathjen2015] と section 2 の冒頭を見よ．

つぎに就職論文 [Gentzen43] に基づいて順序数解析 (ordinal analysis) という分野が始められた．そこで達成された事柄を言い表すために順序数解析という言葉が作られたのだが, Gentzen がこのことに同意するのかどうかについては確信は持てない．とにかくも [Gentzen43] で示されたことを簡単に述べる．PA に 1 変数の述語記号 E を付け加えて PA(E) を得る．E は任意の述語を表していると考えていて, 数学的帰納法は E を含む論理式にも拡張されている．先ずふつうにつくった自然数上の order type ε_0 の順序 $<_{\varepsilon_0}$ について, その各始切片までの超限帰納法が PA(E) で証明できることも分かる: 各 $\alpha < \varepsilon_0$（各 numeral ということ）について PA$(E) \vdash \forall x(\forall y <_{\varepsilon_0} x\, E(y) \rightarrow E(x)) \rightarrow \forall x <_{\varepsilon_0} \alpha\, E(x)$. 逆に計算可能な strict partial order $\prec$（$\prec$ は irreflexive and transitive）に関する超限帰納法が PA(E) で証明可能であるとする．つまり PA$(E) \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \rightarrow E(x)) \rightarrow \forall x\, E(x)$. E は任意の述語を表しているので, これは超限帰納法が述語によらずに一様に証

明できると言っている．このとき $|n|_\prec = \sup\{|m|_\prec + 1 : m \prec n\}$ として，$|\prec| = \sup\{|n|_\prec + 1 : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon_0$ となる．後者の証明の粗筋はこうである．仮定 $\forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x))$ のところを推論規則

$$\frac{\cdots \quad \Gamma, E(\bar{m}) \quad \cdots\ (m \prec n)}{\Gamma, E(\bar{n})}$$

で置き換えた (cut) 付きの ω-derivation において，ある $\alpha < \varepsilon_0, d < \omega$ について $\vdash^\alpha_d E(\bar{n})$ が任意の n について成り立つ．そこで (cut) を取り除けば，ある $\beta < \varepsilon_0$ について $\vdash^\beta_0 E(\bar{n})$．このとき $E(\bar{n})$ の cut-free derivation の最後は基本的には

$$\frac{\cdots \quad E(\bar{m}) \quad \cdots\ (m \prec n)}{E(\bar{n})}$$

となっており，上の $E(\bar{m})$ までの cut-free derivation もまたしかりである．すると $\vdash^\beta_0 E(\bar{n})$ より $|n|_\prec \leq \beta$ が分かる．こうして PA の証明論的順序数 $|\mathsf{PA}| = \varepsilon_0$ であることが示される．ここで或る程度の算術を含む公理系 T の証明論的順序数は，$T \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x\, E(x)$ となる計算可能な strict partial order $\prec$ の順序型 $|\prec|$ の上限のことである．

この証明は，$\mathsf{PA}(E) \vdash \forall x(\forall y \prec x\, E(y) \to E(x)) \to \forall x\, E(x)$ の仮定のもとで単に order type の意味で $|\prec| < \varepsilon_0$ を示しているだけではなく，少し工夫すれば $y \prec x \Rightarrow f(y) <_{\varepsilon_0} f(x)$ となるような順序を保つ f が (elementary) recursive in $\prec$ で取れることも示している，cf. [Takeuti63, A98]．一般には $|\prec| < \varepsilon_0$ という事実からは，このような f は Δ^1_1 で取れることが結論できるだけである．[A2020a] で well-ordering principle を公理にもつ theory の cut-elimination に計算可能な f の存在が用いられた．

2　1950-70

1950 年代と 60 年代は証明論の対象が拡げられ，問題意識が深められた実り多い時期であった．ここでは [IPT70] までの証明論のトピックをいくつか拾って行こう．

section 1 で見たように [Gentzen74a, Gentzen36, Gentzen38, Gentzen43] において，自然数論 PA と順序数 ε_0 が初めて結びつけられたのである．誰も想像できなかった結果に違いない．先ずは簡単にこの結果の直接的な余波を記録しておく．[Ackermann40] は，Hilbert の無矛盾性証明の方針をより直接的に表している epsilon substitution method による PA の無矛盾性証明である．与えられた有限個の ϵ-axioms $A(t) \to A(\varepsilon x.A)$ あるいは自然数論では $A(t) \to \varepsilon x.A \leq t \wedge A(\varepsilon x.A)$ の列に対して，その解を段々と近似する epsilon substitutions $\varepsilon x.A \mapsto n\, (n \in \mathbb{N})$ の列を作っていく．このときに問題になるのが，この近似列が有限回の近似の後に解に到達すること，すなわちその代入が与えられた有限個の ϵ-axioms をすべて正しくするようになることを示すことにある．[Ackermann40] では列に対して順序数 $< \varepsilon_0$ を対応させてこの順序数が下がっていくことにより，近似列の停止性を示している．

他方で [Gödel95] から伺えるように，Gödel は [Gentzen36] を詳細に検討して，その結果として [Kreisel52] における no-counterexample interpretation に到達していたようである，cf. [Tait2005]． 例えば冠頭標準形の閉論理式 $A \equiv \exists x \forall y \exists z \forall w\, B(x, y, z, w)$ を考える．A が正しくなければ $\forall x \exists y \forall z \exists w\, \neg B(x, y, z, w)$ であるから，反例 (counterexample) を与えるなんらかの関数 f, g により $\forall x, z\, \neg B(x, f(x), z, g(x, z))$ となるだろう．よって A が正しいのならそのような反例 f, g は存在しないはずだから，$\neg\exists f, g \forall x, z \neg B(x, f(x), z, g(x, z)) \leftrightarrow \forall f, g \exists x, z\, B(x, f(x), z, g(x, z))$．このときある汎関数 F, G により任意の f, g について $A' \equiv B(t, f(t), s, g(t, s))$ $(t \equiv F(f, g), s \equiv G(f, g))$．[Kreisel52] は [Ackermann40] の証明から，もしも $\mathsf{PA} \vdash A$ ならば，ある $< \varepsilon_0$-recursion で定義される汎関数 F, G が存在して A' が正しいことを示している．とくに $A \equiv \forall x \exists y\, B(x, y)$ が Π^0_2-論理式のときには，$< \varepsilon_0$-recursion で定義される関数 f により $\forall x\, B(x, f(x))$ となる．これは，Σ^0_1-論理式で定義されていることが PA で証明できるような関数，つまりそれを計算するプログラムの停止性が PA で許される方法（公理）から従う関数 (provably recursive, provably total recursive) は，単に計算可能というだけでなくより小さいクラスに属すことが分かるということである．これは [Kreisel58] で述べられた，命題の形式的な証明

からその命題の正しさ以上の情報を抽き出そうというプログラム (unwinding of proofs) の例になっており, この問題意識は証明論の応用において常に意識されてきた. これについては例えば [Kohlenbach2008] を見よ. より広くは論文 [Kreisel58] のタイトルが物語るように, 「無矛盾性証明」と呼ばれている証明は, それがどのような意味で「基礎付け」としての無矛盾性証明であるのかを議論することは, 重要で欠くべからざることでありながら, その議論そのものが当該の「無矛盾性証明」よりもはるかに難しいように思える. 他方でその証明が大層面白いことは間違いなく, そうであるなら無矛盾性ではなく他の何かを証明していると考えてみてもよかろう, ということであろうか, cf. [Gödel95].

[Gödel58] は恐らく [Gentzen36] の研究から得られたものであろうが, ここにおいて有限型の原始再帰的汎関数 (primitive recursive functionals of finite types) のクラス T を導入して, それによって HA の解釈を与えている. その意図は [Gödel58] のタイトル「現在まで用いられたことのない有限の立場のある拡張について」によく表されている. つまり [Gentzen36, Gentzen38] での順序数 ε_0 からの（原始再帰的）順序数列の停止性の代替としての T ということであろう. なお, T に属する自然数上の関数の計算は $< \varepsilon_0$-recursion で行える. この事実は例えば [Tait65] で示されている. その証明のアイデアは [Schütte51] における ω-rule を伴った infinitary calculus での cut-elimination をまねて, 汎関数を無限の列に展開することにあった. 例えば汎関数 F が G, H から primitive recursion で $F(0,a) = G(a)$, $F(n+1,a) = H(n,a,F(n,a))$ と定義されていたら, それに対応して汎関数の列 $\{F_n\}_n$ を再帰的に $F_0 = \lambda a.G(a)$, $F_{n+1} = \lambda a.H(n,a,F_n(a))$ と定義して, F をこの無限列 $\{F_n\}_n$ で置き換えて考える. $\lambda a.G$ の型を σ としたとき, 無限列は型 $\mathbb{N} \to \sigma$ を持っていて, 値は $\{F_n\}_n(m) = F_m$ である.

2.1 CA, AC, DC

既に [Hilbert-Bernays39] において, 2 階算術 Second Order Arithmetic (SOA) もしくは高階の自然数論は, そこで数学を形式化する場所として考察されていた. しかしその諸部分体系を摘出してそれらの相互関係や証明論的強さ, 数学のどの範囲までがどの部分体系で形式化できるのかなどの問題が組織的に取り上げられたのは [Stanford Report63] であったと思う. 実は筆者は [Stanford Report63] は未見である. しかしその多くの部分は [BFPS81] の第 I 章や [Feferman77] で報告されている.

2階算術 SOA を定義しておく. 先ず2階の変数を $X, Y, Z, \ldots$ で表す. これらは自然数から成る集合を表すと考えている. pairing function 例えば $\langle n_0, n_1 \rangle = \dfrac{(n_0+n_1)(n_0+n_1+1)}{2} + n_0$ とその逆 $(\langle n_0, n_1 \rangle)_i = n_i\ (i = 0, 1)$ により, $X(\langle n_0, n_1 \rangle)$ を考えることで 2 変数以上の変数は入れなくてよい. $(X)_n = \{m : X(\langle n, m \rangle)\}$ とおく. $A((X)_n)$ は論理式 $A(Y)$ において, $Y(t)$ を $(X)_n(m) :\equiv X(\langle n, m \rangle)$ で置き換えて得られる論理式を表す. 2 階の論理では 2 階の quantification のための推論規則

$$\frac{A(R), \Gamma}{\exists X\, A(X), \Gamma} \qquad \frac{A(Y), \Gamma}{\forall X\, A(X), \Gamma}$$

を入れる. ここで R は変数か関係記号で, Y は eigenvariable. 等号付きなら等号に関する公理, 特に $\forall X, x, y(x = y \to X(x) \to X(y))$ も入れる. つぎの公理図式を考える: CA=Comprehension Axiom, AC=Axiom of Choice, DC=Dependent Choice

$$\begin{array}{ll} \text{CA:} & \exists X \forall z\, (X(z) \leftrightarrow A(z)) \\ \text{AC:} & \forall x \exists Y\, A(x, Y) \to \exists Z \forall x\, A(x, (Z)_x) \\ \text{DC:} & \forall X \exists Y\, A(X, Y) \to \forall X \exists Z [(Z)_0 = X \land \forall y\, A((Z)_y, (Z)_{y+1})] \end{array}$$

ここで A は（2 階の）任意の論理式で, $(Z)_0 = X :\Leftrightarrow \forall y[(Z)_0(y) \leftrightarrow X(y)]$.

このとき $\mathbb{Z}_2$ は等号付きの 2 階論理上で, 公理（図式）は PA^-, CA と数学的帰納法を一つの公理で書いた $IND :\equiv (\forall X(X(0) \land \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to \forall a\, X(a)))$ より成る.

つぎにこれらの公理図式の断片を定義するために論理式のクラスを定義する．先ず $\Pi^0_0 = \Sigma^0_0$ をそこに現れている quantifiers がすべて bounded (restricted) $\exists x < t, \forall x < t$ である論理式から成るクラスとしておく．言語には原始再帰的関数を表す関数記号があるとすれば，このクラスに属す論理式は 2 階の変数込みの原始再帰的関係を定義している．つぎに $\Pi^1_0 = \Sigma^1_0$ は 2 階の quantifiers が現れない論理式から成るクラスで，そこに属す論理式は 1 階の論理式とか算術的論理式と呼ばれる．算術的階層 (arithmetic hierrarchy) を定義する論理式たちである．そして $\forall, \exists$ が交代する 2 階の quantifiers の列と matrix B が Π^1_0 である $A \equiv \forall X_1 \exists X_2 \cdots Q X_n B$，ここで n が偶数なら $Q = \exists$，奇数なら $Q = \forall$，と書ける論理式を Π^1_n-論理式といい，それらから成るクラスを Π^1_n，その否定で書ける論理式のクラスを Σ^1_n で表す．解析的階層 (analytic hierarchy) に属す集合を定義する論理式たちである．

いま Φ を論理式のクラスとしたとき，Φ-CA は公理図式 CA において $A \in \Phi$ と制限した公理図式を表す．Φ-AC, Φ-DC も同様である．

以下で基礎になる SOA として，等号付きの 2 階論理上で，公理（図式）は PA^-, Π^0_0-CA, IND である体系を取っておく，これを $(\Pi^0_0\text{-CA})_0$ と表す．その上で体系 $(\Pi^0_0\text{-CA})_0$ に公理図式 Φ-CA を付け加えて得られる SOA を $(\Phi\text{-CA})_0$ で，またさらに数学的帰納法の公理図式 $Ind := \{\forall Y, y[A(0, Y, y) \land \forall x(A(x, Y, y) \to A(x+1, Y, y)) \to \forall x\, A(x, Y, y)] : A \in \Pi^2_0\}$ ($\Pi^2_0 = \bigcup_n \Pi^1_0$) を加えたのを $(\Phi\text{-CA})$ で表す．つまり添字 0 は数学的帰納法が集合に制限されていることを示す．$(\Phi\text{-AC})_0, (\Phi\text{-AC}), (\Phi\text{-DC})_0, (\Phi\text{-DC})$ も同様に定義される．さらに Δ^1_n-CA を以下の公理図式とする:

$$\forall z(A(z) \leftrightarrow \neg B(z)) \to \exists X \forall z(X(z) \leftrightarrow A(z))\, (A, B \in \Pi^1_n)$$

このときすぐに分かる関係として $(\Pi^1_n\text{-CA})_0 \subset (\Delta^1_{n+1}\text{-CA})_0 \subset (\Sigma^1_{n+1}\text{-AC})_0 = (\Pi^1_n\text{-AC})_0 \subset (\Pi^1_n\text{-DC})_0 = (\Sigma^1_{n+1}\text{-DC})_0$．ここで $\subset$ や $=$ は証明できる論理式全体を集合とみなしての関係．上記の関係 $\subset$ の内で初めのふたつは部分的には等しく，最後のはそうではない．$n = 0, 1$ の場合にこれを述べれば，先ず $(\Sigma^1_{n+1}\text{-AC})_0$（従って $(\Delta^1_{n+1}\text{-CA})_0$）は $(\Pi^1_n\text{-CA})_0$ の Π^1_{n+2}-保存拡大 (Π^1_{n+2}-conservative extension) である．他方で $(\Sigma^1_{n+1}\text{-DC})_0$ は $(\Pi^1_n\text{-CA})_0$ より真に強い，例えば前者は後者の無矛盾性を証明する．そこでこれらの SOA の関係を捉えるために CA をある計算可能な整列順序 $\prec$ に沿って繰り返す公理が考えられた．例えば Π^1_0-CA を考えてみる．$A(z, X) \in \Pi^1_0$ について集合 $Y = \{z \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models A(z, X)\}$ は jump operator $X \mapsto X' = \{n \in \mathbb{N} : \{n\}^X(n) \downarrow\}$ を有限回施して得られる集合から計算可能である．ということは Π^1_0-CA を $\prec$ に沿って繰り返すとは，jump operators を超限的に繰り返すことに当る．このような集合生成を許す公理を $(\Pi^1_0\text{-CA})^{\prec}_0$ と書こう．また $\prec$ がふつうに作った ε_0-順序の始切片のときでその順序型が $\alpha \leq \varepsilon_0$ であるときには代わりに $(\Pi^1_0\text{-CA})^{\alpha}_0$ と書く．また $(\Pi^1_0\text{-CA})^{<\alpha}_0 := \bigcup_{\beta<\alpha} (\Pi^1_0\text{-CA})^{\beta}_0$．例えば $(\Pi^1_0\text{-CA})^{<\omega}_0$ と $(\Pi^1_0\text{-CA})^{\omega}_0$ の違いは，前者では任意有限回しか jump が繰り返せない．つまり $(\Pi^1_0\text{-CA})^{<\omega}_0 = (\Pi^1_0\text{-CA})_0$ である．これを ACA_0 (Arithmetical Comprehension Axiom with restricted induction) と書き表す．他方で後者では jump を ω-回繰り返してできる階層 $\sum_n 0^{(n)}$ そのものが集合である．jump operator の代わりに hyper jump operator $X \mapsto \mathcal{O}^X$ を考えることにより Π^1_1-CA を超限的に繰り返す公理 $(\Pi^1_1\text{-CA})^{\prec}_0$ や $\alpha \leq \varepsilon_0$ のときの $(\Pi^1_1\text{-CA})^{\alpha}_0$, $(\Pi^1_1\text{-CA})^{<\alpha}_0$ が定義される．

以上の準備のもとに知られている関係を述べると，$n = 0, 1$ について $(\Sigma^1_{n+1}\text{-DC})_0$ は $(\Pi^1_n\text{-CA})^{<\omega^\omega}_0$ の Π^1_{n+2}-保存拡大であり，$(\Sigma^1_{n+1}\text{-DC})$, $(\Sigma^1_{n+1}\text{-AC})$ はともに $(\Pi^1_n\text{-CA})^{<\varepsilon_0}_0$ の Π^1_{n+2}-保存拡大である．この事実を初めに示したのは [IPT70] に入っている [Friedman70] だがその手法は手品のようなモデル論による．

2.2 Predicativity

ここでは [Feferman64, Schütte65] での結果を略述しよう．

predicative(可述的)/impredicative という対立は条件 $P(x)$，そして条件 $P(x)$ による集合 $S = \{x \in X \mid P(x)\}$（あるいは一般にはなんらかの対象）の定義に関わって言われる．先ず集合は，条件によって内包的につくられるものしか考えていない．集合 S の内包的定義が predicative であるためには，それを定める条件 $P(x)$ の意味が，当の集合 S の存在とは無関係に確定していなければならない．集合 S の存在をその要素が確定することと考えるならば，任意に与えられた対象 x について，$P(x)$ の成立のための条件が集合 S に，従っ

て $P(x)$ の成立/不成立に依存してはならない．例えば自然数の集合を Π^1_1-論理式 $\forall X \subset \mathbb{N}\, B(X,n)$ により $S = \{n \in \mathbb{N} | \forall X \subset \mathbb{N}\, B(X,n)\}$ と定義しようとする．このとき条件 $\forall X \subset \mathbb{N}\, B(X,n)$ の意味を確定させるには「任意の自然数から成る集合 $X \subset \mathbb{N}$」が決まっていないといけないが, いま正につくろうとしている集合 S が $S \subset \mathbb{N}$ であろうから, 「自然数から成る集合全体」が我々の構成とは独立に存在していると考えず, 集合は構成・定義していくものと考えるなら, 循環していると言わざるを得ない．この弁別は vicious circle を避けるために考え出された (Poincaré, Russell) のであろうが, 数学の基礎を考えようとするときに, どの範囲の数学までは predicative というより安全な方法で展開できるのか見定めたくなる．そのときに問題になるのが predicative/impredicative の画定をすることであろう．

ところが厳密に predicative であることを守ろうとすると, 直観主義論理の BHK 解釈は受け容れられない,「ならば」が問題となる, cf. subsection 1.2. また「ある条件をみたす最小の自然数」によって自然数を定義しようとするとき, その条件に「任意の自然数」$\forall n \in \mathbb{N}$ が入っていてはやはり predicative とは言えない．そこで妥協して, 自然数というものは直観的に明らかであるから自然数全体 $\mathbb{N}$ というものは存在する, 従って自然数に関する quantifications $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ は意味を持つとしよう．この仮定に立った相対的な概念として以下では predicativity を考える．

その意味が定まっていることをもって, 定義が predicative であるとしてみる．集合は段々と生成されていくのだと考えるなら, 意味が定まるということを absolute であることと同定する手がある．つまり任意の $M, N \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ について $\langle \mathbb{N}; M\rangle \models A[n] \Leftrightarrow \langle \mathbb{N}; N\rangle \models A[n]$ となっている $A[n]$ について集合生成 $\{n \in \mathbb{N} \mid A[n]\}$ を認めるということである．そうなら Δ^1_1-CA は問題ない．しかしこれだけでは predicative につくれる集合は尽きないだろう．そこで predicative に定義できる自然数の集合たちを, Russell の ramified type theory にならってつくろう．先ず自然数上の十分に大きい計算可能な整列順序 $<$ を取っておく．順序数（実際はその code である自然数）α で添字付けられた自然数の集合族 R_α を再帰的に $R_0 = \emptyset$, $R_{\alpha+1} = Df(\mathcal{R}_\alpha)$ そして極限順序数 λ については $R_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} R_\alpha$. ここで 2 階の言語に対する構造 ($\omega$-model) $\mathcal{R}_\alpha = \langle \mathbb{N}; R_\alpha\rangle$ について $S \subset \mathbb{N}$ が $S \in Df(\mathcal{R}_\alpha)$ であるのは, S が $\mathcal{R}_\alpha$ 上で定義可能なとき, つまりある 2 階の論理式 $A(x, X)$ と $\mathcal{X} \in R_\alpha$ について $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{R}_\alpha \models A[n, \mathcal{X}]\}$ となる場合である．例えば R_1 は算術的階層に属す集合を集めた集合族である．こうして得られた $\{R_\alpha\}_\alpha$ を ramified analytic hierarchy という．各集合 $\mathcal{X} \in R_\alpha$ が predicative であるばかりではなく, 集合族 R_α 全体が確定的な意味を持つことを認めれば, そこから定義される $R_{\alpha+1}$ もそうであろう．では階層 $\{R_\alpha\}_\alpha$ そのものも predicative に定義されたと言えるだろうか？問題は「順序数」あるいは「整列順序」という概念が predicative とは言えないところにある．そこで単に定義の predicativity だけを問題にするのではなく, その定義が well-defined であることの「証明」の predicativity も問わなければならなくなる．そして順序数 α が predicative であるとは, α までの超限帰納法 $I(\alpha) :\Leftrightarrow \forall X[\forall x(\forall y < x\, X(y) \to X(x)) \to \forall x < \alpha\, X(x)]$ が predicative に証明されるとき, と定める．では少なくとも $I(\alpha)$ の証明が predicative とは何かというと, それは $I(\alpha)$ が α-stage よりも前に predicative と認めた体系で証明されることを言う．

この考えを形式的に表すために, PA の言語に各 β に対して R_β の要素を走る変数 X^β_i $(i < \omega)$ を加える．論理式は term t について $X^\beta(t)$ が原始論理式のひとつで, 2 階の quantifiers $\forall X^\beta, \exists X^\beta$ もある．いま SOA の言語での論理式 A について, A^β で A の中の (free or bound) 変数 X を X^β で置き換えた論理式を表すとする．公理としてこの言語での数学的帰納法と $\beta < \alpha$ のとき $\exists X^\alpha \forall z(X^\alpha(z) \leftrightarrow A^\beta(z))$ を持った体系を $\overline{RA}$ と書いておく．このとき順序数 α に対して, 論理式が RA_α の論理式であるのは, その中に現れる変数 X^β がみな $\beta \leq \alpha$ となっていることと定め, また $\overline{RA}$ の証明が RA_α の証明であるのは, その証明に現れる論理式がすべて RA_α の論理式であるときとする．このとき体系（predicative に証明できる論理式の集合）RA を, $RA_0 \subset RA$, $\exists \beta < \alpha(RA_\beta \vdash I^1(\alpha)) \Rightarrow RA_\alpha \subset RA$ で定める．一つ目は PA は predicative ということ, 二つ目は α までの超限帰納法が α より小さい β について RA_β で証明されたなら, RA_α で証明されたものは predicative に証明されたとみなす, と言っている．

このようにして得られた RA の証明論的順序数を記述するために (binary) Veblen function φ を定義する．$\varphi_\alpha(\beta) = \varphi\alpha\beta$ と書くことにする．$\Omega = \omega_1$ 上の写像として φ_α は狭義単調増加かつ連続 (normal function) であり, その値域 $ran(\varphi_\alpha)$ は Ω で club (closed and unbounded) となる．先ず $\varphi_0(\beta) = \omega^\beta$ として, $\alpha > 0$ につ

いて $ran(\varphi_\alpha) = \bigcap_{\gamma<\alpha} Fx(\varphi_\gamma)$. ここで $\beta \in Fx(\varphi_\gamma) \Leftrightarrow \varphi_\gamma(\beta) = \beta$. このとき $\Gamma_0 := \min\{\alpha > 0 : \forall\beta, \gamma < \alpha(\varphi_\beta(\gamma) < \alpha)\}$. すると $|RA| = \Gamma_0$ であり, また $RA = RA_{<\Gamma_0} = \bigcup_{\alpha<\Gamma_0} RA_\alpha$ が, $\mathbb{N}$ が与えられたとしたときの predicativity の限界とされた. $|RA| \leq \Gamma_0$ はつぎの Lemma 2.1 による. subsection 1.2 の Lemma 1.3 は Lemma 2.1 での $\alpha = 0$ の場合である. (cut) formula の複雑さはその論理式に現れる変数 X^β の superscripts β たちから決める.

Lemma 2.1 $\vdash^{\beta}_{d+\omega^\alpha} \Gamma$ ならば$\vdash^{\varphi_\alpha(\beta)}_{d} \Gamma$.

2.3 Inductive definitions

[Gödel58] は有限型の原始再帰的汎関数を用いて HA を解釈したのだった. これを 2 階の自然数論 $\mathbb{Z}_2$ に拡張したのが [Spector62] である. そこで使われたのが bar recursive functional of finite types という代物である. primitive recursion が $\mathbb{N}$ に対する数学的帰納法に対応した定義であるのに対して, bar recursion は bar induction に対応した汎関数の定義である. 型が σ の bar induction を好い加減に（つまり古典論理で）言うと, 型 σ のモノの有限列から成る wellfounded tree T に関する超限帰納法のこと. つまり型 σ のモノの有限列 c に関する述語 $A(c)$ が, $c \notin T \Rightarrow A(c)$ かつ $\forall u : \sigma\, A(c * (u)) \Rightarrow A(c)$ を満たしていたら空列は A を満たす, という原理である. ここで $u : \sigma$ はモノ u の型が σ ということで, $(c_0, \ldots, c_{n-1}) * (u) = (c_0, \ldots, c_{n-1}, u)$. bar induction の気持ちは集合論的には分かるのだが, 一般の型 σ に対して考えようとするとよく理解できない. $\sigma = \mathbb{N}$ なら T は ω-branching wellfounded tree であるから, まぁよい. しかし例えば $\sigma = (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ だと, tree T の分岐は連続体の濃度あることになる. もちろん考えられている型 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ のモノは構成的な関数だけであろうが.

ともかくも G. Kreisel は [Stanford Report63] において自然数上の正作用素による帰納的定義の公理系 ID (theories of positive inductive definitions over $\mathbb{N}$) を導入し, この公理から [Spector62] での bar recursive functionals を正当化しようとした. 結果としてこの試みはうまくいかなかったのだが, この公理系 ID を摘出したことは, impredicative theories の証明論的分析への第一歩を与えたという意義がある. ID を定義するために先ず（簡単のため 1 変数としておく）関係記号 X が正にしか現れない (occurs only positively) 1 階の論理式 $\mathcal{A}(X, y)$ を考える. このような論理式を positive operator form と呼び, $\mathbb{N}$ 上で単調な (monotonic) 作用素 $\Gamma : \mathcal{X} \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \mathcal{A}[\mathcal{X}, n]\}$ ($\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$) を引き起こす. これにより順序数 α で添数付けられた $\mathbb{N}$ の部分集合族 $\{I_\alpha\}_\alpha$ が $I_\alpha = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]\}$ で定義され, これは増加列となる $\beta < \alpha \Rightarrow I_\beta \subset I_\alpha$. そこで $I^{\mathcal{A}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ とおけば, これが作用素 Γ の最小不動点となる $I^{\mathcal{A}} = \bigcap\{\mathcal{X} \subset \mathbb{N} \mid \Gamma(\mathcal{X}) = \mathcal{X}\} = \bigcap\{\mathcal{X} \subset \mathbb{N} \mid \Gamma(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}\}$.

公理系 ID は positive operator form $\mathcal{A}$ の最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ を表す関係記号 $P^{\mathcal{A}}$ と, それに関する公理を PA に付け加えて得られる. 数学的帰納法は $P^{\mathcal{A}}$ を含む論理式に拡張される. 先ず $P^{\mathcal{A}}$ に関する公理として, $\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}}$, これは $\forall y[\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, y) \to P^{\mathcal{A}}(y)]$ の略記. 最小性を表すための公理図式として, 超限帰納法の公理と呼ばれる $\mathcal{A}(F) \subset F \to P^{\mathcal{A}} \subset F$ を任意, 特に $P^{\mathcal{A}}$ が現れてよい論理式 F について入れる.

例えば positive operator form $\mathcal{A}(X, z)$ が, なんらかの計算可能関係 $\prec$ によって $\mathcal{A}(X, z) \Leftrightarrow (\forall y \prec z\, X(y))$ と定義されているときには, その最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ は関係 $\prec$ の wellfounded part となり, 順序数の表記系 (notation system of ordinals) に対する wellfoundedness proofs での定番である. 尚, 関係の wellfounded part を考えて wellfoundedness proofs をする走りは [Gödel58] の脚注によれば [Ackermann51] のようである.

このように定義された公理系 ID は SOA $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ と証明論的に同等である, cf. [A2018]. ここで上付きのマイナス $-$ は Π^1_1-CA での Π^1_1-論理式 $A(z)$ を 2 階の自由変数を含まないものに制限することを表す. このような論理式を Π^{1-}_1-論理式と呼ぼう. なお $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ には Π^0_1-CA は含めていない, cf. p.48 and p78 in [BFPS81].

先ず ID での論理式 C に現れる関係記号 $P^{\mathcal{A}}$ を, Π^{1-}_1-論理式 $I^{\mathcal{A}}(z) :\Leftrightarrow (\forall X(\mathcal{A}(X) \subset X \to X(z)))$ で置き換えて得られる 2 階の論理式を C^I と書き表すことにする. いま $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ などを positive operator forms として, 数学的帰納法公理 $\left(C(0, P^{\mathcal{A}}, z) \land \forall y(C(y, P^{\mathcal{A}}, z) \to C(y+1, P^{\mathcal{A}}, z)) \to C(a, P^{\mathcal{A}}, z)\right)^I$,
$P^{\mathcal{A}}$ に関する公理 $\left(\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}}\right)^I$, $\left(\mathcal{A}(F(P^{\mathcal{B}})) \subset F(P^{\mathcal{B}}) \to P^{\mathcal{A}} \subset F(P^{\mathcal{B}})\right)^I$ がいずれも $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ で証明できてしまう. $\left(\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}}\right)^I$ は論理的に示せる. 数学的帰納法公理の翻訳には Π^{1-}_1-論理式 $N_C(a, z) :\Leftrightarrow$

$\forall X[C(0,X,z)\wedge\forall y(C(y,X,z)\to C(y+1,X,z))\to C(a,X,z)]$ を考えればよく, 超限帰納法の公理の翻訳には Π^{1-}_1-論理式 $B_F(y):\Leftrightarrow\forall X[\mathcal{A}(F(X))\subset F(X)\to F(X,y)]$ を考えればよい.

逆に Π^{1-}_1-論理式 $A(z)$ に対して $\exists Y\forall z(Y(z)\leftrightarrow A(z))$ を $(\Pi^0_0\text{-CA})_0$ に付け加えた公理系 $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0$ を ID に解釈するには, まず Π^1_1-complete な W を適当に取る. 例えば W としては, computable な cut-free ω-derivations の codes 全体を inductive definitions で最小不動点として定義すればよい. そして 2 階の quantifier $\forall XB(X)$ を $\forall x\left(\forall y\{x\}^W(y)\downarrow\to B(\{y:\{x\}^W(y)\simeq 0\})\right)$ で置き換える. $\exists X$ も同様. こうして 2 階の論理式 C から得られる論理式を C^W と書くことにする. つまりこの解釈では「集合」を computable sets in W に制限している. このとき $(\exists Y\forall z(Y(z)\leftrightarrow A(z)))^W$, つまり $\exists y\left[\forall z\{y\}^W(z)\downarrow\wedge\forall z(\{y\}^W(z)\simeq 0\leftrightarrow A^W(z))\right]$ が ID で証明できる. これより $(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0\vdash C$ ならば, $\mathsf{ID}\vdash C^W$. しかもこの解釈では inductive definition は W に対するものだけでよい. これを $\mathsf{ID}(W)$ と書けば, $\mathsf{ID}\hookrightarrow_\omega(\Pi^1_1\text{-CA})^-_0\hookrightarrow_\omega\mathsf{ID}(W)$ となる. ここで $T\hookrightarrow_\omega S$ は, T が S に 1 階部分を動かすことなく解釈できることを表す.

さらに [Feferman70] は, inductive definitions を α-回繰り返すことができる公理系 ID_α を導入して, Π^1_1-CA の繰り返しが証明論的にこれらに帰着できることを示した.

初めに $<$ を順序型が ε_0 のふつうに作った自然数上の原始再帰的な順序とする. ID_α では, 先ず $\mathcal{A}(X,z,Y)$ を変数 X- positive (X occurs only positively in it) な論理式として, このような $\mathcal{A}$ について 2 変数関係記号 $P^{\mathcal{A}}$ を導入する. $P^{\mathcal{A}}_u(y):\equiv P^{\mathcal{A}}(u,y)$ および $P^{\mathcal{A}}_{<u}:=\sum_{v<u}P^{\mathcal{A}}_v$(disjoint union) として, $u<\alpha$ のときにこれが positive operator form $\mathcal{A}_u(X,z):\equiv\mathcal{A}(X,z,P^{\mathcal{A}}_{<u})$ の最小不動点を表す. つまり α までの順序 $<$ に沿って, 最小不動点を超限再帰的につくったものである. よって $P^{\mathcal{A}}$ に関する公理は $\forall u<\alpha\left(\mathcal{A}_u(P^{\mathcal{A}}_u)\subset P^{\mathcal{A}}_u\right)$, $\forall u<\alpha\left(\mathcal{A}_u(F)\subset F\to P^{\mathcal{A}}_u\subset F\right)$, F は関係記号 $P^{\mathcal{A}},P^{\mathcal{B}},\ldots$ を含んだ任意の 1 階の論理式. そして $\mathsf{ID}_{<\alpha}:=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathsf{ID}_\beta$. ID を ID_1 とも書く.

このとき $\alpha\le\varepsilon_0$ について, $(\Pi^1_1\text{-CA})^{<\omega^\alpha}_0$ は $\mathsf{ID}_{<\omega^\alpha}$ と証明論的に同等（少なくとも証明できる Π^1_1-論理式の範囲は同じ）となり, subsection 2.1 の最後で述べた結果とあわせれば, $(\Sigma^1_2\text{-DC})_0$ は $\mathsf{ID}_{<\omega^\omega}$ と, $(\Sigma^1_2\text{-DC})$, $(\Sigma^1_2\text{-AC})$ はともに $\mathsf{ID}_{<\varepsilon_0}$ とそれぞれ証明論的に同等であることになる.

こうして [IPT70] の時点で, $(\Sigma^1_2\text{-DC})$ などの SOA は inductive definitions の繰り返しに証明論的に帰着された. この結果は次のような意味を reductive proof theory（還元論的証明論）において持つ. 先ず inductive definition は, その最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ が stages I_α に分解できて $I^{\mathcal{A}}=\bigcup_\alpha I_\alpha$, 各 stage は $I_\alpha=\{n\in\mathbb{N}\mid\mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha}I_\beta,n]\}$ とそれまでにつくられた stages から arithmetically definable, つまり Π^1_0-CA を適用して定義されている. このことから stages の添字である順序数 α がよく分かるもの, あるいはそれを括弧に入れれば, 理解し得るとも言える. 特に positive operator form $\mathcal{A}(X,z)$ によって計算可能関係 $\prec$ の wellfounded part を帰納的に定義するときには直観的に理解しやすい. そのような inductive definitions を用いれば, 明らかに impredicative であるいくつかの SOA が証明論的に帰着できるのだから, I_α での添字の順序数 α さえ不問に付せば, SOA よりもかなり安全そうなところへ落とせているとみなせる. 但し, 問題は ID_α が古典論理に基づいた公理系であることで, この時点では未だ当該の SOA が構成的な原理に落とせたとは言えない状況だった.

3 Takeuti

やや時代が遡るがここでは [Takeuti67] に至る道筋を簡単に追っておく.

3.1 [Takeuti53]

基本予想 (Fundamental Conjecture, FC) [Takeuti53] は高階の論理計算に関わるものなのでそれを one-sided sequent calculus で 2 階の場合に導入しておこう. 2 階の quantification を $\exists X\,F(X),\forall X\,F(X)$ と書く. ここで X はなんらかの $k>0$ について k-変数の 2 階の変数. 論理式 $A(x_1,\ldots,x_k)$ と 1 階の変数 $x_1,\ldots,x_k$ について記号列 $\{x_1,\ldots,x_k\}A(x_1,\ldots,x_k)$ を k-変数 abstract という. 意味はもちろんクラス $\{(x_1,\ldots,x_k)\mid A(x_1,\ldots,x_k)\}$ である. abstract は V あたりの文字で表す. abstract $V\equiv(\{x_1,\ldots,x_k\}A(x_1,\ldots,x_k))$ と k-変数の 2 階の変数 X および論理式 $F(X)$ について, $F(V)$ は F の中の $X(t_1,\ldots,t_k)$ を $A(t_1,\ldots,t_k)$ で置き換えて得られる論理

式を表す．このとき 2 階の論理計算 $\mathsf{G^1LC}$ は, 1 階の sequent calculus に 2 階の quantification に関する推論規則として

$$\frac{\Gamma, F(Y)}{\Gamma, \forall X\, F(X)}\ (\forall^2) \qquad \frac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

を付け加えて得られる．$(\forall^2)$ における変数 Y は eigenvariable. $(\exists^2)$ における abstract V は任意のもの, つまり 2 階の quantifiers がいくらそこに現れてもよい.

$(\exists^2)$ から CA $\exists X \forall x_1, \ldots, x_k\, (X(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow V(x_1, \ldots, x_k))$ が出てくる．また逆に CA と推論規則

$$\frac{\Gamma, F(X)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}$$

で $(\exists^2)$ を代用するには, $\forall x_1, \ldots, x_k\, (X(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow V(x_1, \ldots, x_k)) \to (F(X) \leftrightarrow F(V))$ を考えればよい.

同様にしてつくられる高階 (finite-order) の論理計算 sequent calculus を GLC で表す．このとき基本予想 FC は「2 階の sequent calculus $\mathsf{G^1LC}$ および高階のそれ GLC における証明図に対する具体的な操作を何回かすることによって, 任意に与えられた証明図から (cut) を取り除くことができる．しかもその操作の回数の有限性は, Gentzen の証明のような有限的数学の延長上にある方法で示される」であろう, ということである．「予想」というよりも「問題」とか Hilbert's program での「プログラム」に近い．FC 自体には証明図への操作は具体的に与えられている訳ではなく, また「有限的数学の延長上にある方法」がいかなるものかも述べられていない．むしろそれらを同時に発見して解いていこうということであろう.

初めに確認しておくと $\mathsf{G^1LC}$ での cut-elimination theorem, つまり「$\mathsf{G^1LC}$ で証明できる sequent は (cut) 無しでも証明できる」という命題は証明論的に強い．具体的には $\mathsf{G^1LC}$ の cut-elimination theorem から 2 階自然数論 $\mathbb{Z}_2$ の (1-)consistency が有限的に従う．同様に GLC の cut-elimination theorem から高階自然数論 $\mathbb{Z}_\omega$ の (1-)consistency が有限的に従うことも分かる．2 階の論理式

$$N(a) :\equiv (\forall X(X(0) \land \forall y(X(y) \to X(y+1)) \to X(a)) \tag{2}$$

によって「a は自然数である」が書けてしまうからである．もう少し説明すると, 数学的帰納法の公理 IND を N に制限した $IND^N \leftrightarrow (\forall X(X(0) \land \forall y(N(y) \to X(y) \to X(y+1)) \to \forall a(N(a) \to X(a))))$ が証明できてしまう.

これより $\mathbb{Z}_2$ で矛盾が証明されるなら, 証明図全体を N に制限すると, subsection 1.1 末尾での Π^0_1-sentences PA^- について $\mathsf{G^1LC} \vdash \neg\mathrm{PA}^-, \neg\forall X \forall x, y(x = y \to X(x) \to X(y))$ となる．ここで各 term t について $N(t)$ が公理 PA^- から従うことに注意.

さらに $\mathcal{E}(X) :\equiv (\forall x, y(x = y \to X(x) \to X(y)))$ とすると, $\forall X \forall x, y(\mathcal{E}(X) \to x = y \to X(x) \to X(y))$, つまり $(\forall X \forall x, y(x = y \to X(x) \to X(y)))^{\mathcal{E}}$ は証明できるから, 再び証明図を $\mathcal{E}$ に制限して $\mathsf{G^1LC} \vdash \neg\mathrm{PA}^-$ となる．ここで各 abstract $V(X, \ldots)$ について $\mathcal{E}(X), \ldots \to \mathcal{E}(V^{\mathcal{E}}(X, \ldots))$ が証明できることに注意．この sequent の cut-free proof を取れば, それは 1 階の証明であるから, subsection 1.1 末尾での [Gentzen34/35] と同じ状況となり, これはあり得ないこととなる.

こうして 2 階自然数論 $\mathbb{Z}_2$ の無矛盾性は $\mathsf{G^1LC}$ での cut-elimination theorem に帰着され, 高階自然数論 $\mathbb{Z}_\omega$ の無矛盾性と GLC の cut-elimination theorem についても同様である.

基本予想 FC は 2 階あるいは高階自然数論 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_\omega$ の無矛盾性を示すという, やや哲学的な響きがあるが, かといって問題自体には解法の道筋が何も示されていない問題に, 数学的方向を与えたと言える．つまり $\mathsf{G^1LC}, \mathsf{GLC}$ の cut elimination を Gentzen の方法の延長において示すという数学的問題を定式化したのだと考える, cf. [A2005].

だから $\mathsf{G^1LC}, \mathsf{GLC}$ の cut elimination 自体が成り立つことが [Schütte60, Tait66, Takahashi67, Prawitz68] によって分かっても, これらの証明は FC には寄与しない．もちろん cut elimination が成り立つことが分かったのは, 論理の問題が解けたという意味があるし, 正しいことだけでも分かればそれの証明を探す気にはさせる意味はある．但し管見では, $\mathsf{G^1LC}$ の部分体系の cut-elimination を示すことは, 対応する $\mathbb{Z}_2$ の部分の 1-consistency を示すのより, 技術的に容易とは思えない．むしろ逆で, 後者のほうがやりやすいこともままある, cf. [A2020b].

3.2 [Takeuti55]

さて FC の部分解を紹介しよう．先ず [Takeuti55] の結果を [A88, A99] によって整理したかたちの説明から始める．$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ において 2 階の existential quantifier の導入規則 $(\exists^2)$ を次のように制限した体系を LBI と表すことにする．

$$\frac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

が LBI で許されるのは

$$\text{abstract } V \text{ が変数のときか, または } \exists X\, F(X) \text{ が } \Sigma^1_1\text{-論理式のとき} \tag{3}$$

$\exists X\, F(X)$ が Σ^1_1-論理式ということは $F(X)$ が 2 階の quantifiers を含まない 1 階の論理式という意味である．

先ず LBI での cut elimination から 1 階自然数論 PA の無矛盾性が有限的に従うことが，$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ と $\mathbb{Z}_2$ とのときと同様に分かる．PA の矛盾に至る証明図を (2) での自然数を定義する Π^1_1-論理式 $N(a)$ に制限する．数学的帰納法公理 $\forall x(A(0) \to \forall y(A(y) \to A(y+1)) \to A(x))$ はこのとき $\forall x(N(x) \to A^N(0) \to \forall y(N(y) \to A^N(y) \to A^N(y+1)) \to A^N(x))$ となるが，$N(x)$ が（parameter-free の）Π^1_1-論理式なので $V(x) \equiv (N(x) \wedge A^N(x))$ によって LBI で証明可能となる．よって LBI $\vdash \neg\mathrm{PA}^-$ となり，cut elimination してあり得ないことが分かる．

さてでは LBI の証明図からどうやって (cut) を除去するかを説明する．問題なのは 2 階の quantifier が絡む (cut) である：

$$P = \begin{array}{c}
 \qquad\qquad\qquad \dfrac{F(V), \Delta}{\exists X\, F(X), \Delta}\ (\exists^2) \\
\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma \end{array}}{\Gamma} \\
\vdots \\
\Phi
\end{array} \tag{4}$$

ここで Φ は 1 階の sequent とする．無矛盾性のためなら PA^- が 1 階の sequent だからこれでよい．

論理式としてはどう考えても $F(V)$ のほうが $\exists X\, F(X)$ より複雑になり得るから，(cut) の左上で X へ V を単に代入してもうまくいかない．そこで左上で inversion して証明図を

$$P_0(X) = \begin{array}{c}
\vdots \\
\dfrac{\Gamma, \neg F(X)}{\Gamma, \neg F(X)} \\
\vdots \\
\Phi, \neg F(X)
\end{array} \tag{5}$$

と書き換える．これにより右上が消えたので，元の証明図より ‘簡単’ である．よって ‘超限帰納法の仮定’ より 1 階の sequent $\Phi, \neg F(X)$ の (cut) 無しの証明図 $P_0^{cf}(X)$ を得るが，これは 1 階の LK での証明図である．証明図 $P_0^{cf}(X)$ において変数 X に abstract V を代入すれば $\Phi, \neg F(V)$ の（本質的には）1 階の証明図 $P_0^{cf}(V)$ が得られる．そこで (cut) を用いて

$$P' = \begin{array}{c}
\qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\ P_0^{cf}(V) & \\ \Phi, \neg F(V) & F(V), \Delta \end{array}}{\exists X\, F(X), \Delta, \Phi}\ (cut) \\
\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \Gamma, \forall X \neg F(X) & \exists X\, F(X), \Gamma, \Phi \end{array}}{\Gamma, \Phi} \\
\vdots \\
\Phi, \Phi
\end{array} \tag{6}$$

$P_0^{cf}(V)$ は 1 階の証明図だから '簡単' である．よって得られた (cut) つきの証明図 P' は元の P よりも全体として '簡単' である．具体的には証明図に現れる sequent に [Gentzen38] と同様にして ordinal term$<\varepsilon_0$ を貼付ける．ここで 1 階の証明図が受け取る順序数は有限である．だから予め $(\exists^2)$ のところでは ω を足しておけばよい．尚, 論理式 A の複雑さ $\mathrm{dg}(A)<\omega$ を定義する際に, Σ^1_1-論理式（および Π^1_1-論理式も）$\mathrm{dg}(\exists X\, F(x))=0$ としてよい．こうして LBI の 1 階の sequent Φ に至る証明図 P に, 同じく Φ の cut-free な証明図を対応させる $P\mapsto CE(P)$ が ε_0-recursion で作れることが分かる．

以上の証明は, 推論規則

$$\frac{F(V),\Delta}{\exists X\, F(X),\Delta}\ (\exists^2)$$

を, 1 階の sequent Ψ たちに対して $\Psi,\neg F(X)$ の cut-free LK-proofs $Q(X)$ が与えられたら, それから Δ,Ψ の証明を作り出す operation と考えている．図で書くと, $\Psi,\neg F(X)$ の cut-free LK-proofs $Q(X)$ すべてを並べて

$$\frac{\cdots\quad \begin{array}{c}\vdots\ Q(X)\\ \Psi,\neg F(X)[X:=V]\end{array}\quad\cdots\quad F(V),\Delta}{\exists X\, F(X),\Delta,\Psi}$$

とみなして, '超限帰納法の仮定' より得られる特定の証明図 $P_0(X)$ を取り出している．section 4, [Buchholz77] における $\Omega_{\mu+1}$-rule と同じ書換手続きである, cf. [Buchholz2001].

3.3 [Takeuti57, Takeuti58, Takeuti61]

竹内外史の証明論における仕事でどれが最良かと問われれば, 迷わず [Takeuti57, Takeuti58] を挙げる．これらによって Π^1_1-CA_0 に相当する $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ の部分体系の cut elimination が [Gentzen38] の延長線上で得られた．

[Takeuti58] において cut-elimination が証明された $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ の部分体系はかなり複雑なものなので, 簡略化して述べると推論規則

$$\frac{\Gamma,F(V)}{\Gamma,\exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

を

$$\text{abstract } V \text{ が変数のときか, または } \exists X\, F(X) \text{ が isolated であるとき} \tag{7}$$

に制限した体系である．ここで isolated な論理式とはその中に現れている 2 階の quantifiers が nest しないこと, つまり $\exists X(\cdots\forall Y(\cdots X\cdots)\cdots)$ という quantifiers の組み合せが無いということ．isoltaed な論理式を再帰的に定義すれば, 1 階の論理式と Π^1_1-, Σ^1_1-論理式は isolated．isolated な論理式 $F(X), A(y)$ から代入によって得られる論理式 $F(\{y\}A(y))$ も isolated.

つぎに [Takeuti61] は高階の GLC の部分体系の cut-elimination を示しているが, ここでは簡単のため 2 階に話しを限っておく．$\mathsf{G}^1\mathsf{LC}$ において推論規則

$$\frac{\Gamma,F(V)}{\Gamma,\exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

を

$$\exists X\, F(X) \text{ が 2 階の自由変数を含まないとき} \tag{8}$$

に制限した体系を $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ と書き表すことにする．$\exists X\, F(X)$ については 2 階の自由変数を含まない, という以外の条件を求めない．他方で $\exists X\, F(X)$ が 2 階の自由変数を含めば abstract V が変数のときですら $(\exists^2)$ は用いることができない．よって initial sequent として任意の論理式 A について

$$\Gamma,\neg A,A$$

を認める．

ひとつ注意すると, $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ で abstract V が変数のときには $\exists X\, F(X)$ が 2 階の自由変数を含んでいてもよい, と $(\exists^2)$ に関する条件を緩和してしまうと任意の論理式 A について CA $\exists Y \forall z(Y(z) \leftrightarrow A(z))$ が証明できてしまう. なぜならばそのとき, $\forall X \exists Y \forall z(Y(z) \leftrightarrow X(z))$ が $\forall z(X(z) \leftrightarrow X(z))$ から緩めた $(\exists^2)$ によって出てきてしまうから. よってその cut-elimination は $\mathbb{Z}_2$ の (1-)consistency を有限的に導く.

他方で $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ では 2 階の自由変数を含まない A については $\exists Y \forall z(Y(z) \leftrightarrow A(z))$ は証明できる. そして $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ での cut-elimination は $\mathrm{ID}_{<\omega}$ の (1-)consistency を有限的に導くことが分かる. なぜならば X-positive operator form $\mathcal{A}(X, z, Y)$ についてその最小不動点 $P^{\mathcal{A}}_n\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が 2 階の論理式で再帰的に

$$I^{\mathcal{A}}_n(z) :\Leftrightarrow \left(\forall X(\mathcal{A}(X, I^{\mathcal{A}}_{<n}) \subset X \to X(z))\right)$$

と書けてしまうからである. も少し説明すると, $\mathrm{ID}_{<\omega}$ の論理式 B に対して, predicates $P^{\mathcal{A}}_n$ を論理式 $I^{\mathcal{A}}_n$ で置き換えて得られる 2 階の論理式を B^I で表す. すると section 2 で見たように, $\mathrm{ID}_{<\omega} \vdash B$ ならば数学的帰納法から B^I が $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ 上で従うことが分かる. それは論理式 $I^{\mathcal{A}}_n$ に 2 階の自由変数が含まれていないからである.

具体的には先ず $\forall z(\mathcal{A}(I^{\mathcal{A}}_n, z, I^{\mathcal{A}}_{<n}) \to I^{\mathcal{A}}_n(z))$ を示すため, $\mathcal{A}(I^{\mathcal{A}}_n, z, I^{\mathcal{A}}_{<n})$ と $\mathcal{A}(X, I^{\mathcal{A}}_{<n}) \subset X$ を仮定する. いま $I^{\mathcal{A}}_n(y)$ とすれば, 二つ目の仮定より推論規則 $(\exists^2)$ で $X(y)$ が分かる. y は任意だったから $I^{\mathcal{A}}_n \subset X$ であるから, X-positivity より一つ目の仮定から, 1 階論理で $\mathcal{A}(X, z, I^{\mathcal{A}}_{<n})$ となる. 二つ目の仮定をもう一度用いて $X(z)$ を得る. X は任意だったから $I^{\mathcal{A}}_n(z)$ となる.

次に論理式 C について $\mathcal{A}(C, I^{\mathcal{A}}_{<n}) \subset C$ を仮定して, $I^{\mathcal{A}}_n \subset C$ を示すために, $I^{\mathcal{A}}_n(z)$ を仮定する. すると $(\exists^2)$ を 2 階の自由変数を含まない $I^{\mathcal{A}}_n(z)$ に適用して $\mathcal{A}(C, I^{\mathcal{A}}_{<n}) \subset C \to C(z)$ を得るので, 初めの仮定により $C(z)$ となる.

つぎに論理式 A に対して 1 階の quantifiers を (2) での自然数を表す論理式 N で制限したものを A^N で表す. N には 2 階の自由変数が含まれていないことに注意すれば, $(\forall x(A(0) \wedge \forall y(A(y) \to A(y+1)) \to A(x)))^N$ が $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^-$ で証明できることが分かる. また推論規則 $(\exists^2)$ での $\exists X\, F(X)$ は $\exists X\, F^N(X)$ に変化するが, それでも 2 階の自由変数を含まないことには変わりない. こうして sentence B が $\mathrm{ID}_{<\omega} \vdash B$ ならば $\mathsf{G}^1\mathsf{LC}^- \vdash \neg\mathrm{PA}^-, (B^I)^N$ が結論され, B が Σ^0_1-論理式のときには $B^I \equiv B$ かつ $B^N \to B$ だから $\mathrm{ID}_{<\omega} \vdash B \;\Rightarrow\; \mathsf{G}^1\mathsf{LC}^- \vdash \neg\mathrm{PA}^-, B$.

さて [Takeuti58, Takeuti61] での cut-elimination procedure において, 推論規則 $(\exists^2)$ への制限 (7), (8) は, 証明に現れる論理式（の occurrences）を適切に ω-順序に並べるために要請されたものである. しかしこれを説明すると長くなるので最も簡単な場合について説明しよう. 2 階の自然数論 BI を, 数学的帰納法は任意の 2 階の論理式に適用可とし, 論理計算は subsection 3.2 での LBI とする. 特に推論規則 $(\exists^2)$ は制限 (3) のもとにのみ使える. 明らかに ID_1 は BI に埋め込める.

さて BI で証明できる 1 階の論理式 A が $\mathbb{N}$ で正しいことを示すために, A の cut-free ω-derivation の存在を示そうとする. それを LBI のときと同様にやろうとしてみる. 1 階の sequent Φ の証明図 (4) から同じく 1 階の sequent $\Phi, \neg F(X)$ の証明図 $P_0(X)$, (5) をつくって, ‘超限帰納法の仮定’ から $\Phi, \neg F(X)$ の cut-free ω-derivation $P^{cf}_0(X)$ を得たとする. しかし一般には cut-free ω-derivations たちの depth は $\Omega = \omega_1$（実際にはその recursive analogue ω^{CK}_1）でしか抑えることができないので, $P^{cf}_0(X)$ の depth の上界は Ω であるから, とりあえず $(\exists^2)$ のところで順序数 Ω を足しておくことにしても, $P^{cf}_0(X)$ の depth の上界を Ω より小さいところで ‘計算’ しないといけない. つまり, 超限帰納法で示そうとしている事実「BI で証明できる 1 階の sequent は cut-free ω-derivation を持つ」では弱過ぎるのである. より強く「BI での 1 階の sequent Φ の証明 P に対して, Φ の cut-free ω-derivation でその depth が高々$o(P) < \omega^{CK}_1$ となるものが存在する」を示す必要がある. 先ず証明図 (5) $P_0(X)$ 自体が推論規則 $(\exists^2)$ を含み得るのでその順序数 $\alpha = o(P_0(X))$ は, $\varepsilon_{\Omega+1}$ よりは小さいが Ω よりは大きくならざるを得ない. そこで $\alpha > \Omega$ に対して順序数 $\vartheta(\alpha) < \Omega$ を与えるなんらかの collapsing function ϑ が必要になる.

ここではそれを [Rathjen-Weiermann93] での collapsing function によって定義する. これによる notation system での大小関係 $<$ は [Takeuti57] での ordinal diagrams $O(2, 1)$ での $<_0$ に当る, cf. [A88, A99]. 初めに $\alpha < \varepsilon_{\Omega+1}$ について順序数の有限集合 $E(\alpha)$ を定義する. $E(0) = E(\Omega) = \emptyset$. $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_k < \varepsilon_{\Omega+1}$ として

$E(\omega^{\alpha_k}+\cdots+\omega^{\alpha_0})=\bigcup_{i\leq k}E(\alpha_i)$. $\alpha<\Omega$ を ε-number として $E(\alpha)=\{\alpha\}$.

つぎに順序数 $\alpha,\beta<\varepsilon_{\Omega+1}$ について順序数の集合 $C(\alpha,\beta)\subset\varepsilon_{\Omega+1}$ と順序数 $\vartheta(\alpha)\leq\Omega$ を α に関する帰納法で同時に定義する.

1. $\{0,\Omega\}\cup\beta\subset C(\alpha,\beta)$.
2. $\gamma,\delta\in C(\alpha,\beta)\Rightarrow\gamma+\delta,\omega^{\gamma}\in C(\alpha,\beta)$.
3. $\gamma\in C(\alpha,\beta)\cap\alpha\Rightarrow\vartheta(\gamma)\in C(\alpha,\beta)$.
4. $\vartheta(\alpha)=\min\{\beta\leq\Omega:C(\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\beta,E(\alpha)\subset C(\alpha,\beta)\}$.

可算順序数 β について集合 $C(\alpha,\beta)$ も可算である. この事実から, $\beta_0=\max E(\alpha)+1<\Omega$ から始めて, 再帰的に $\beta_{n+1}=\min\{\beta<\Omega:C(\alpha,\beta_n)\cap\Omega\subset\beta\}$ と定めていって, $\beta=\sup_n\beta_n<\Omega$ とおけば $E(\alpha)\subset C(\alpha,\beta)$ かつ $C(\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\beta$ となり, 任意の $\alpha<\varepsilon_{\Omega+1}$ について $\vartheta(\alpha)<\Omega$ となることが分かる. また定義から, $\vartheta(\alpha)$ は ε-数で, $E(\alpha)\subset C(\alpha,\vartheta(\alpha))\cap\Omega$ より $E(\alpha)<\vartheta(\alpha):\Leftrightarrow\forall\beta\in E(\alpha)(\beta<\vartheta(\alpha))$. これから $\vartheta(\alpha)<\vartheta(\beta)$ が成り立つ必要十分条件は, $\alpha<\beta$ かつ $E(\alpha)<\vartheta(\beta)$ かまたは $\vartheta(\alpha)\leq E(\beta)$ となることである. これらのことから $C(\varepsilon_{\Omega+1},0)$ は, 記号 $0,\Omega,\omega,+,\vartheta$ 上の terms の集合とみなせ, そこでの大小関係 $\alpha<\beta$ は計算可能となることが分かる. Collapsing function は $\Omega<\alpha\mapsto\vartheta(\alpha)<\Omega$ なるものであるから, 順序は保存しないことに注意. 例えば $\Omega>\vartheta(\Omega)$ だが $\vartheta(\Omega)<\vartheta(\vartheta(\Omega))$.

以上のもとで $P_0^{cf}(X)$ の上界は $\alpha=P_0(X)$ について $\vartheta(\alpha)$ で与えられることが分かる. また sequent $\Phi,\neg F(X)$ の有限の証明図 $P_0(X)$ から cut-free ω-derivation $P_0^{cf}(X)$ を得てから, 変数 X に abstract V を代入して $\Phi,\neg F(V)$ の cut-free ω-derivation $P_0^{cf}(V)$ を得るまでの操作全体をひとつの推論規則 substitution (sub) のかたちで書いて,

$$\dfrac{\Phi,\neg F(X):\alpha}{\Phi,\neg F(V):\vartheta(\alpha)}\ (sub)$$

と表す. ここでコロン : の右側の α 等はそこまでの証明図に与えた順序数である. すると (4) の証明図

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma,\forall X\neg F(X)\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{F(V),\Delta:\delta}{\exists X\,F(X),\Delta:\Omega+\delta}\,(\exists^2)\\ \vdots\\ \exists X\,F(X),\Gamma\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma:\gamma\\ \vdots\\ \Phi:\alpha\end{array}}$$

から (6) の代わりに次の証明図が得られる.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma,\forall X\neg F(X)\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \dfrac{\Gamma,\neg F(X)}{\Gamma,\neg F(X)}\\ \vdots\\ \Phi,\neg F(X):\alpha_1\end{array}}{\Phi,\neg F(V):\vartheta(\alpha_1)}\,(sub)\qquad F(V),\Delta:\delta}{\exists X\,F(X),\Delta,\Phi:\vartheta(\alpha_1)+\delta}\,(cut)\\ \vdots\\ \exists X\,F(X),\Gamma,\Phi\end{array}}{\begin{array}{c}\Gamma,\Phi:\gamma_2\\ \vdots\\ \Phi,\Phi:\alpha_2\end{array}}$$

先ず注意しなければならないのは, 一旦, 論理式を変化させてしまう推論規則 (sub) を導入したらそれによって $(\exists^2)$ の主論理式 $\exists X\,F(X)$ が下の (cut) までの間で変化してしまう恐れがある．しかしこれはあり得ない．なぜなら (sub) の上にある論理式 $\Phi, \neg F(X)$ は 1 階のものだからであるから．つまり論理式 $\exists X F(X)$ がある限り, そこには (sub) は無い．従ってそこでは collapsing function ϑ が作用していないので, 関係 $\vartheta(\alpha_1) < \Omega$ が遺伝して $\gamma_2 < \gamma$ を得る．

つぎにこの関係を $\alpha_2 < \alpha$ まで続けるためには, 元の証明図 (4) において, Γ から Φ の間にも推論規則 (sub) があっては困る．従って上の (sub) を用いた証明図の書き換えにおいて, 新しい (sub) を導入する場所 Φ を, Γ より下の (sub) の中で一番上（もしそのような (sub) があれば）とすることになる．そうであれば $\alpha_2 < \alpha$ であるばかりではなく $\vartheta(\alpha_2) < \vartheta(\alpha)$ も成り立つ．なぜなら $E(\alpha_2) \subset E(\alpha) \cup \{\vartheta(\alpha_1)\}$ であり, $E(\alpha) < \vartheta(\alpha)$, しかも $\vartheta(\alpha_1) < \vartheta(\alpha)$ であるからである．後者は $\alpha_1 < \alpha$ かつ $E(\alpha_1) \subset E(\alpha) < \vartheta(\alpha)$ より分かる．

こうして「BI で証明できる 1 階の sequent は, その depth が $\vartheta(\varepsilon_{\Omega+1})$ より小さい cut-free ω-derivation を持つ」が示される．

論理計算での cut-elimination procedure について最後に簡単に触れる．例えば $(\exists^2)$ の主論理式 $\exists X F(X)$ が 2 階の自由変数を含まず, $F(X)$ が 1 階の論理式から変数 X を含まない Π^1_1-, Σ^1_1-論理式を代入して得られた場合を考える．すると $\Phi, \neg F(X)$ の証明はたとえ cut-free であっても LBI での推論規則 $(\exists^2)$ を含むことになるので, subsection 3.2 の最後で触れた推論規則 $(\exists^2)$ の解釈を施すと一種の infinitary derivation を表していると考えられ, その depth の上界はやはり Ω としておくしかなく, これに伴って collapsing function が必要になる．但し, 論理計算では 1 階の sequent の cut-free な証明図は有限であるので, $(\exists^2)$ の主論理式 $\exists X F(X)$ において $F(X)$ が 1 階の論理式のときには subsection 3.2 と同様の書き換えでよい．

[Takeuti58, Takeuti61] では上記の二重の階層, 高々Π^1_1-, Σ^1_1-論理式とその上のそれらから 2 階の quantification を一度した論理式, が有限の階層に延ばされている．そのためには順序数 $\alpha > \Omega_n = \omega_n$ を $\alpha' < \Omega_n$ につぶす collapsing functions が必要になる．さらに [Takeuti67] ではこの階層が ω まで延ばされて, 2 階の自然数論 Π^1_1-CA+BI あるいは証明論的には同等な ID_ω の無矛盾性証明が [Gentzen38] の延長線上で与えられている．そこで使われたのが [Takeuti57] を無限にまで延ばした [Takeuti60] であった．

4 Buchholz-Pohlers-Jäger

S. Feferman は [IPT70] の後に残された証明論の大きな課題として「ID_α を直観主義論理に基づく $\mathrm{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ に証明論的に帰着させること」そして（それを通じて）「ID_α の証明論的順序数を意味が分かる notation systems で表すこと」を挙げている．前者での $\mathcal{O}$ は Kleene による計算可能整列順序の codes で, それを $\mathrm{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ において inductive definition で生成する．$\mathcal{O}$ のようなより意味がはっきりした inductive definitions に限り, しかも直観主義上でのみそれを議論することで, 添字の順序数 α がよく分る順序（例えば ε_0）である限り, $\mathrm{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ は構成的とみなせる．また後者の課題は, [Takeuti57, Takeuti60] での ordinal diagrams はいわば図形そのものなので, ordinal diagram を生成する演算の意味が数学的（集合論的）に分らない．それを意味が付くような notation systems で置き換えたいということであろう．

先ず [Pohlers77, Pohlers78] において [Takeuti67] と類似の cut elimination procedure で $|\mathrm{ID}_\alpha|$ の上界が求められた．$\mathrm{ID}^i_\alpha(\mathcal{O})$ での下界の証明は [Buchholz-Pohlers78] による．これにより上記の問題はとにもかくにも解決された．しかしその上界の手法はいまだ [Takeuti67] によっていて, 彼らを十分には満足させなかった．そこで新たな cut elimination の手法が模索されて [BFPS81] に行き着くことになる．以下で導入された方法をふたつ略述しよう．

4.1 $\Omega_{\mu+1}$-rule

[Buchholz77] において導入された新しい推論規則 $\Omega_{\mu+1}$-rule を説明しよう．それはおおよそ [Gentzen38]: [Schütte51]: [Tait65]= [Takeuti57]: [Buchholz77]: [Howard72] という位置関係にある．これによって Π^1_1-CA あるいはそれと同等な ID の証明論的分析が infinitary derivations を通じて得られる．ここでは最も簡単な

$\mathsf{ID} = \mathsf{ID}_1$ とそのための規則 Ω-rule について考える．先ず数学的帰納法の公理は ω-rule によって「証明」してしまう．つぎに subsection 2.3 での公理 $\mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}) \subset P^{\mathcal{A}}$ を推論規則で表して

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, n), P^{\mathcal{A}}(n)}{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)}$$

を入れる．ここまでの規則による体系を ID_0^∞ と書く．ID_0^∞ では negative な $\neg P^{\mathcal{A}}(n)$ を導入する規則が無いことに注意しよう．よってそれは本質的には initial sequent において $\Gamma, \neg P^{\mathcal{A}}(n), P^{\mathcal{A}}(n)$ としてのみ現れる．

つぎに超限帰納法の公理 $\mathcal{A}(F) \subset F \to P^{\mathcal{A}} \subset F$ を「証明」することを考える．この公理の結論部分 $\forall x(P^{\mathcal{A}}(x) \to F(x))$ は ω-rule により $\{P^{\mathcal{A}}(n) \to F(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ から出てくる．ここで $P^{\mathcal{A}}(n)$ が negative に現れている論理式 $P^{\mathcal{A}}(n) \to F(n)$ を「証明」する規則を導入するため，その意味を [Gentzen34/35] もしくは BHK-解釈によって考える．それは『$P^{\mathcal{A}}(n)$ の「証明」から $F(n)$ の「証明」を得る手段（操作）を持っている』だろう．ここで「$P^{\mathcal{A}}(n)$ の証明」と言っているものを，「$P^{\mathcal{A}}(n)$ の ID_0^∞ での cut-free derivation d」と理解する．そのとき操作 π はこのような derivations d を $F(n)$ の「証明」$\pi(d)$ に変換する．そこで derivations d に $P^{\mathcal{A}}$ が positive にしか現れていない論理式から成る sequent Δ_d が付け加わった場合も許すことにしてそのような derivations 全体を $\mathcal{D}_n$ で表す．$d \in \mathcal{D}_n$ は，d が ID_0^∞ でのなんらかの positive sequent $\Delta_d, P^{\mathcal{A}}(n)$ の cut-free derivation であることを示す．さらに「$F(n)$ の証明」をより一般に「sequent Γ の証明」にしておき，変換する操作の内実を問わないことにして $\mathcal{D}_n$-branching な rule を得る：

$$\frac{\cdots \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_n)}{\neg P^{\mathcal{A}}(n), \Gamma}$$

ここで Γ は任意の sequent で，rule の上は positive sequent $\Delta_d, P^{\mathcal{A}}(n)$ の derivation $d \in \mathcal{D}_n$ ごとに Δ_d, Γ の derivation $\pi(d)$ が並んでいる．

cut elimination を考えるとき，この rule の直下での cut

$$\frac{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \qquad \dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_n)}{\neg P^{\mathcal{A}}(n), \Gamma}}{\Gamma}$$

を rule に組み込んでおいたほうがよいので，こうしてつぎの Ω-rule に至る：

$$\frac{\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \quad \cdots \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi(d) \\ \Delta_d, \Gamma \end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_n)}{\Gamma}\ (\Omega)$$

Ω-rule の入った infinitary derivations の体系を ID_1^∞ と書く．論理式 $P^{\mathcal{A}}(n)$ の複雑さは 0 と定義することで ID_1^∞ の derivations による $\vdash_c^\alpha \Gamma$ を得る．但し Ω-rule ではこう定める．subsection 3.3 での ordinal term α の中に現れる Ω の occurrence ひとつに着目して $\alpha = \alpha[\Omega]$ と書く．但しこの Ω の occurrence は collapsing function ϑ の scope 内にはないとする．$z \leq \Omega$ について $\alpha[z]$ で $\alpha[\Omega]$ の中の注目している Ω の occurrence を z で置き換えて得られる ordinal term を表す．このとき $c < \omega$ として，まず $\vdash_c^{\alpha[0]} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$ であるとする．さらに任意の positive sequent $\Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$ と $z < \Omega$ に対して，$\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$ ならば $\vdash_c^{\alpha[z]} \Delta, \Gamma$ であるとする．以上の下で，$\vdash_c^\alpha \Gamma$ と定める．

$$\frac{\vdash_c^{\alpha[0]} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n) \quad \cdots \quad \dfrac{\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)}{\vdash_c^{\alpha[z]} \Delta, \Gamma} \quad \cdots\ (z < \Omega, \Delta \subset Pos)}{\vdash_c^\alpha \Gamma}$$

この Ω-rule により超限帰納法の公理 $\mathcal{A}(F) \subset F \to P^{\mathcal{A}} \subset F$ を証明しよう: $\vdash_0^{\Omega+\omega} \neg(\mathcal{A}(F) \subset F), \neg P^{\mathcal{A}}(n), F(n)$. Ω-rule において $\Gamma = \{\neg(\mathcal{A}(F) \subset F), \neg P^{\mathcal{A}}(n), F(n)\}$, 論理式 F の複雑さ $k < \omega$ について $\alpha[\Omega] = 2k + 2\Omega$ とお

く．すると先ず$\vdash_0^0 \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$．いま$z<\Omega$について$\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$であるとする．このとき$\vdash_0^{\alpha[z]} \Delta, \Gamma$であることがつぎのようにして分かる．$\vdash_0^z \Delta, P^{\mathcal{A}}(n)$を示す cut-free derivation dにおいて，結論の中の$P^{\mathcal{A}}(n)$に繋がる論理式$P^{\mathcal{A}}$をすべてFで置き換える．そしてこのままで derivation にならないところをつぎのように書き換える：

$$\dfrac{\vdash_0^z \Pi, P^{\mathcal{A}}(m), \mathcal{A}(P^{\mathcal{A}}, m)}{\vdash_0^{z+1} \Pi, P^{\mathcal{A}}(m)} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\vdash_0^{2k+2z} \Pi', \Gamma, F(m), \mathcal{A}(F, m) \quad \vdash_0^{2k} \neg F(m), F(m)}{\vdash_0^{2k+2z+1} \Pi', \Gamma, F(m), \mathcal{A}(F, m) \wedge \neg F(m)}}{\vdash_0^{2k+2(z+1)} \Pi', \Gamma, F(m)}\ (\exists)$$

ここで右図での$(\exists)$の主論理式は$\neg(\mathcal{A}(F) \subset F) \equiv \exists x\,(A(F,x) \wedge \neg F(x))$．こうして$\Omega$-rule により$\vdash_0^\alpha \Gamma$．

他方で Lemma 1.3 はそのままで成り立つ．さてすると$\mathsf{ID}_1 \vdash P^{\mathcal{A}}(n)$であるなら，ある$c<\omega$について$\mathsf{ID}_1^\infty$において$\vdash_c^{\Omega+\omega^2} P^{\mathcal{A}}(n)$．これより$\alpha = 2_c(\Omega+\omega^2)$について$\vdash_0^\alpha P^{\mathcal{A}}(n)$．ここから$|n|_{\mathcal{A}} = \min\{\beta \mid n \in I_{\beta+1}\}$を抑えるためには$\alpha > \Omega$を$<\Omega$に collapse できればよい．

Lemma 4.1 (Collapsing Lemma)
positive なΓについて$\vdash_0^\alpha \Gamma$であるとする．このとき$\vdash_0^{\vartheta(\alpha)} \Gamma$.

Proof. αに関する超限帰納法による．$\vdash_0^\alpha \Gamma$がΩ-rule の結論である場合には，$\vdash_0^{\alpha[0]} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$より$\vdash_0^{\vartheta(\alpha[0])} \Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$．positive な$\Gamma, P^{\mathcal{A}}(n)$と$z=\vartheta(\alpha[0])$について$\Omega$-rule の仮定より$\vdash_0^{\alpha[z]} \Gamma$．よって$\vdash_0^{\vartheta(\alpha[z])} \Gamma$．ここで$z<\Omega$と$\alpha[\Omega]$での$\Omega$の occurrence に関する仮定より$\alpha[z] < \alpha[\Omega]$．さらに$E(\alpha[z]) \subset E(\alpha[\Omega]) \cup \{z\} < \vartheta(\alpha[\Omega])$．よって$\vartheta(\alpha[z]) = \vartheta(\alpha[\vartheta(\alpha[0])]) < \vartheta(\alpha[\Omega])$. □

そこで$\alpha = 2_c(\Omega+\omega^2)$について$\vdash_0^\alpha P^{\mathcal{A}}(n)$であったから，Lemma 4.1 より$\vdash_0^{\vartheta(\alpha)} P^{\mathcal{A}}(n)$．これより$|n|_{\mathcal{A}} \leq \vartheta(\alpha) < \vartheta(\varepsilon_{\Omega+1})$.

以上のΩ-rule による証明と [Takeuti57] との類似は明らかだろう, cf. [Buchholz2001]．少し明確にするために section 3 での SOA BI を考えて, LBI での制限 (3) のもとでの

$$\dfrac{\Gamma, F(V)}{\Gamma, \exists X\, F(X)}\ (\exists^2)$$

を「証明」するΩ-rule を考える．そのため$d \in \mathcal{D}_F$を 1 階の sequent $\Delta_d, \neg F(X)$の cut-free derivations とする．ここで変数XはΔ_dに現れない．ここでのΩ-rule を

$$\dfrac{\Gamma, \neg F(X) \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi(d)\\ \Delta_d, \Gamma\end{array} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_F)}{\Gamma}\ (\Omega)$$

とする．数学的帰納法をω-rule で「証明」して BI を infinitary calculus BI^∞で置き換える．但しBI^∞での$(\exists^2)$はVが変数の場合のみ$F(V)$から$\exists X F(X)$を導く．$\vdash \Gamma$はBI^∞での infinitary derivation の存在を示す．いま LBI での$(\exists^2)$でFが 1 階の論理式であるとして，$\vdash \Gamma, \exists X F(X), F(V)$であるとする．先ず$\vdash \Gamma, F(X), \neg F(X)$より$\vdash \Gamma, \exists X F(X), \neg F(X)$．つぎに$d \in \mathcal{D}_F$が 1 階の sequent $\Delta_d, \neg F(X)$の cut-free derivation であるとして，dには$(\exists^2)$が使われていないことに注意して，変数Xに abstract Vを代入して$\Delta_d, \neg F(V)$の derivation $d(V)$を得る．これと$\vdash \Gamma, \exists X F(X), F(V)$より$(cut)$により$\vdash \Delta_d, \Gamma, \exists X F(X)$．よって$\Omega$-rule で$\vdash \Gamma, \exists X F(X)$.

$$\dfrac{\Gamma, \exists X F(X), \neg F(X) \quad \cdots \quad \dfrac{\Gamma, \exists X F(X), F(V) \quad \begin{array}{c}\vdots\ d(V)\\ \Delta_d, \neg F(V)\end{array}}{\Delta_d, \Gamma, \exists X F(X)} \quad \cdots\ (d \in \mathcal{D}_F)}{\Gamma, \exists X F(X)}\ (\Omega)$$

BI^∞での Collapsing Lemma 4.1 が同様に 1 階の sequent Γについて成り立つ．

4.2 Local predicativity

[Pohlers81, BFPS81] で導入されたもうひとつの方法 local predicativity を説明する．positive operator form $\mathcal{A}$ の最小不動点は $I^{\mathcal{A}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ として表せて, 各 stage は $I_\alpha = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]\}$ であるから, これはそれまでの $\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ から Π^1_0-CA によりつくられている．従ってこの hierarchy $\{I_\alpha\}_\alpha$ は local には predicative であると考えられるし, それに関わる cut elimination は subsection 2.2 での RA_α と同様にできる．具体的には推論規則

$$\frac{\Gamma, I_\alpha(n), \mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]}{\Gamma, I_\alpha(n)} \qquad \frac{\Gamma, \neg I_\alpha(n), \neg\mathcal{A}[\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, n]}{\Gamma, \neg I_\alpha(n)}$$

を考えればよい．このように Π^1_1-CA によってつくられた集合 $I^{\mathcal{A}}$ を stages にスライスする, あるいは分岐 (ramifications) させて考えることは極めて自然でありながら, [Pohlers81,BFPS81] 以前にはあまり見られなかったアプローチである．これによって subsection 4.3 で触れる集合論や, より強い公理系の証明論的分析も可能となった．

問題なのはもちろん $I^{\mathcal{A}}(n) :\equiv (\exists\alpha\, I_\alpha(n))$ について $\mathcal{A}(I^{\mathcal{A}}) \subset I^{\mathcal{A}}$ つまり $\forall x\,(\mathcal{A}(\{y \mid \exists\alpha\, I_\alpha(y)\}, x) \to \exists\alpha\, I_\alpha(x))$ に関わる cut elimination である．逆に言うとこの公理以外のところでは ID は当たり前に infinitary derivations へ埋め込まれる．例えば $\mathcal{A}(F) \subset F \to I^{\mathcal{A}} \subset F$ は, 仮定 $\mathcal{A}(F) \subset F$ のもとで α に関する超限帰納法により $I_\alpha \subset F$ を示せばよい．公理 $\mathcal{A}(I^{\mathcal{A}}) \subset I^{\mathcal{A}}$ はしょうがないので推論規則

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A}(\{y \mid \exists\alpha\, I_\alpha(y)\}, n)}{\Gamma, \exists\alpha\, I_\alpha(n)}\ (Cl)$$

で置き換えておく．但しここでの順序数 $\alpha, \beta, \ldots$ は subsection 3.3 での notation system $C(\varepsilon_{\Omega+1}, 0) \cap \Omega$ に属する ordinal terms を走っているとしてよいことが分かる．$\exists\alpha\, I_\alpha(n)$ は unbounded existential quantifier を含むので Σ_1-論理式と呼ぶことにして, 論理式の複雑さは, 順序数上の unbounded quantifier を含まなければ複雑さは 0 として決める．すると $\mathsf{ID} \vdash \Gamma$ ならば, ある $k < \omega$ について $\vdash^{\Omega\cdot k}_{2+k} \Gamma$ となる．これより $\alpha = \omega_k(\Omega \cdot k) < \varepsilon_{\Omega+1}$ について $\vdash^\alpha_2 \Gamma$ を得る．infinitary derivation の depth α が Ω より大きくならざるを得ないのは順序数 $< \Omega$ を走る変数に関する unbounded universal quantifier が現れるからである．

いま Γ が Σ_1-論理式だけから成るときにもしも $\alpha < \Omega$ について $\vdash^\alpha_1 \Gamma$ となっていたら $\Gamma^{(\alpha)} := \{B^{(\alpha)} \mid B \in \Gamma\}$ が正しくなっていてほしい．ここで $(\exists\xi\, I_\xi(n))^{(\alpha)} :\equiv (\exists\xi < \alpha\, I_\xi(n))$ である．そうであれば $\vdash^\alpha_1 \exists\xi\, I_\xi(n)$ から $|n|_{\mathcal{A}} < \alpha$ を得ることになる．そのためには unbounded existential quantifier の導入規則において, infinitary derivation の depth が

$$\frac{\vdash^{\alpha_0}_k \Gamma, I_\eta(n)}{\vdash^\alpha_k \Gamma, \exists\xi\, I_\xi(n)} \tag{9}$$

$\alpha_0 < \alpha$ であるのみならず $\eta < \alpha$ となっていないといけない．つまり $\vdash^\alpha_k \Gamma$ という関係が subsection 2.2 での predicative な RA_α に対する単純なものではなく, 一定の条件がついたものに変える必要がある．さらに一般には $\alpha \geq \Omega$ であることも考えると, ふたつの絡み合っているように見える課題を解かなければならないことになる．それを補題のかたちで述べると

Lemma 4.2 Γ は Σ_1-論理式だけから成るとする．

1. (Boundeness) $\alpha < \Omega$ について $\vdash^\alpha_1 \Gamma$ ならば $\Gamma^{(\alpha)}$ が正しい．
2. (Collapsing) $\vdash^\alpha_2 \Gamma$ から適当な $\alpha' < \Omega$ が見出せて $\vdash^{\alpha'}_1 \Gamma$.

Collapsing 4.2.2 のほうの「適当な α'」のひとつの解は $\alpha' = \vartheta(\alpha)$ である．Collapsing 4.2.2 を示すときに問題となる推論規則は (Cl) だが, それ以外の規則においても一般に $\alpha < \beta$ からは $\vartheta(\alpha) < \vartheta(\beta)$ は言えないので, 示すべき事実が遺伝していかない．そこで単なる大小関係よりも強い関係 (collapsibly less than relation, essentially less than rel.) を導入する．

$$\alpha \ll \beta :\Leftrightarrow \alpha < \beta \,\&\, E(\alpha) < \vartheta(\beta).$$

すると $\alpha \ll \beta \Rightarrow \vartheta(\alpha) < \vartheta(\beta)$ であるから, $\vdash_k^\alpha \Gamma$ の定義において, 仮定の α_0 と結論の α とが $\alpha_0 \ll \alpha$ となっていればよさそうである．しかし順序数変数の unbounded universal quantifier の導入（例えば超限帰納法 $\forall x\,(\forall\zeta < \xi\, C(\zeta) \to C(\xi)) \to \forall\xi\, C(\xi)$ の infinitary derivation）において

$$\frac{\vdash_k^{\alpha(\eta)} \Gamma, B(\eta)\,(\eta < \Omega)}{\vdash_k^\alpha \Gamma, \forall\xi\, B(\xi)} \tag{10}$$

任意の $\eta < \Omega$ について $\alpha(\eta) \ll \alpha$ を要求することはできない．なぜならもしそうなら $\vartheta(\alpha(\eta)) < \vartheta(\alpha)$ となるべきだが, $\eta = \vartheta(\alpha)$ と取れば $\eta \in E(\alpha(\eta))$ である限り無理である．そこで順序数変数の unbounded universal quantifier の導入以外では

$$\frac{\cdots \quad \vdash_k^{\alpha_0} \Gamma'}{\vdash_k^\alpha \Gamma}$$

$\alpha_0 \ll \alpha$ を要求して, しかも (9) では $\alpha_0 \ll \alpha$ のみならず $\eta \ll \alpha$ を要求する．$\alpha < \Omega \Rightarrow \alpha < \vartheta(\alpha)$ より, これで Boundedness 4.2.1 は満たされる．そして (10) では $\alpha(\eta) < \alpha$ でかつ $\alpha(\eta) \ll \alpha\#\eta$ が満たされていることと定義する．ここで $\#$ は natural sum．先ず $\vdash_{2+k}^{\Omega\cdot k} \Gamma \Rightarrow \vdash_2^{\omega_k(\Omega\cdot k)} \Gamma$ は問題ない．なぜならここでの cut elimination に必要な事柄は, $\ll$ が transitive なことと $\alpha \ll \omega^\alpha$, $\alpha \ll \beta$ ならば $\alpha\#\gamma \ll \beta\#\gamma$, $\omega^\alpha \ll \omega^\beta$, そして $\alpha_0, \alpha_1 \ll \beta$ ならば $\omega^{\alpha_0}\#\omega^{\alpha_1} \ll \omega^\beta$ だからである．そこで Collapsing 4.2.2 を $\alpha' = \vartheta(\alpha)$ で考える．本質的な場合は Γ が Σ_1-論理式より成るとして

$$\cfrac{\vdash_2^\beta \Gamma, \forall\xi\,\neg I_\xi(n) \qquad \cfrac{\vdash_2^\delta \mathcal{A}(\{y \mid \exists\zeta\, I_\zeta(y)\}, n), \Gamma}{\vdash_2^\gamma \exists\xi\, I_\xi(n), \Gamma}\;(Cl)}{\vdash_2^\alpha \Gamma}$$

ここで $\delta \ll \gamma$, $\beta\#\gamma \underline{\ll} \alpha$. $\delta_0 < \Omega$ を, $\delta < \Omega$ なら $\delta_0 = \delta$. そうでなければ $\delta_0 = \vartheta(\delta)$ とおく．このとき $I_{\delta_0}(n), \Gamma^{(\delta_0)}$ となる．もし $\delta < \Omega$ なら $\vdash_2^\delta \mathcal{A}(\{y \mid \exists\zeta\, I_\zeta(y)\}, n), \Gamma$ は $\vdash_1^\delta \mathcal{A}(\{y \mid \exists\zeta\, I_\zeta(y)\}, n), \Gamma$ を意味するとしてよい．そうでなければ $\vdash_1^{\vartheta(\delta)} \mathcal{A}(\{y \mid \exists\zeta\, I_\zeta(y)\}, n), \Gamma$. いずれにせよ Boundedness 4.2.1 より $\mathcal{A}(\{y \mid \exists\zeta < \delta_0\, I_\zeta(y)\}, n), \Gamma^{(\delta_0)}$. よって $I_{\delta_0}(n), \Gamma^{(\delta_0)}$. $\vdash_2^\beta \Gamma, \forall\xi\,\neg I_\xi(n)$ から inversion して $\vdash_2^{\beta\#\delta_0} \Gamma, \neg I_{\delta_0}(n)$. $\delta_0 \le \vartheta(\beta\#\delta_0) < \vartheta(\alpha)$ に注意して $\Gamma^{(\vartheta(\alpha))}$. これで Lemma 4.2 が α に関する超限帰納法により示された.

4.3 集合論へ

[Jäger82] は順序数解析の対象を, それまでの SOA から集合論へと転換した．手法としてはなんら新しいことはなかったのだが, この転換により証明の意味が捉え易くなったのみならず, 進むべき道を指し示した意義は大きい.

ここでの分析の対象となったのは, 無限公理付きの Kripke-Platek 集合論 $\mathsf{KP}\omega$ である．その公理は extensionality, pair, union, infinity に加えて foundation scheme $\forall x(\forall y \in x\, A(y) \to A(x)) \to \forall x\, A(x)$, Δ_0-Separation $\forall a \exists b[b = \{x \in a | B(x)\}]$, Δ_0-Collection $\forall x \in a \exists y\, B \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, B$. ここで A は任意の論理式で B は Δ_0-論理式, つまりその中の quantifiers はすべて bounded $\forall z \in c, \exists z \in c$.

Kripke-Platek 集合論は computability (recursion) theory の対象を自然数 $\mathbb{N}$ から一般の構造, とくに集合へ一般化する際に抽出された, cf. [Barwise75]. Gödel の constructible universe $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$ について $L_\alpha \models \mathsf{KP}\omega$ であるときに順序数 α は recursively regular と呼ばれる．最小の recursively regular ordinal は ω_1^{CK}. 極限順序数 α が recursively regular なのは, L_α 上の任意の Σ-関数 f について $\forall\beta < \alpha(\sup_{\gamma<\beta} f(\gamma) < \alpha)$ となるときである．これは公理では Δ_0-Collection に当る.

先ず $\mathsf{KP}\omega$ は ID_1 と証明論的に同等であり, $|\mathsf{KP}\omega| = |\mathsf{ID}_1|$. 例えば subsection 2.3 での ID_1 での positive operator form $\mathcal{A}$ による最小不動点 $I^{\mathcal{A}}$ は $\mathsf{KP}\omega$ では $\{I_\alpha\}_\alpha$ を Σ-recursion で定義して $n \in I^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \exists\alpha(n \in I_\alpha)$ と Σ-論理式で定義される．これから分るように, 自然数の集合が $\mathbb{N}$ 上で Π_1^1-論理式で定義されることと, $L_{\omega_1^{CK}}$ 上で Σ_1-論理式で定義できることは同値である．ということは $\mathsf{KP}\omega$ の証明論的順序数を考えるには, そこで証明できる

Σ_1-論理式の witness を抑えればよい:つまり順序数 $|\mathsf{KP}\omega|_\Sigma = \min\{\alpha \le \omega_1^{CK} \mid \forall A \in \Sigma_1(\mathsf{KP}\omega \vdash A \Rightarrow L_\alpha \models A)\}$ の上界である.

上界を求めるための cut-elimination による議論の粗筋はこうである. constructible universe の定義は subsection 2.2 の analytic hierarchy $\{R_\alpha\}_\alpha$ とそっくりである: $L_0 = \emptyset$, $L_{\alpha+1} = Df(L_\alpha)$ そして極限順序数 λ については $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$. ここで $Df(L_\alpha)$ は構造 $\langle L_\alpha, \in\rangle$ 上で定義可能な集合全体. よって RA_α に対する補題 2.1 は L_α を constants として含む論理式による sequent calculus に適切に修正して成り立つ. あとは Δ_0-Collection もしくは $V = L$ のもとでそれと同等な Π_2-Reflection $\forall x\exists y\, B \to \exists b[tran(b) \land \forall x \in b \exists y \in b\, B]$ (ここで $tran(b) :\Leftrightarrow \forall x \in b \forall y \in x (y \in b)$ は集合 b が推移的ということ) について, Σ-論理式から成る Γ について $\Gamma, \forall x \exists y\, B$ のほぼ cut が無い infinitary derivation を, depth$< \Omega$ へ collapse できることを示せばよい. この collapsing を示す方法は subsection 4.2 での local predicativity とほぼ同じである.

最後になぜ順序数解析の集合論への転換が意味があったのかを説明する. Π^1_1-CA もしくはそれと同等な recursively regular ordinals の順序数解析が一応の完成を見た後, 次にどこを目指すか考えると, SOA では Π^1_1 の次だから Π^1_2 となってしまうが, そう一挙には進めない. ところが集合論であれば, 正則基数の上に巨大基数の階層がある. (weakly) inaccessible cardinals, (weakly) Mahlo cardinals, (weakly) compact cardinals, etc. だからそれらの recursive analogues を考えて, recursively inaccessible ordinals, recursively Mahlo ordinals, Π_3-reflecting ordinals, etc. を universes に持つ集合論を順々に考えて行くという段取りができあがるわけである.

具体的にはこうであった. Π^1_1-CA の後の成果としては, [Jäger-Pohlers82, Jäger83, Buchholz-Schütte83, Buchholz92] を挙げる. これらは SOA ならば Δ^1_1-CA+BI, 集合論なら $\mathsf{KP}i$, constructive mathematics では [Feferman79] での T_0 に対する順序数解析である. T_0 は [Bishop67] での構成的数学を形式化するために考えられたもので, $\mathsf{KP}i$ は, recursively inaccessible ordinal σ について $L_\sigma \models \mathsf{KP}i$ となるような集合論. ordinal が recursively inaccessible というのは, それ自身が recursively regular でしかも recursively regular ordinals の極限になっていることである. なので $\mathsf{KP}i$ は構成的な ZF といった趣である.

この中で特に [Buchholz92] は, 現在でも順序数解析の手法として標準的なものであり続けている最重要な成果である.

ところが 80 年代初頭のこれらの recursively inaccessible ordinals に対する順序数解析の後, 80 年代半ばは recursively inaccessible ordinals の極限である recursively regular ordinals, つまり recursively hyper inaccessible ordinals などの研究に留まっていた. そして 80 年代の終わり頃に [Rathjen91, A2000, A2003] において recursively Mahlo ordinals の順序数解析が得られた. そこでの発想は極めて単純である. そもそも collapsing functions $\alpha \mapsto \vartheta(\alpha)$ や [Buchholz86] での $\alpha \mapsto \psi_\Omega(\alpha)$ がなぜ $\vartheta(\alpha), \psi_\Omega(\alpha) < \Omega$ となるかというと, Ω が (recursively) regular だからである. 他方で, regular ordinal M が weakly Mahlo であるのは, M の下に regular ordinals が stationary にあるということである. だから collasping function $\alpha \mapsto \psi_M(\alpha) < M$ は, $\sigma = \psi_M(\alpha)$ が regular に取れるだろう. よってもう一度, collapse できて $\beta \mapsto \psi_\sigma(\beta) < \sigma$ となる. この二段階の collapsing functions を用いれば recursively Mahlo ordinals の集合論 $\mathsf{KP}M$ の順序数解析ができる.

この後は 90 年代以降の話になるので, まず今日はこれぎり.

References

[Ackermann40] W. Ackermann, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, *Math. Ann.* **117**(1940) 162-194.

[Ackermann51] W. Ackermann, Konstruktiver aufbau eines abschnitts der zweiten cantorschen zahlenklasse, *Math. Zeitschrift* **53**(1951) 403-413.

[Afshari-Rathjen2009] B. Afshari and M. Rathjen, Reverse mathematics and well-ordering principles: A pilot study, *Ann. Pure Appl. Logic* **160**(2009) 231-237.

[A88] 新井敏康, 竹内の基本予想について, 数学 **40**(1988) 322-337.

[A98] T. Arai, Some results on cut-elimination, provable well-orderings, induction and reflection, *Ann. Pure Appl. Logic* **95**(1998) 93-184.

[A99] T. Arai, Introduction to finitary analyses of proof figures, in: *Sets and Proofs*, S. B. Cooper and J. K. Truss (eds) London Math. Lect. Notes 258 (1999), pp. 1-25.

[A2000] T. Arai, Ordinal diagrams for recursively Mahlo universes, *Arch. Math. Logic* **39**(2000) 353-391.

[A2003] T. Arai, Proof theory for theories of ordinals I:recursively Mahlo ordinals, *Ann. Pure Appl. Logic* **122**(2003) 1-85.

[A2005] 新井敏康, 竹内の基本予想とは何か、 何であるべきか：50 年に, 数理解析研究所講究録 **1442**(2005) 1-7.

[A2007] 新井敏康, 無矛盾性証明について, 科学基礎論研究 **34**(2007) 91-99.

[A2018] T. Arai, Proof-theoretic strengths of weak theories for positive inductive definitions. *Jour. Symb. Logic* **83**(2018) 1091-1111.

[A2020a] T. Arai, *Ordinal Analysis with an Introduction to Proof Theory*, Springer, 2020.

[A2020b] T. Arai, Cut-elimination for SBL, in: *The Legacy of Kurt Schütte*, R. Kahle and M. Rathjen (eds), Springer, 2020, pp. 265-298.

[A2022] T. Arai, Proof search in multi-succedent sequent calculi for intuitionistic logics, 数理解析研究所講究録「証明と計算の理論と応用」.

[Barwise75] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, 1975, Springer.

[Bernays70] P. Bernays, On the original Gentzen consistency proof for number theory, in [IPT70], pp. 409-418.

[Beth55] E. W. Beth, Semantic entailment and formal derivability, Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (Amsterdam), Afdeling Letterkunde. Nieuwe Reeks **18**(1955) 309-342.

[Bishop67] E. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, McGraw-Hill, 1967.

[Buchholz77] W. Buchholz, Eine Erweiterung der Schnitteliminationsmethode, Habilitattionsschrift, München.

[Buchholz86] W. Buchholz, A new system of proof-theoretic ordinal functions, *Ann. Pure Appl. Logic* **32**(1986) 195-208.

[Buchholz92] W. Buchholz, A simplified version of local predicativity, in: *Proof Theory*, P. H. G. Aczel, H. Simmons and S. S. Wainer (eds) (Cambridge UP,1992), pp. 115–147.

[Buchholz97] W. Buchholz, Explaining Gentzen's consistency proof within infinitary proof theory, in: G. Golttlob, A. Leitsch and D. Mundici (eds), *Computational logic and proof theory.* 5th Kurt Gödel Colloquium, KGC'97. Lect. Notes Comp. Sci. 1298, 1997, pp. 4-17.

[Buchholz2001] W. Buchholz, Explaining the Gentzen-Takeuti reduction steps: A second-order system, *Arch. Math. Logic* **40**(2001) 255-272.

[Buchholz2015] W. Buchholz, On Gentzen's first consistency proof for arithmetic, in [Centenary2015], pp. 63-87.

[BFPS81] W. Buchholz, S. Feferman, W. Sieg and W. Pohlers, *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies,* Lect. Notes Math. 897, Springer, 1981.

[Buchholz-Pohlers78] W. Buchholz and W. Pohlers, Provable well orderings of formal theories for transfinitely iterated inductive definitions, *Jour. Symb. Logic* **43**(1978) 118-125.

[Buchholz-Schütte83] W. Buchholz and K. Schütte, Ein Ordinalzahlensystem für die Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion. *Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Nat. Kl.* (1983) 99-132.

[Feferman64] S. Feferman, Systems of predicative analysis, *Jour. Symb. Logic* **29**(1964) 1-30.

[Feferman70] S. Feferman, Formal theories for transfinite iteration of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis, in [IPT70], pp. 303-325.

[Feferman77] S. Feferman, Theories of finite type related to mathematical practice, in J. Barwise (ed), *Handbook of Mathematical Logic*, Horth-Holland, 1977, pp. 913-971.

[Feferman79] S. Feferman, Constructive theories of functions and classes. in M. Boffa, D. van Dalen, K. McAloon, (eds.) *Logic Colloquium 78* (North-Holland, Amsterdam, 1979) pp. 159-224.

[Friedman70] H. Friedman, Iterated inductive definitions and Σ^1_2-AC, in [IPT70], pp. 435-442.

[Gentzen34/35] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, *Math. Zeitschr.* **39**(1934/35), I, 176-210: II, 405-431.

[Gentzen36] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.* **112**(1936) 493-565.

[Gentzen38] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Forschungen zur Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge* **4**(1938) 19-44.

[Gentzen43] G. Gentzen, Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.* **119**(1943) 143-161.

[Gentzen69] G. Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Translated and edited by M. E. Szabo, North-Holland, 1969.

[Gentzen74a] G. Gentzen, Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie, *Arch. Math. Logik u. Grundl.* **16** (1974) 97-118.

[Gentzen74b] G. Gentzen, Über das Verhältnis zwischen intuitionistischer und klassischer Logik, *Arch. Math. Logik u. Grundl.* **16**(1974) 119-132.

[Centenary2015] *Gentzen's Centenary. The Quest for Consistency*, R. Kahle and M. Rathjen (eds), Springer, 2015.

[Girard89] J.-Y. Girard, P. Taylor and Y. Lafont, *Proofs and types*, Cambridge UP, 1989.

[Gödel31] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatsh. Math. Phys.* **38**(1931) 173-198.

[Gödel33] K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheori, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **4** (1933) 34-38.

[Gödel58] K. Gödel, Über eine bisher noch benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica 12*(1958) 280-287.

[Gödel95] K. Gödel, Lecture at Zilsel's. in: S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons and R. M. Solovay (eds), *Kurt Gödel: Collected Works III*, Oxford UP, 1995, pp. 87-133.

[Hilbert-Bernays39] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik II*, 1939, Die Grundlehren der math. Wissenschaften 50, Springer.

[Howard72] W. Howard, A system of abstract constructive ordinals, *Jour. Symb. Logic* **37**(1972) 355-374.

[Howard82] W. Howard, The formulae-as-types notion of construction, in: J. P. Seldin, J. R. Hindley (eds), *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, Academic Press (1982), pp. 479-490.

[IPT70] *Intuitionism and proof theory*, Proceedings of the summer conference at Buffalo, N. Y., 1968. A. Kino, J. Myhill, R. E. Vesley (eds), North-Holland, 1970.

[Jäger82] G. Jäger, Zur Beweistheorie der Kripke-Platek Mengenlehre über den natürlichen Zahlen, *Arch. Math. Logik u. Grundl.* **22**(1982) 121-139.

[Jäger83] G. Jäger, A well-ordering proof for Feferman's theory T_0, *Arch. Math. Logic* **23** (1983) 65-77.

[Jäger-Pohlers82] G. Jäger and W. Pohlers, Eine beweistheoretische Untersuchung von $(\Delta^1_2\text{-CA}) + (\text{BI})$ und verwandter Systeme, *Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Nat. Kl.* (1982) 1-28.

[Kohlenbach2008] U. Kohlenbach, *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, Springer, 2008.

[Kolmogorov25] A. N. Kolmogorov, On the principle of the excluded middle (Russian), Matematischekij Sbornik Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Mathematicheskoe Obshchestvo **32** (1925) 646-667.

[Kreisel52] G. Kreisel, On the interpretation of non-finitist proofs II, *Jour. Symb. Logic* **17**(1952) 43-58.

[Kreisel58] G. Kreisel, Mathematical significance of consistency proofs, *Jour. Symb. Logic* **23**(1958) 155-182.

[Kreisel71a] G. Kreisel, A survey of proof theory II, [2ndScand71], 109-170.

[Kreisel71b] G. Kreisel, Review of [Gentzen69], *J. Philosophy* **68**(1971) 238-265.

[前原 73] 前原 昭二, 数理論理学 数学的理論の論理的構造, 培風館.

[Martin-Löf98] Per Martin-Löf, An intuitionistic theory of types, Twenty-five years of constructive type theory, Oxford Logic Guides 36, Oxford UP(1998) pp. 127-172.

[Mints75] G. Mints, Finite investigations of transfinite derivations, *J. Soviet Math.* (1978) 548-596.

[Plato2008] J. von Plato, Gentzen's proof of normalization for natural deduction, *Bull. Symb. Logic* **14**(2008) 240-257.

[Pohlers77] W. Pohlers, Beweistheorie der iterierten induktiven Definitionen, Habilitattionsschrift, München.

[Pohlers78] W. Pohlers, Ordinals connected with formal theories for transfinitely iterated inductive definitions, *Jour. Symb. Logic* **43**(1978) 161-182.

[Pohlers81] W. Pohlers, Cut-elimination for impredicative infinitary systems part I. Ordinal-analysis for ID_1, *Arch. Math. Logik u. Grundl.* **21**(1981) 113-129.

[Prawitz65] D. Prawitz, *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Almqvist and Wiksell, 1965.

[Prawitz68] D. Prawitz, Hauptsatz for higher order logic, *J. Symb. Logic* **33**(1968) 452-457.

[Rathjen91] M. Rathjen, Proof-theoretic analysis of KPM, *Arch. Math. Logic* **30**(1991) 377-403.

[Rathjen2015] M. Rathjen, Goodstein's theorem revisited. in [Centenary2015], pp. 225-242.

[Rathjen-Weiermann93] M. Rathjen and A. Weiermann, Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem, *Ann. Pure Appl. Logic* **60**(1993) 49-88.

[Schütte51] K. Schütte, Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie, *Math. Ann.* **122**(1951) 369-389.

[Schütte56] K. Schütte, Ein System des verknüpfenden Schlißens. *Arch. math. Logik Grundl.* **2**(1956) 34-67.

[Schütte60] K. Schütte, Syntactical and semantical properties of simple type theory, *Jour. Symb. Logic* **25** (1960) 305-326.

[Schütte65] K. Schütte, Predicative well-orderings, in: Formal systems and recursive functions, J. N. Crossley and M. Dummett (eds), North-Holland (1965), pp. 280-303.

[2ndScand71] *Proc. 2nd Scandinavian Logic Symposium*, J. E. Fenstad (ed), North-Holland, 1971.

[Spector62] C. Spector, Provably recursive functions of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, in: J. C. E. Dekker(ed), *Recursive Function Theory* AMS(1962), pp. 1-27.

[Smullyan68] R. M. Smullyan, *First-order logic*, Springer, 1968.

[Stanford Report63] G. Kreisel, et. al., *Seminar on the Foundations of Analysis.* (Mimeographed) Stanford 1963.

[Tait65] W. W. Tait, Infinitely long terms of transfinite type I, in: *Formal systems and recursive functions*, J. N. Crossley and M. Dummett (eds), North-Holland (1965) pp. 176-185.

[Tait66] W. W. Tait, A non-constructive proof of Gentzen's Hauptsatz for second order predicate logic. *Bull. AMS* **72** (1966) 980-983.

[Tait67] W. W. Tait, Intensional interpretations of functionals of finite type, *Jour. Symb. Logic* **32**(1967) 198-212.

[Tait68] W. W. Tait, Normal derivability in classical logic, in: *Syntax and semantics of infinitary languages*, J. Barwise (ed), Lect. Notes Math 72(1968), pp. 204-236.

[Tait2005] W. W. Tait, Gödel's reformulation of Gentzen's first consistency proof for arithmetic: the no-counterexample interpretation, *Bull. Symb. Logic* **11**(2005) 225-238.

[Tait2015] W. W. Tait, Gentzen's original consistency proof and the bar theorem, in [Centenary2015], pp. 213-228.

[Takahashi67] M. Takahashi, A proof of cut-elimination theorem in simple type theory, *J. Math. Soc. Japan* **19**(1967) 399-410.

[Takeuti53] G. Takeuti, On a generalized logic calculus, *Japan. J. Math.* **23**(1953) 39-96.

[Takeuti55] G.Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC I, *J. Math. Soc. Japan* **7**(1955) 249-275.

[Takeuti57] G. Takeuti, Ordinal diagrams, *J. Math. Soc. Japan* **9**(1957) 386-394.

[Takeuti58] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC V, *J. Math. Soc. Japan* **10**(1958) 121-134.

[Takeuti60] G. Takeuti, Ordinal diagrams II, *J. Math. Soc. Japan* **12**(1960), 385-391.

[Takeuti61] G. Takeuti, On the fundamental conjecture of GLC VI, *Proc. Japan Acad.* **37**(1961) 440-443.

[Takeuti63] G. Takeuti, A remark on Gentzen's paper [Gentzen43], *Proc. Japan Acad.* **39**(1963) 263-269.

[Takeuti67] G. Takeuti, Consistency proofs of subsystems of classical analysis, *Ann. Math.* **86**(1967) 299-348.

[Takeuti87] G. Takeuti, *Proof Theory*, second edition, North-Holland, Amsterdam (1987) reprinted from Dover Publications (2013)