数独の3次元空間への拡張

静岡理工科大学情報学部 足立智子
Tomoko Adachi
Shizuoka Inst. of Sci. and Tech.

概要 数独は, 平面上の大きさ 9×9 の方陣に, $1, 2, \cdots, 9$ の数字を決められたルールにしたがって配置していく論理パズルである. 本稿では, 数独を, 立方体の側面に貼り付ける形式で, 3 次元空間に拡張する方法を述べる.

1. はじめに

n を正の整数とする. 位数 n のラテン方陣 (Latin square) とは, 大きさ $n \times n$ の正方格子 (方陣) に n 種類の文字（シンボル）を入れ, どの縦の列, 横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 個ずつ出現するように配置したものである. ラテン方陣については様々な研究がなされており, 文献 [5, 6] に詳しい.

位数 n^2 の数独解 (Sudoku solution) とは, 大きさ $n^2 \times n^2$ の方陣に $1, 2, \cdots, n^2$ の数字 (シンボル) を入れ, どの縦の列, 横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現し (すなわち, 位数 n^2 のラテン方陣であり), 大きさ $n \times n$ の n^2 個の小方陣 (ブロック）に全てのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現するように配置したものである. $n = 3$ の場合は, 通常の数独パズルの解 (完成形) である. 位数 n^2 の数独解において, 同じ行にある n 個のブロックの集合を band と呼び, 同じ列にある n 個のブロックの集合を stack と呼ぶ. 数独解についても多くの研究がなされており, 文献 [4, 8, 9] 等がある.

数独解は次の特徴を持つ. 数独解の数字 (シンボル) を置換した方陣もまた数独解となる. このとき, この 2 つの数独解は本質的に同じであり,「同値である」という. band (または stack) を入れ替えた方陣もまた数独解となり, もとの数独解と同値であるといえる. 同じ band にある 2 つの行 (または同じ stack にある 2 つの列) を入れ替えた方陣もまた数独解と

なり, もとの数独解と同値であるといえる. 数独解を同値な数独解に移すような数字 (シンボル) の置換や band (または stack) の置換を, 数独解の集合 X 上の作用素という.

数独解から, 配置された一部の数字 (シンボル) が見えないように消し, 空白のセルを配置したものが, 数独パズルの問題に当たる方陣である. この空白セルを持つ数独を, 数独パズルと呼ぶ. 本稿では, 数独パズルと数独解を区別する必要がない場合には, 数独と呼ぶことにする. 区別する必要がある際には, 数独パズル, 数独解と明記する.

数独パズルは, 2 次元平面上で考えられてきた. 数独パズルを 3 次元空間に拡張したものとして, [3] の Dion Church パズルがある. Church(2005) [3] や Lambert and Whitlock (2010) [7] は, 大きさ $9 \times 9 \times 9$ の立方体の側面に数独の数字を配置している. これらに対し, [1] では立方体の内部の小立方体に数字を配置している.

本稿では, 立方体の大きさが $n^2 \times n^2 \times n^2$ の場合に, Dion Church パズルや Lambert and Whitlock の手法のように立方体の側面に数独を貼り付ける形式で, 数独を 3 次元空間に拡張する方法を述べる.

2. 3 面モデルの 3 次元数独

n を 2 以上の整数とする. 3 面モデルの 3 次元数独は, 大きさ $n^2 \times n^2 \times n^2$ の立方体の隣接する 3 面に, –この 3 つの面は展開図の L 字型に配置されるように選んで–, 位数 n^2 の数独を貼り付ける形式で, 数独の 3 次元空間への拡張を実現する.

3 面モデルの 3 次元数独パズルは, 2005 年に Church [3] によって提案され, Dion Church パズルとして知られている. オリジナルの Dion Church パズル の展開図は, 図 2.1 になる. Dion Church パズルは, 大きさ $9 \times 9 \times 9$ の立方体の隣接する 3 面に, 2 次元平面の数独パズルを 3 つ配置し, なおかつ, 隣接する 3 辺には同じ数字を配置したものである.

展開図を組み立てた立方体を, 記載された数字が読み取れるように 2 次元平面に図示すると, 展開図 2.1 のように L 字型に配置した隣接する 3 面の数字を表示することができる. 展開図 2.1 において背景色がついた 6 つの行または列は, 組み立てた立方体における 3 本の辺に隣接するセルが並ぶ行または列である.

「隣接する 3 辺には同じ数字を配置する」という条件を, Lambert and Whitlock [7] は「辺のセルが合う (the edge cells match)」と表現してい

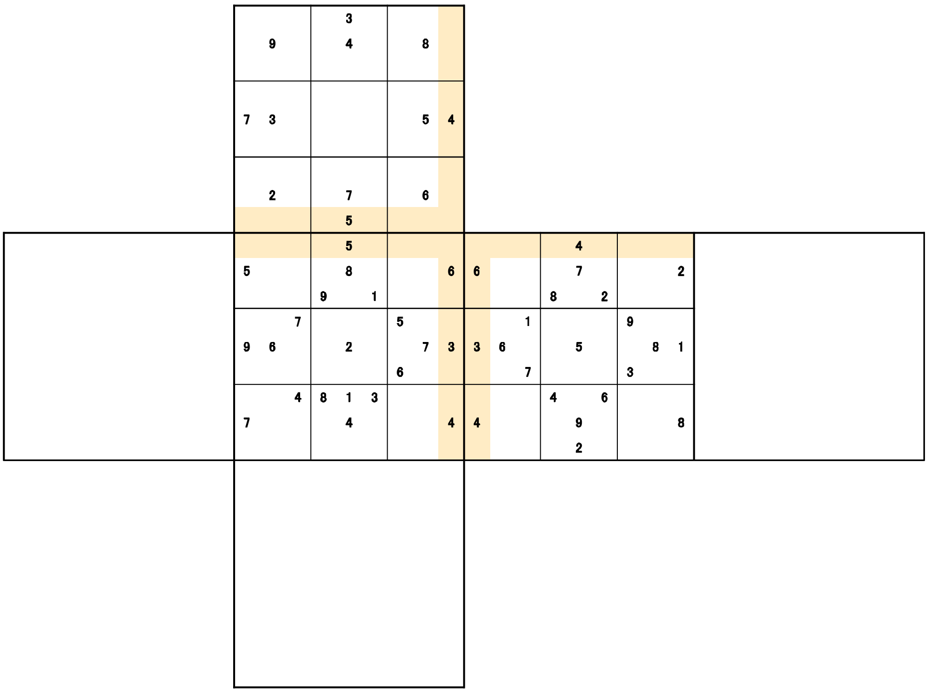

図 2.1: Dion Church の 3 次元数独パズルの展開図

る．これに対し，「隣接する 3 辺には同じ数字を配置する」という条件を外したものを，「辺のセルが合わない (the edge cells do not match)」場合と表現している．

辺のセルが合わない場合の大きさ $n^2 \times n^2 \times n^2$ の立方体の 3 面モデルの 3 次元数独解は，位数 n^2 の 2 次元数独解を任意に 3 つ構成し，立方体の隣接する 3 面に配置すればよい．3 面モデルの 3 次元数独解を S とし，3 つの面に配置される数独解を S_1, S_2, S_3 とする．2 次元平面の数独解 S_i を同値な数独解に移す作用素の集合を GS_i とし，3 次元数独解 S を積集合 $GS_1 \cap GS_2 \cap GS_3$ の元 (作用素) で移して得られるものは 3 面モデルの 3 次元数独解となっており，これが S に同値な 3 次元数独解であると考えられる．

辺のセルが合う場合の大きさ $n^2 \times n^2 \times n^2$ の立方体の 3 面モデルの 3 次元数独解の構成は，辺のセルが合わない場合と比べて複雑である．3 面の内 L 字型の真ん中に位置する 1 面に配置する数独解は，位数 n^2 の 2 次元数独解を任意に 1 つ構成すればよいが，隣接する 2 面に配置する数独解ついては，辺のセルが合うようにするために配置できる数独解が存在するかどうかをまず調べる必要があるし，存在したとしてもその種類は限定さ

れる．存在した場合の同値な条件やその作用素についての結果は, [2] がある.

Dion Church パズルのように辺のセルが合う場合の 3 面モデルの 3 次元数独パズルを解く時間については, 大きさ $9 \times 9 \times 9$ の場合および大きさ $16 \times 16 \times 16$ の場合についてシミュレーションした結果が [7] にある.

3. 6 面モデルの 3 次元数独

次に, 6 面モデルとして, 大きさ $n^2 \times n^2 \times n^2$ の立方体の全ての面である 6 面に, 位数 n^2 の数独を貼り付ける形式で, 数独の 3 次元空間への拡張を実現する.

6 面モデルにおいても, 3 面モデルと同様に, 「辺のセルが合う場合」と「辺のセルが合わない場合」が考えられる.

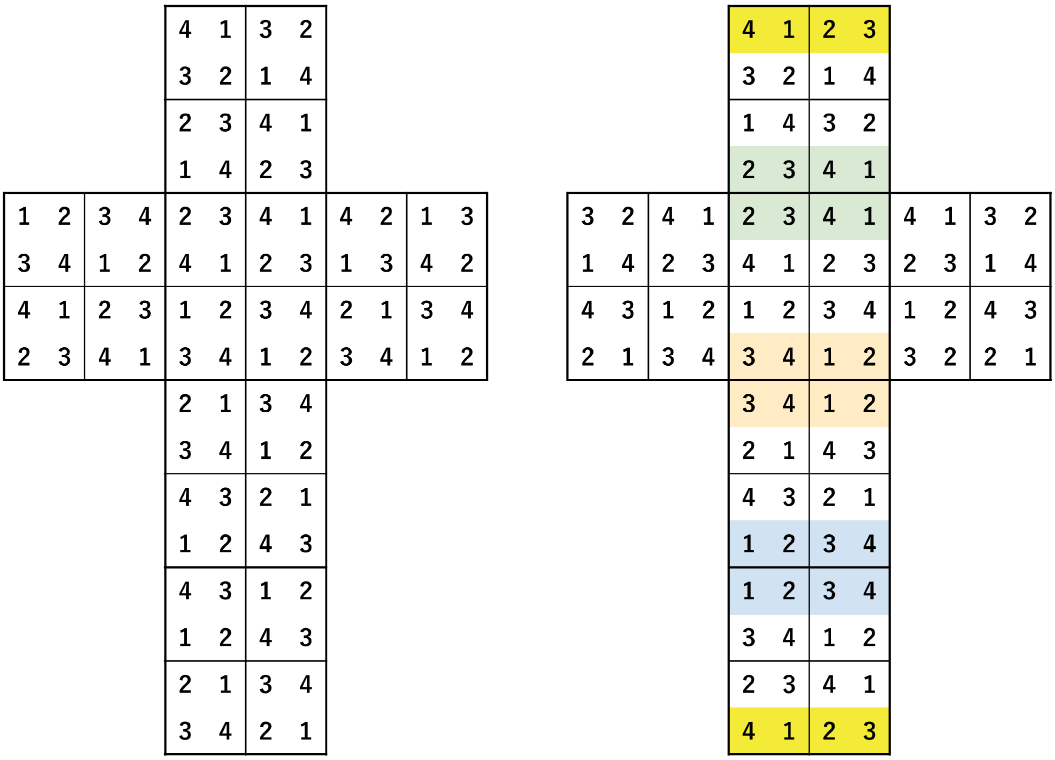

図 3.1: $n^2 = 4$ の 6 面モデルの 3 次元数独解の展開図で辺のセルが合わない場合 (左図, [7], p.254), 辺のセルが合う場合 (右図, [7], p.255)

図 3.1 の左図と右図は, それぞれ, Lambert and Whitlock [7] が提示した大きさ $4 \times 4 \times 4$ の立方体での 6 面モデルの 3 次元数独解の「辺のセルが合わない場合」と「辺のセルが合う場合」である.

立方体には合計 12 本の辺があるが, この 12 本すべての辺に隣接するセルに配置される数字が同じになるように数独解を考えるのは煩雑である. そこで, Lambert and Whitlock [7] は, 6 面モデルの「辺のセルが合う場合」を, 3.1 右図のように, 縦長十字型展開図において平行な 8 つの行に当たる 4 本の辺のセルが合う場合と限定して, 調べている. それであっても, Lambert and Whitlock のシミュレーション手法では, 大きさ $9 \times 9 \times 9$ の 6 面モデルの 3 次元数独パズルが解けるかどうかまでは判定できたが, 6 面モデルの 3 次元数独パズルを解くには時間がかかり過ぎると記載されている ([7]).

参考文献

[1] 足立智子 (2021); 高次元の数独解の構成, 日本応用数理学会 2021 年度年会講演予稿集, pp. 318–319.

[2] 足立智子 (2022); 3 次元数独解の同値な条件と作用素, 日本応用数理学会 2022 年度年会講演予稿集, 印刷中.

[3] D. Church (2005); 3D Sudoku, *The Daily Telegraph (May 2005).*

[4] D. Keedwell (2010); Constructions of complete sets of orthogonal diagonal Sudoku squares, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 47, pp. 227–238.

[5] D. Keedwell and J. Dénes (2015); *Latin Squares and their applications, (second edition)*, North-Holland publications.

[6] C. F. Laywine and G. L. Mullen (1998); *Discrete Mathematics Using Latin Squares*, John Weiley & Sons, INC.

[7] T. A. Lambert and P. A. Whitlock (2010); Generalizing Sudoku to three dimensions, *Monte Carlo Methods Appl.*, Vol. 16, pp. 251–263.

[8] J. Lorch (2009); Mutually orthogonal families of linear sudoku solutions, *Journal of the Australian Mathematical Society*, Vol. 87, pp. 409–420.

[9] J. Lorch (2010); Orthogonal combings of linear sudoku solutions, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 47, pp. 247–264.