

# BCK-代数における井関の” (S)-条件” について

(On Iséki's "condition (S)" of BCK-algebras)

熊澤 昌明 (箕面学園高等学校)

Masaaki Kumazawa

Minoh Gakuen High School

## 1 問題の背景

BCK-代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  において、定義されている二項演算  $*$  を使って 次のように関係  $\leq$  を与える.

$$x * y = 0 \quad \text{であるとき, このときに限り } x \leq y \quad \text{である.}$$

このように与えられた関係  $\leq$  は,  $X$  において順序関係となり, BCK-代数  $X$  自身が半順序集合となることが知られている.

しかし, 東のように任意の2元に対して下限または上限が必ず存在するとは限らない. そこで, どのような条件を満たせば下限, あるいは上限が存在するかについて研究されている.

まず, 下限の存在についてである. 1975年, 田中昭太郎先生は命題論理学についての知見より, 正しい推論にとって自然な性質を反映させるようにと, 任意の2元  $x, y$  に対して, 次の条件: 可換性

$$x \wedge y = y \wedge x \quad \text{ただし } x \wedge y = y * (y * x) \quad \text{とする}$$

が成り立つことを仮定した  $\wedge$ -commutative algebra を定義した. この新たな代数は, BCK-代数に対してこの可換性のみを付与したものとなっていることがわかったので (S.Tanaka [14]), 現在では可換 BCK-代数と呼ばれている. この代数に関して次の結果が知られている.

**定理 1.1 (S. Tanaka [13])** 可換 BCK-代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  は, 二項演算  $\wedge$  に関して下半束  $X = \langle X; \wedge, 0 \rangle$  となる. 即ち,  $X$  の任意の2元  $x, y$  に対して, 積  $x \wedge y$  は  $x, y$  の下限となっている.

この定理を受けて私は, BCK-代数の中の「2元が可換であること」と「2元に対する下限が存在すること」の間の関係を調べるために下限の存在を拡張した” (I) $_{x,y}$ -条件” を定義して, 次の結果を得た.

**定理 1.2 (熊澤 [10], M. Kumazawa [11])** (I)-条件を持つ BCK-代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  は, 演算  $*$  から定義された二項演算  $\times$  に関して下半束  $X = \langle X; \times, 0 \rangle$  となる. 即ち,  $X$  の任意の2元  $x, y$  に対して積  $x \times y$  が下限となっている.

また, すべての可換 BCK-代数は (I)-条件を持つ BCK-代数となっている. 即ち, 可換 BCK-代数においては, 常に  $x \wedge y = x \times y$  が成り立っている.

この (I)-条件を持つ BCK-代数が, BCK-代数全体において, 現在知られている中でも最大の下半束となっているクラスである.

次に、上限の存在についてである。1974年、井関清志先生は本格的に BCK-代数の研究を再開した論文 [4] において、BCK-代数の特別なクラスとして、最大元 1 (unit) の存在を仮定した有界 BCK-代数を定義した。これはちょうど集合論において補集合の存在を保証することと同じような仮定である。このクラスでは  $1 * x$  を  $Nx$  と記すことにしている。この条件に関連して田中先生は次の結果を得た。

**定理 1.3 (S. Tanaka [13])** 任意の有界かつ可換な BCK-代数  $X = \langle X; *, 0, 1 \rangle$  は、演算  $*$  より導かれる二項演算  $\wedge, \vee$  によって束  $X = \langle X; \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  となる。即ち、 $X$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して、 $x \wedge y$  は下限でありかつ  $x \vee y$  は上限となる。ただし、 $x \wedge y = y * (y * x)$  とし、 $x \vee y = N(Nx \wedge Ny)$  とする。

この有界可換 BCK-代数  $X = \langle X; \wedge, \vee, N, 0, 1 \rangle$  は、後に 2 つの演算  $\wedge, \vee$  に関して分配法則を満たすことが示され (T. Traczyk [15])、3 つの演算  $\wedge, \vee, N$  に関してド・モルガン代数となることが知られている (K. Iséki, S. Tanaka [6])。

しかし、この代数の上限の存在は直接得られたものではなく、下限の存在より間接的に得られたものである。従って、他の直接的に上限を得ることができる条件を知りたい。そこで更なる考察が必要となる。

さて、BCK-代数  $X$  に定義された演算  $*$  には以下のような基本的な性質がある。

任意の 2 元  $x, y$  に関して  $x * y \leq x$  が成り立つ。

すなわち、任意の元  $x$  は演算  $*$  を行うことによりもとの元より小さくなってしまふ。しかし、上限とは少なくとも  $x$  の上界でなければならない。このために井関先生が工夫して考案した概念が ”(S)-条件” をもつ BCK-代数である。

## 2 (S)-条件をもつ BCK-代数

最初に、上半束の定義を確認する。

**定義 2.1 (上半束 : G. Birkhoff [1])** 二項演算  $\cup$  を持つ代数  $L = \langle L; \cup \rangle$  が上半束であるとは、 $L$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して、次の 3 つの条件 **UL 1.**, **UL 2.**, **UL 3.** を満たす代数である。

- UL 1.**  $x \cup x = x,$
- UL 2.**  $x \cup y = y \cup x,$
- UL 3.**  $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z.$

この上半束においては、順序関係  $\leq$  は二項演算  $\cup$  を使って、次のように定義される。

$x \cup y = y$  であるとき、そのときに限り  $x \leq y$  とする。

次に、改めて BCK-代数の定義を与える。

**定義 2.2 (BCK-代数 : K. Iséki [3])** 二項演算  $*$  と定数 0 を持つ  $\langle 2, 0 \rangle$  型の代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  が BCK-代数であるとは、 $X$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して、次の 5 つの条件 **BCK.1**~**BCK.5** を満たす代数である。

- BCK 1.**  $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0,$
- BCK 2.**  $(x * (x * y)) * y = 0,$
- BCK 3.**  $x * x = 0,$

**BCK 4.**  $0 * x = 0,$

**BCK 5.**  $x * y = 0$  かつ  $y * x = 0$  ならば  $x = y$  である.

このとき、次のように BCK-代数に 演算  $*$  を使って関係  $\leq$  を入れる.

$x * y = 0$  であるとき、そのときに限り  $x \leq y$  とする.

この関係  $\leq$  は、前に述べたように BCK-代数において順序関係となることが知られている.

ここで、井関先生によって導入された BCK-代数の特別なクラスである (S)-条件をもつ BCK-代数の定義を与える.

**定義 2.3 ((S)-条件をもつ BCK-代数: K. Iséki [7])** BCK-代数  $X$  において、 $X$  の 2 元  $x, y$  に対して、次の集合

$$S(x, y) = \{z \in X \mid z * x \leq y\}$$

を考える. 更に  $X$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して、これらの集合が常に 次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすとする.

(1)  $S(x, y) \neq \phi,$  (2)  $S(x, y)$  において、 $\leq$  に関する最大限  $z$  が存在する.

このとき、この BCK-代数  $X$  を (S)-条件をもつという. また  $x, y$  に対して  $S(x, y)$  の最大限  $z$  は一意的に決まるので二項演算  $\circ$  が定義できる. 即ち  $z = x \circ y$  と表すことにする.

この (S)-条件をもつ BCK-代数は、次の性質を持つ.

**定理 2.1 ( K. Iséki [7])** BCK-代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  が (S)-条件をもつならば、 $X = \langle X; \circ, 0 \rangle$  は演算  $\circ$  に関して可換半群となる.

(証明) まず、演算  $\circ$  は  $x \circ y = z \in S(x, y) \subset X$  なので (S)-条件をもつ BCK-代数  $X$  は閉じている. 次に、演算  $\circ$  が可換性を持つことを示す. 演算  $\circ$  の定義より、 $X$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して  $(x \circ y) * x \leq y$  である. 更に BCK-代数における基本性質から、この不等式より  $(x \circ y) * y \leq x$  が導かれるので  $x \circ y \leq y \circ x$  となる. 同様にして  $y \circ x \leq x \circ y$  も導かれるので可換性は示された. 次に、演算  $\circ$  が結合性を持つことを示す. 再び、演算  $\circ$  の定義より  $((x \circ y) \circ z) * z \leq x \circ y$  であり、この式より  $((x \circ y) \circ z) * y \leq (x \circ y) * y \leq x$  である. 更に  $((x \circ y) \circ z) * y \leq x$  より  $((x \circ y) \circ z) * y \leq x \circ z$  であり、ゆえに  $(x \circ y) \circ z \leq (x \circ z) \circ y$  となる. ここで  $y$  と  $z$  は置き換えても成り立つので  $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$  である. この等式と演算  $\circ$  の可換性より  $(x \circ y) \circ z = (y \circ x) \circ z = (y \circ z) \circ x = x \circ (y \circ z)$  となり結合性が示された. これで、この代数が演算  $\circ$  に関して可換半群となることが示された.

ここで一つ注意を与えておく. (S)-条件をもつ BCK-代数は演算  $*$  による順序関係は満たしており、当然であるが次は成り立つ.

$x * y = 0$  であるとき、そのときに限り  $x \leq y$  とする.

しかし、順序関係  $\leq$  は次の関係に関して成り立つとは限らない.

$x \circ y = y$  であるとき、そのときに限り  $x \leq y$  とする.

従って、(S)-条件をもつ BCK-代数は上半束であるとは限らない.

(S)-条件をもつ BCK-代数において, 次のように演算  $\circ$  は  $\leq$  に関して大小関係を保つ.

**定理 2.2 (K. Iséki [7])** (S)-条件をもつ BCK-代数  $X$  において,  $X$  の 2 元  $x, y$  が  $x \leq y$  であれば  $X$  の任意の元  $z$  に関して次の大小関係

$$x \circ z \leq y \circ z$$

が成り立つ.

(証明)  $X$  は BCK-代数であり 更に (S)-条件をもつので, 仮定  $x \leq y$  と BCK-代数における基本的な性質より  $(x \circ z) * y \leq (x \circ z) * x$  が成り立つ. 一方, 演算  $\circ$  の定義より  $(x \circ z) * x \leq z$  であり, よって  $(x \circ z) * y \leq z$  である. この不等式と再び演算  $\circ$  の定義から  $x \circ z \leq y \circ z$  が示される.

更に, この定理 2.2 から次が成り立つことを注意しておく. (S)-条件をもつ BCK-代数  $X$  において,  $a, b, c, d \in X$  のとき

$$a \leq b, c \leq d \text{ ならば } a \circ c \leq b \circ d \text{ である.}$$

この (S)-条件をもつ BCK-代数について, 次の等式による特徴づけが知られている. 井関先生の報告 [9] によると, この結果は BCK-代数の多くの特別なクラスが variety であることを示した湯谷洋先生によって得られたようである.

**定理 2.3 (湯谷)** BCK-代数  $X = \langle X; *, 0 \rangle$  において, 次の条件がこの代数  $X$  が (S)-条件をもつための必要十分条件になっている.

条件:  $X$  上に新たに二項演算  $\cdot$  が定義されて任意の 3 元  $x, y, z$  に関して, 次の等式

$$(x * y) * z = x * (y \cdot z)$$

を満たす.

(証明) はじめに, この条件が必要条件であることを示す.

まず, BCK-代数  $X$  において任意の 3 元  $x, y, z$  に対して, 次の等式  $(x * y) * z = (x * z) * y$  と不等式  $(x * y) * (z * y) \leq x * z$  が常に成り立っているが, 以下の証明においてこの性質を繰り返し用いる. まず  $X$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して

$$(x * ((x * y) * z)) * z = (x * z) * ((x * y) * z) \leq x * (x * y) \leq y$$

が成り立つ. ここで今  $X$  は (S)-条件をもつ BCK-代数であるので, この不等式より次の式

$$x * ((x * y) * z) \leq y \circ z.$$

が成り立ち, 更にこの不等式より

$$x * (y \circ z) \leq (x * y) * z \tag{2.1}$$

が得られる. 一方, 演算  $*$ ,  $\circ$  の定義より

$$(x * y) * (x * (y \circ z)) \leq (y \circ z) * y \leq z$$

が成り立つ. この不等式より

$$(x * y) * z \leq x * (y \circ z). \quad (2.2)$$

が得られ, (2.1), (2.2) より必要条件は示された.

次に, 十分条件を示す.

$X = \langle X; *, 0 \rangle$  を BCK-代数とする. 更に  $X$  上に二項演算  $\cdot$  が定義されていて, 任意の  $x, y, z \in X$  に対して

$$(x * y) * z = x * (y \cdot z) \quad (2.3)$$

を満たすと仮定する. 等式 (2.3) より  $(x * x) * y = x * (x \cdot y)$  となり, よって  $x \leq x \cdot y$  が成り立つ.

同様にして  $y \leq x \cdot y$  も成り立つ. 従って,  $x \cdot y$  は  $x$  と  $y$  の共通の上界となっている.

また, 等式 (2.3) において,  $x$  を  $x \cdot y$ ,  $y$  を  $x$ ,  $z$  を  $y$  にそれぞれ置き換えることにより  $(x \cdot y) * x \leq y$  が導かれる. ここで  $z \in X$  を  $z * x \leq y$  を満たす任意の元であると仮定する. 再び, 等式 (2.3) において  $x$  を  $z$ ,  $y$  を  $x$ ,  $z$  を  $y$  とすると  $z \leq x \cdot y$  が成り立つ.

従って  $x \cdot y$  は任意の  $x, y$  に対して, 不等式  $z * x \leq y$  を満たす  $z$  の最大元であることがわかる.

ゆえに  $X$  は演算  $\cdot$  に関して (S)-条件をもつ BCK-代数となる.

これで, 必要条件, 十分条件ともに示されたので定理 2.3 は証明された.

次に, (S)-条件をもつ BCK-代数に関して最も重要な結果である定理 2.8 を述べるために, 準備として新たにいくつかの定義と定理 2.8 の証明に必要な BCK-代数のイデアルに関する性質をあげておく.

**定義 2.4 (K. Iséki, S. Tanaka [6])** BCK-代数  $X$  において,  $X$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して, 次の等式

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$$

が常に成り立つとき, BCK-代数  $X$  は positive implicative であるという.

条件 positive implicative を利用しやすくするために, 次の定理を用意する.

**定理 2.4 (K. Iséki, S. Tanaka [6])** BCK-代数  $X$  において,  $X$  が positive implicative であることは, 次の条件と置き換えても同値である.

条件:  $X$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して

$$(x * y) * y = x * y$$

が常に成り立つ.

**証明**  $X$  が positive implicative であると仮定すると, 任意の 3 元  $x, y, z$  に対して不等式  $(x * z) * (y * z) \leq (x * y) * z$  が成り立つが, ここで  $y$  を  $z$  で置き換えると  $x * z \leq (x * z) * z$  が成り立つ. 他方  $(x * z) * z \leq x * z$  は自明であるので, 等式  $(x * y) * y = x * y$  は示された. 逆に等式  $(x * y) * y = x * y$  を仮定して positive implicative であることを示す. まず BCK.1 より任意の元  $u \in X$  に対して  $((x * y) * (x * z)) * u \leq (z * y) * u$  が成り立つが, この不等式において  $x$  を  $x * z$ ,  $y$  を  $y * z$ ,  $z$  を  $(x * z) * z$ ,  $u$  を  $(x * y) * z$  にそれぞれ置き換えると

$$\begin{aligned}
((x * z) * (y * z)) * ((x * z) * ((x * z) * z)) * ((x * y) * z) &\leq (((x * z) * z) * (y * z)) * ((x * y) * z) \\
&\leq ((x * z) * (y * z)) * ((x * y) * z) \\
&= ((x * (y * z)) * z) * ((x * y) * z) \\
&\leq ((x * y) * z) * ((x * y) * z) = 0
\end{aligned}$$

ここで、仮定  $(x * z) * z = x * z$  をこの不等式の左辺に適用すると、右辺は 0 なので

$$((x * z) * (y * z)) * ((x * y) * z) = 0$$

が示される。他方、逆の不等号  $(x * y) * z \leq (x * z) * (y * z)$  は BCK-代数の基本性質より明らかである。

従って  $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$  が成り立つ。これで必要十分条件であることが示された。

今井泰行先生と井関先生は論文 [2] において、命題論理において含意と選言のみから組み立てられた論理の代数化を意図して Griss 代数  $X = \langle X; \vee, *, 0 \rangle$  を定義した。これを受けて N. Prabhakara Rao は論文 [12] において、Griss 代数の条件式の中の不等式  $x * y \leq (x * z) \vee (z * y)$  を等式  $(x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z)$  に置き換えた代数 (Griss-Rao 代数) を新たに定義して重要な性質を導いた。この重要な働きをする等式を次のように呼ぶことにする。

**定義 2.5**  $\langle 2, 2, 0 \rangle$  型の代数  $X = \langle X; \vee, *, 0 \rangle$  において、 $X$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して次の等式

$$(x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z)$$

を常に満たすとき、 $X$  は Rao の等式を満たすという。

**BCK-代数のイデアル** (K. Iséki, S. Tanaka [5], K. Iséki [7])

**定義 2.6** BCK-代数  $X$  の空でない部分集合  $A$  が、次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすとき、 $A$  を  $X$  における (井関の) イデアルという。

$$(1) \quad 0 \in A, \quad (2) \quad x \in A, y * x \in A \quad \text{ならば} \quad y \in A \quad \text{である.}$$

**定義 2.7** BCK-代数  $X$  の空でない部分集合  $A$  が、次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすとき、 $A$  を  $X$  における implicative イデアルという。

$$(1) \quad 0 \in A, \quad (2) \quad (x * y) * z \in A, y * z \in A \quad \text{ならば} \quad x * z \in A \quad \text{である.}$$

**定義 2.8** BCK-代数  $X$  と  $a \in X$  において、次の部分集合  $A(a) = \{x \in X | x \leq a\}$  を区間 (section) という。

**定理 2.5** BCK-代数  $X$  において、任意の区間  $A(a)$  がイデアルであるための必要十分条件は、自明なイデアル  $\{0\}$  が implicative イデアルであることである。

**証明** まず  $\{0\}$  が implicative イデアルであると仮定し、 $y * x \in A(a), x \in A(a)$  とすると  $(y * x) * a = 0 \in \{0\}$  かつ  $x * a = 0 \in \{0\}$  より、今  $\{0\}$  が implicative イデアル なので  $y * a = 0 \in \{0\}$  である。更に  $y \leq a$  より  $y \in A(a)$  となり、 $A(a)$  はイデアルとなる。逆に任意の区間  $A(a)$  がイデアルであると仮定すると、 $z \in X$  の時、区間  $A(z)$  もイデアルである。更に  $(y * x) * z \in \{0\}$  かつ  $x * z \in \{0\}$  と仮定すると、これより  $y * x \leq z$  かつ  $x \leq z$  となるので  $y * x \in A(z)$  かつ  $x \in A(z)$  である。ここで、 $A(z)$  イデアルなので  $y \in A(z)$  である。よって  $y * z = 0 \in \{0\}$  であるから、 $\{0\}$  は implicative イデアルとなる。これで定理 2.5 は証明された。

**定理 2.6** BCK-代数  $X$  において, その代数  $X$  が positive implicative であるための必要十分条件は,  $X$  の任意のイデアルが implicative イデアルとなることである.

**証明** まず  $X$  が positive implicative であると仮定し,  $A$  を  $X$  の任意のイデアルとする. ここで  $(x*y)*z \in A$  かつ  $y*z \in A$  とすると, 今  $X$  は positive implicative であるので  $((x*z)*(y*z))*((x*y)*z) = 0 \in A$  で, 更に  $(x*y)*z \in A$  なので  $(x*z)*(y*z) \in A$  であり, かつ  $y*z \in A$  なので, よって  $x*z \in A$  となる. 従って  $A$  は  $X$  の implicative イデアルであることがわかる. 逆に  $X$  の任意のイデアルが implicative イデアルであると仮定する. このとき等式  $(x*y)*y = x*y$  が成り立つことを示す. まず  $(x*y)*y \leq x*y$  が成り立つことは明らかである. 一方, 仮定より自明なイデアル  $\{0\}$  も implicative イデアルであるので定理 2.5 によって任意の区間  $A(a)$  はイデアルとなる. 今, 区間  $I = A((x*y)*y)$  とすると,  $I$  も implicative イデアルであるので  $(x*y)*y \in I$  かつ  $y*y = 0 \in I$  より  $x*y \in I$  である. このことより  $x*y \leq (x*y)*y$  が成り立つので逆も示された. 従って定理 2.6 は証明された.

**定義 2.9** (S)-条件をもつ BCK-代数  $X$  の空でない部分集合  $A$  が, 次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすとき,  $A$  を  $X$  における加法的イデアル (additive ideal) という.

- (1)  $x \in A, y \leq x$  ならば  $y \in A$  である, (2)  $x \in A, y \in A$  ならば  $x \circ y \in A$  である.

**定理 2.7** (S)-条件をもつ BCK-代数において, 任意のイデアルは加法的イデアルとなる.

**証明** まず  $X$  を (S)-条件をもつ BCK-代数とし,  $A$  を  $X$  の任意のイデアルと仮定する. 証明すべき条件 (1) は  $0 \in A$  であることより明らかである. 条件 (2) を示す. ここで  $x, y \in A$  とすると, 演算  $\circ$  の定義より  $(x \circ y)*x \leq y$  であり, よって  $((x \circ y)*x)*y = 0 \in A$  で, かつ  $y \in A$  なので  $(x \circ y)*x \in A$  である. 更に  $x \in A$  なので  $x \circ y \in A$  である. 従って定理 2.7 は証明された.

これらの準備のもとで, 定理 2.8 を述べる. この定理は (S)-条件をもつ BCK-代数が上半束となる特徴づけを与えている.

**定理 2.8** (K. Iséki [7], [8]) (S)-条件をもつ BCK-代数において, 次の 4 つの条件は同値である.

- (1)  $X$  が positive implicative である,  
 (2)  $X$  の任意の元  $x$  に対して  $x \circ x = x$  である,  
 (3)  $X$  の 2 元が  $x \leq y$  ならば  $x \circ y = y$  である,  
 (4)  $X$  の任意の 3 元  $x, y, z$  に対して Rao の等式:  $(x \circ y)*z = (x*z) \circ (y*z)$  が成り立つ.

**(証明)** 第一に, (1) と (2) が同値であることを示す. まず (1) を仮定して (2) を導く. 演算  $\circ$  の定義より  $x \leq x \circ x$  は明らかである. 一方, (S)-条件をもつ BCK-代数  $X$  が positive implicative であると仮定しているので, 定理 2.5 と定理 2.6 より  $X$  の任意の区間  $A(x)$  はイデアルであり  $x \in A(x)$  で, 更に  $X$  は (S)-条件をもつので定理 2.7 より  $A(x)$  は加法的イデアルとなるので  $x \circ x \in A(x)$  である. よって  $x \circ x \leq x$  となる. 従って (2) が示された. 逆に (2) を仮定して (1) を導く. 任意の  $x \in X$  に対して  $x \circ x = x$  であると仮定し, まず任意の区間  $A(a)$  がイデアルであることを示す.  $x*y, y \in A(a)$  とすると  $x*y \leq a$  かつ  $y \leq a$  であり, これより  $x*a \leq y \leq a$  である. よって,  $\circ$  の定義と (2) より  $x \leq a \circ a = a$  であり,  $x \in A(a)$  となるので  $A(a)$  はイデアルである. 次に  $A(a)$  は更に implicative イデアルとなることを示す.  $(x*y)*z, y*z \in A(a)$  とすると  $(x*y)*z \leq a$  かつ  $y*z \leq a$  であり, ここで  $X$  は (S)-条件をもつので  $x*y \leq z \circ a$  かつ  $y \leq z \circ a$

である. このとき, 上で見たように区間  $A(z \circ a)$  はイデアルであり, かつ  $x * y, y \in A(z \circ a)$  より  $x \in A(z \circ a)$  が分かる. よって  $x \leq z \circ a$  であり, このとき  $x * z \leq a$  を満たす. 従って  $x * z \in A(a)$  となる. 区間  $A(a)$  が implicative イデアルとなるので, 定理 2.6 より 代数  $X$  自身は positive implicative となる.

第二に, (2) と (3) が同値であることを示す. まず (2) を仮定すると  $x \leq y$  ならば 定理 2.2 より  $x \circ y \leq y \circ y = y$  で, 一方  $y * x \leq y$  より演算  $\circ$  の定義から  $y \leq x \circ y$  である. 従って,  $x \circ y = y$  となる. 逆に, (3) を仮定すると  $x \leq x$  より  $x \circ x = x$  であり (2) が示された. この結果から分かることは, (S)-条件をもつ BCK-代数においては冪等性 (idempotent) と一貫性 (cosistency) が同値であるということである.

第三に, (1) より (4) を導く. 演算  $\circ$  の定義より  $(x \circ y) * x \leq y$  となり, 更に  $X$  が positive implicative であることと BCK-代数の基本的性質より  $((x \circ y) * z) * (x * z) \leq ((x \circ y) * x) * z \leq y * z$  がいえ, この不等式と演算  $\circ$  の定義より

$$(x \circ y) * z \leq (x * z) \circ (y * z) \quad (2.4)$$

一方,  $x \leq x \circ y, y \leq x \circ y$  と BCK-代数の基本的性質より  $x * z \leq (x \circ y) * z, y * z \leq (x \circ y) * z$  であり, 定理 2.2 と (1) の仮定のもと (2) が成り立つことより

$$(x * z) \circ (y * z) \leq ((x \circ y) * z) \circ ((x \circ y) * z) = (x \circ y) * z \quad (2.5)$$

(2.4), (2.5) より Rao の等式が示された.

第四に, (4) より (2) を導く. Rao の等式において,  $x = y = z$  とすると  $(x \circ x) * x = (x * x) \circ (x * x) = 0 \circ 0 = 0$  となり  $x \circ x \leq x$  である. 一方,  $x \leq x \circ x$  は明らかであるので, (2) は示された.

これで, 4つの条件が同値であることが示されたので定理 2.8 は証明された.

もう証明の必要はないと考えるが, 定理 2.1 と 定理 2.8 によって BCK-代数の中での上半束の存在を特徴づけられる次の定理 2.9 が得られる.

**定理 2.9 (K. Iséki [7])** (S)-条件をもつ BCK-代数が, 演算  $\circ$  に関して上半束となる必要十分条件は  $X$  が positive implicative を満たすことである.

### 3 問題：(S)-条件をもつ BCK-代数の特別なクラスの性質について

ここでは, 新たに (S)-条件をもつ BCK-代数の特別なクラスを定義して, より直接的に BCK-代数において上半束となるクラスを特徴づけることを試みたい. BCK-代数  $X$  において, その 2 元  $x, y$  の下限の存在を拡張した概念として (I) $_{x,y}$ -条件を定義し, それによって下半束の特徴づけを行った. ここで新たに定義する (Sp) $_{x,y}$ -条件はこの概念のアナロジーである.

**定義 3.1 ((Sp) $_{x,y}$ -条件)** BCK-代数  $X$  の 2 元  $x, y$  に対して,  $X$  の元  $z$  が存在し, 以下の (I)~(III) の条件を満たすとき,  $z$  は (Sp) $_{x,y}$ -条件を満たすという.

- (I)  $x \leq z, y \leq z,$
- (II)  $z * x \leq y * x,$
- (III)  $z * y \leq x * y.$



**定義 3.2 ((Sp)-条件)** 次の集合

$$\text{Sp}(x, y) = \{z \in X \mid X \text{ の } 2 \text{ 元 } x, y \text{ に対して } z \text{ が (Sp)}_{x,y}\text{-条件を満たす}\}$$

を考える.  $X$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して, これらの集合が次の 2 つの条件 (1), (2) を満たすものとする.

$$(1) \quad \text{Sp}(x, y) \neq \phi, \quad (2) \quad \text{Sp}(x, y) \text{ において, } \leq \text{ に関する最小元 } z \text{ が存在する.}$$

この条件を満たす BCK-代数  $X$  を (Sp)-条件をもつといい, このとき 2 元  $x, y$  に対して  $\text{Sp}(x, y)$  の最小元  $z$  を  $x + y$  で表すことにする.

(Sp) $_{x,y}$ -条件の定義から分かるが, 演算  $\circ$  と演算  $+$  の間には  $x + y \leq x \circ y$  の関係が成り立つ. ここで, 一つの例をあげてこの関係を見てみる.

**例 3.1 (K. Iséki, S. Tanaka [5])** 集合  $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  において,  $Z_0$  の任意の 2 元  $m, n$  に対して次のように演算  $*$  を定義する.

$$m * n = \begin{cases} 0 & (m \leq n \text{ のとき}), \\ m - n & (m > n \text{ のとき}). \end{cases} \quad (3.1)$$

このとき, 代数  $Z_0 = \langle Z_0; \circ, 0 \rangle$  は (S)-条件をもつ BCK-代数であり, また  $Z_0 = \langle Z_0; +, 0 \rangle$  は (Sp)-条件をもつ BCK-代数となっている

この例において,  $m \circ n$  と  $m + n$  の値を調べてみる.

**事実 A.**  $m \circ n$  の値について

今,  $m \geq n$  としても一般性は失われない. このとき 2 元  $m, n$  に対して  $Z_0$  の任意の元  $z$  は  $m, n$  との大小関係によって次の 3 つの場合に分けられる.

- 1)  $0 \leq z \leq m$  のとき  $z * m = 0 \leq n$  となり,  $m, n$  に対して  $z$  は (S)-条件を満たす.
- 2)  $m < z \leq m + n$  のとき  $z * m = z - m \leq n$  となり,  $m, n$  に対して  $z$  は (S)-条件を満たす.
- 3)  $z > m + n$  のとき  $z * m = z - m > n$  となり,  $m, n$  に対して  $z$  は (S)-条件を満たさない.

これより,  $S(m, n) = \{0, 1, 2, \dots, m + n\}$  である. 従って,  $m \circ n$  は  $S(m, n)$  の最大値であるので  $m \circ n = m + n$  となる.

**事実 B**  $m + n$  の値について

ここでも,  $m \geq n$  とする. まず条件 (I) より  $m + n$  となる  $z$  は  $m, n$  の共通の上界でなければならないので,  $z \geq m$  である. 次に条件 (II) より  $z * m = n * m = 0$  より  $z \leq m$  となり, 更に条件 (III) より  $z * n = m * n$  から  $z - n = m - n$  となり  $z = m$  がわかる.

従って,  $\text{Sp}(m, n) = \{m\}$  より  $m + n = m$  となる.

例 3.1 に関して, 事実 A より分かることは, 演算  $\circ$  は非負整数全体からなる集合  $Z_0$  の任意 2 元  $m, n$  に対して加算と同じ働きをしていることであり, 事実 B より分かることは, 演算  $+$  は数の大小関係からなる全順序集合である束  $Z_0$  の 2 元  $m, n$  に対して束演算の和  $\cup$  と同じ働きをしていることである. この例からは, 上半束の演算としては  $\circ$  より  $+$  の方が適していると考えられる.

しかし、残念なことに「 $x, y$  に対して上限  $z$  が存在するとき  $z$  が  $(Sp)_{x,y}$ -条件を満たす。」ということもまだ示せていない。だが、次の問題を今後の課題として取り組んでいきたいと思っている。

**問題**  $(Sp)_{x,y}$ -条件を使って、BCK-代数における上半束の存在を (S)-条件よりも直接的に特徴づけられないか？

### Acknowledgments

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Resarch Center located in Kyoto University.

### 参考文献

- [1] G. Birkhoff, Lattice Theory (Third Edition), Colloquium Publication, **25**, American Mathematical Society, (1993).
- [2] Y. Imai, K. Iséki, On Griss Algebras. I, *Proc. Japan Acad.*, **42**, No. 3 (1966), 213-216.
- [3] K. Iséki, An Algebra Related with a Propositional Calculus, *Proc. Japan Acad.*, **42**, No.1(1966), 26-29.
- [4] K. Iséki, Some Properties of BCK-algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **2**(1974), 193-201.
- [5] K. Iséki and S. Tanaka, Ideal Theory of BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **21** (1976), 351-366.
- [6] K. Iséki and S. Tanaka, Introduction to the Theory of BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **23**, No.1 (1978), 1-26.
- [7] K. Iséki, BCK-Algebra with Condition (S), *Math. Japonicae*, **24**, No.1(1979), 107-119.
- [8] K. Iséki, On BCK-Algebra with Condition (S), *Math. Japonicae*, **24**, No.6(1980), 625-626.
- [9] 井関清志, BCK-代数, 数理解析研究所講究録=RIMS Kokyuroku, **395**, (1980), 95-111.
- [10] 熊澤昌明, BCK-代数における  $(I)_{x,y}$ -条件の性質をめぐって, 数理解析研究所講究録=RIMS Koukyuroku, **2130**, (2019), 57-63.
- [11] M. Kumazawa, A New Class in BCK-Algebras, *Scientiae Math. Japonicae*, **84**, No.1 (2021), 61-75.
- [12] N. Prabhakara Rao, Autometrized Griss Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **5**(1977), 1-21.
- [13] S. Tanaka, A New Class of Algebra, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 37-43.
- [14] S. Tanaka, On  $\wedge$ -Commutative Algebras, *Mathematics Seminar Notes Kobe University*, **3** (1975), 59-64.
- [15] T. Traczyk, On the Variety of Bounded Commutative BCK-Algebras, *Math. Japonicae*, **24**, (1979), 283-292.

(新型コロナウイルスのパンデミックも3年目となった。オミクロン株による第6波の感染者は幾分減ってきたが、同じオミクロン株の亜種である BA.2 による置き換わりが進み第7波の心配もされている。2022.4.22)