ON A WEIGHTED DENSITY OF LOW-LYING ZEROS OF SYMMETRIC POWER L-FUNCTIONS
(対称べき L 関数の低い位置にある零点の重みつき密度について)

杉山真吾 (日本大学　理工学部数学科)

SHINGO SUGIYAMA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
NIHON UNIVERSITY

Abstract. 本記事は, 2022 年 1 月 24 日に筆者が講演した内容をもとに執筆したものである. 本記事では正則 Hilbert モジュラー形式に付随する対称べき L 関数の族の低い位置にある零点 (low-lying zero) の分布を, 対称 2 次 L 関数の特殊値の重みつき版にして考察する. また, 重みをつけることで密度関数がどう変化するのかを観察する.

1. 序章

F を有限次総実代数体とし, $\mathbb{A}_F$ をそのアデール環とする. π は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ のコホモロジカルな既約カスピダル保型表現の中で動くとする. 本記事で紹介する事項は 2 つある. まず 1 つ目は以下の主定理である.

Theorem 1.1. ([37], Rough version) 対称べき L 関数の族 $\{L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))\}_\pi$ の低い位置にある零点たち (low-lyng zeros) の分布は明示的な密度関数によって記述できて, さらに

$$\frac{L(s, \mathrm{Sym}^2(\pi))}{L(1, \mathrm{Sym}^2(\pi))} \qquad (1/2 \leqslant s \leqslant 1)$$

の重みをつけた場合の零点分布も明示的な密度関数によって記述可能である. さらに, $r \neq 2$ または $s \neq 1/2$ の時はランダム行列理論から自然に生じる密度関数に一致するが, $r = 2$ かつ $s = 1/2$ の時だけランダム行列理論から自然には生じない密度関数が現れ, 対称性の破れ (symmetry breaking) が起きる.

対称性の破れという言葉は密度関数が従来のものから変化するという意味で用いており, 物理的な解釈などは考慮していない. 上の定理は後ほど正確に記述する.

本記事で紹介するもう 1 つの事項は, L 関数の low-lying zero の重みつき密度予想 (Weighted Density Conjecture) を提唱することである. この予想はもともと知られていた Katz, Sarnak による密度予想 (Density Conjecture) を重みつき版に発展させた予想である.

本記事は 6 つの章からなる. 2 章でランダム行列理論の復習と Katz と Sarnak の密度予想について述べ, 3 章では密度予想の具体例についてまとめた. 2 章と 3 章は歴史についてまとめたものなので飛ばしても良い. 上述の Theorem 1.1 は Theorems 4.2, 4.3 として 4 章にまとめた. 5 章で主定理の証明の概略を述べ, 6 章で Fazzari の重みつき 1 レベル密度 (weighted one-level density) に関する結果, および Ade Irma Suriajaya と筆者の Dirichlet L 関数の場合の結果についても触れた.

2. 密度予想

Riemann ゼータ関数の非自明零点が直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にしかないであろうという Riemann 予想は, 素数の分布と深い関わりにあるその神秘さでもって, これまで人々を惹きつけ魅了して

日本大学理工学部数学科 sugiyama.shingo@nihon-u.ac.jp.

きた．現在においてもミレニアム懸賞問題の１つとして君臨し, 依然として未解決であり, 今後も人々を魅了し続けるだろう．このRiemann予想を解くための１つのアイデアとして, Riemannゼータ関数$\zeta(s)$はあるHilbert空間上の作用素Aによる行列式表示"$\zeta(1/2+it)=\det(\mathrm{id}-tA)$"を持つだろうと予想された (Hilbert-Pólya予想[1])．Riemannゼータ関数の零点はスペクトル的な解釈があるだろうというこの予想ももちろん未解決であるが, Montgomeryが「Riemannゼータ関数の零点同士の間隔 (相関関係, pair correlation) は$W(\mathrm{GUE})(x)=1-(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x})^2$を密度関数として持つように分布しているだろう」と予想し, Riemann予想の仮定の下で傍証が与えられた．Odlyzkoの数値実験による傍証も得られ, 現在はMontgomery-Odlyzkoの法則[2]として知られている．$W(\mathrm{GUE})(x)$はGaussian Unitary Ensemble (GUE) に属するランダムHermite行列の固有値の相関関係 (pair correlation) を記述する密度関数である．

ここでKatzとSarnakの哲学を紹介しよう．Riemann予想やその一般化はL関数を１つ止めてその零点の位置を考察するものであり, Montgomeryの結果も, 零点の相関関係を虚部の大きさを∞に飛ばす極限によって捉えるというものである．これに反して, 零点は実数直線に近いものだけを考えることにすると, 有理型関数の零点は有界な範囲で有限個しかないが, L関数を無数に集めてくることで零点を無数に得ることができる．この零点たちのなす分布がどうなっているかを考察するとスペクトル的な解釈が可能であろうというのがKatzとSarnakの哲学である．KatzとSarnakによると, L関数の無限族を１つ固定するときそのメンバーであるL関数の低い位置にある零点 (low-lying zero) の分布は, 何かしらのランダム行列の固有値の偏角の分布と一致し, ランダム行列から生じる分布は５つの古典コンパクトLie群によるパターン$\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}, \mathrm{O}$で尽きるだろう, とのことである．

KatzとSarnakが用いたランダム行列理論を思い出す．$G(N)$を５つの古典コンパクトLie群$\mathrm{U}(N)$, $\mathrm{USp}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N+1)$, $\mathrm{O}(N)$のいずれかとする．$A\in\mathrm{U}(N)$に対して, N個の固有値は$e^{i\theta_j}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$と書ける．ここで

$$0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\cdots\leqslant\theta_N<2\pi$$

となるよう添え字づけておく．すると, $\frac{N}{2\pi}\theta_j\in[0,N)$となる．また, $A\in\mathrm{USp}(2N)$の時, Aの$2N$個の固有値は$e^{i\theta_j}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$とそれらの複素共役$\overline{e^{i\theta_j}}$で表すことができる．ここでは

$$0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\ldots\leqslant\theta_N\leqslant\pi$$

と添え字づけておく．この時, $\frac{N}{\pi}\theta_j\in[0,N]$となる．残り３つの直交群の場合にも同様にして固有値の偏角の正規化が可能である．実際, $\mathrm{SO}(2N)$の時は$\frac{N}{\pi}\theta_j(0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_N\leqslant\pi)$を正規化された偏角とし, $\mathrm{SO}(2N+1)$の時は１が必ず固有値であり, それ以外の固有値の偏角θ_jの正規化は$\frac{N+1/2}{\pi}\theta_j=\frac{2N+1}{2\pi}\theta_j$ $(0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_N\leqslant\pi)$とする．$\mathrm{O}(N)$の時は$\frac{N}{2\pi}\theta_j$ $(0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_N\leqslant\pi)$を正規化された偏角として扱う．

$\frac{N}{2\pi}$や$\frac{N}{\pi}$による正規化によって, $N\to\infty$とすると固有値の偏角が$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$の中にたくさん住んでいることが分かる．実はこれがどう分布しているのかを調べることができる．$\frac{N}{2\pi}$や$\frac{N}{\pi}$のような偏角の正規化因子を$\frac{N+\lambda}{2^g\pi}$と書くことにする (λとgは$G(N)$の型ごとに値が変わりうる)．

Katz, Sarnakの [17, Theorem AD.2.2] により, ランダム行列の固有値の偏角を平均化して行列のサイズのNを無限大に飛ばした極限は収束し, 固有値の偏角の分布は以下のように記述される．

Theorem 2.1 ([17])**.** $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$は任意の良いテスト関数とする (例えば$C_c(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$の元または$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$上のSchwartz関数であれば良い)．この時,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\int_{A\in G(N)}dA}\int_{A\in G(N)}\sum_{j=1}^{N}\phi\left(\frac{N+\lambda}{2^g\pi}\theta_j\right)dA=\int_0^\infty\phi(x)W(G)(x)dx.$$

[1] Odlyzkoのホームページに Hilbert-Pólya予想に関する経緯が書いてあり, それに関する手紙も掲載されていて興味深い．詳細は http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/polya/index.html をご覧あれ．

[2] 法則と言っているが証明はなされていないので, 正確には予想である．the Montgomery-Odlyzko law の直訳である．

ここで dA は $G(N)$ のある Haar 測度であり, 密度関数 $W(G)(x)$ は以下のように記述される.

$$W(G)(x) := \begin{cases} 1 & G = \mathrm{U}, \\ 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G = \mathrm{Sp}, \\ 1 + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G = \mathrm{SO(even)}, \\ 1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} + \delta_0 & G = \mathrm{SO(odd)}, \\ 1 + \frac{1}{2}\delta_0 & G = \mathrm{O}. \end{cases}$$

なお, δ_0 は 0 をサポートに持つ Dirac デルタ超関数であり, 記号 G は $G(N)$ に応じて自然に定める. 例えば $G(N) = \mathrm{U}(N)$ の時は $G = \mathrm{U}$ としている.

1999 年の Katz-Sarnak [18] の経験則 (heuristics) によると, L 関数の族 $\{L(s, \mathcal{A})\}_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}}$ ごとに上述の 5 種類の古典 Lie 群のうちのいずれかのタイプ $G = G(\mathcal{F})$ が存在して, L 関数の族の零点分布は密度関数 $W(G)$ によって記述できるだろう, とのことである.

Katz, Sarnak は厳密に定式化して述べている訳ではないので L 関数の族という言い方も曖昧である. 彼らの予想を数式を使って述べるために, 今回考察の対象とする L 関数を ad hoc ではあるが設定しておく.

Definition 2.2. L 関数とは添え字 $\mathcal{A}$ を持つ関数 $L(s, \mathcal{A})$ であって, 以下の性質を満たすものとする.

- Euler 積表示
$$L(s, \mathcal{A}) = \prod_p \{\prod_{j=1}^d (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})^{-1}\}$$
を持ち, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ で絶対収束するものとする. ここで d は素数 p に寄らない正の整数である.
- $\theta > 0$ が存在して, 任意の素数 p と任意の $j \in \{1, \ldots, d\}$ に対して, $|\alpha_{p,j}| < p^\theta$ が成り立つ.
- $L(s, \mathcal{A})$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続され, 位数 (order) は 1 である. ここで位数とは関数の増大度としての位数のことで,
$$\rho := \limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log \max_{|s|=r} |L(s, \mathcal{A})|}{\log r}$$
で定義される. 位数は任意の $\epsilon > 0$ と任意の十分大きな r に対して $\max_{|s|=r} |L(s, \mathcal{A})| \ll_\epsilon e^{r^{\rho+\epsilon}}$ となる最小の ρ としても定義できて, 上の定義と同値である.
- d 個の複素数の組 $(\mu_j)_{j=1}^d \in \mathbb{C}^d$ と絶対値が 1 の $\epsilon_{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}$ (i.e., $|\epsilon_{\mathcal{A}}| = 1$) と正の実数 $N_{\mathcal{A}} > 0$ が存在して, $\widehat{L}(s, \mathcal{A}) := \{\prod_{j=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_j)\} L(s, \mathcal{A})$ とおくとき 関数等式 $\widehat{L}(s, \mathcal{A}) = \epsilon_{\mathcal{A}} N_{\mathcal{A}}^{1/2-s} \overline{\widehat{L}(1 - \overline{s}, \mathcal{A})}$ が成立する.

上の公理は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約 isobaric 保型表現のスタンダード保型 L 関数を含むように ad hoc に設定されたものである. 例えば Saito-Kurokawa リフトの L 関数は Riemann ゼータ関数のシフトを因子に持つので, この L 関数の零点は明らかに直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ の上以外に豊富に存在する. そういった事情を加味すると, 上記の公理を満たす L 関数のクラスでは広すぎるかもしれない. 現在のところ Selberg クラスや拡張 Selberg クラスの L 関数などのように, L 関数を解析数論的に扱う適切な設定は設けられているが, low-lying zero の分布を研究する際の適切な L 関数の族を設定することは難しいと思われる. low-lying zero の観点で適切な L 関数の族を設定する試みとしては, 最近出版された Sarnak, Shin, Templier の [34] がある.

Iwaniec, Sarnak によって導入された解析的導手 (analytic conductor) をここでも導入しておく. 以下の定義は Iwaniec, Kowalski の本 [15] の 5 章を参考にしている.

Definition 2.3. L 関数 $L(s, \mathcal{A})$ の解析的導手 (analytic conductor) を

$$Q_{\mathcal{A}} := \{ \prod_{j=1}^d (3 + |\mu_j|) \} \times N_{\mathcal{A}}$$

で定義する.

$N_{\mathcal{A}}$ のことを conductor と呼ぶことがあるが, 解析的導手と区別するために $N_{\mathcal{A}}$ を代数的導手 (algebraic conductor) と呼ぶことがある. 文献によっては定義内の定数 3 は 1 や 2 だったりすることもあるし, 定数倍ずらしていることもある.

解析的導手の例としては, 例えば $\mathcal{A}=\chi$ が mod q の原始的 Dirichlet 指標ならば, $Q_{\mathcal{A}}=(3+|\delta_\chi|)q \asymp q$ である. ここで $\delta_\chi \in \{0,1\}$ は $\chi(-1)=(-1)^{\delta_\chi}$ で定義される. また例えば $\mathcal{A}=f$ が重さ k, レベル N の楕円カスプ形式であって正規化された新 Hecke 固有形式であるなら, $Q_{\mathcal{A}}=(3+\frac{k-1}{2})(3+\frac{k+1}{2})N \asymp k^2N$ である. L 関数の族を $\{L(s)\}_{L\in\mathcal{F}}$ ではなく $\{L(s,\mathcal{A})\}_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}}$ と書くようにしているのは L 関数が Dirichlet 指標や保型形式・保型表現で添え字づけられることを意識しているからである. この観点においては, Dirichlet 指標や保型形式とは「L 関数の添え字のことである」と言っていいかもしれない[3].

さて, low-lying zero の 1 レベル密度 (one-level density) を導入しよう. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 空間とし, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\widehat{\phi}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ で定義しておく.

Definition 2.4. L 関数 $L(s,\mathcal{A})$ の 1 レベル密度 $D(\mathcal{A},\phi)$ は以下のように定義される. $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})$ がコンパクトであるような任意の $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$D(\mathcal{A},\phi):=\sum_{\rho}\phi\left(\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}\gamma\right).$$

ここで $\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$ は $\widehat{L}(s,\mathcal{A})$ の零点全体を重複度込みで動くものとする.

Remark 2.5. (1) $L(s,\mathcal{A})$ の GRH は仮定していないので, γ は実数とは限らないにも関わらず, ϕ の中に γ が入っている. $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})$ がコンパクトであるような $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は Fourier 反転公式によって $\mathbb{C}$ 上の整関数に自然に拡張できるので, ϕ に虚数を代入しても意味を持つ. したがって 1 レベル密度の定義において GRH は必要としない. ちなみに $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})$ がコンパクトであるような $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{C}$ 上の整関数に拡張したものは Paley-Wiener 関数であるので, テスト関数は Paley-Wiener 関数であると言っても良い.

(2) ϕ が急減少関数なので, 1 レベル密度に寄与する零点は実軸に近い零点だけである. この観点から, 低い位置にある零点 (low-lying zero) の密度を導入しているとも考えられる. そういった事情により, $D(\mathcal{A},\phi)$ は $L(s,\mathcal{A})$ の low-lying zero の 1 レベル密度と呼ばれたりする.

(3) ランダム行列理論で考察した固有値の分布の漸近式において, ϕ の中に $\frac{N}{2\pi}$ や $\frac{N}{\pi}$ などの偏角の正規化因子があったことをここで思い出そう. この正規化因子によって, 隣り合う固有値の偏角の平均間隔 (average spacing) が 1 に正規化されている. 実は, L 関数の零点の場合は, $\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}$ という正規化因子によって, 零点の平均間隔が 1 に正規化されていると思える. これは $L(s,\mathcal{A})$ が Iwaniec, Kowalski の [15, §5] の意味での L 関数であれば [15, Theorem 5.8] の

$$\begin{aligned}N(T,\mathcal{A})&:=\#\{\rho\in\mathbb{C}\mid \widehat{L}(\rho,\mathcal{A})=0,\ 0\leqslant \mathrm{Im}\rho\leqslant T\}\\&=\frac{T}{2\pi}\left\{\log\left(\frac{T}{2\pi e}\right)^d+\log Q_{\mathcal{A}}\right\}+\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(\log T)\end{aligned}$$

という零点の個数の漸近公式から解釈が可能である ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の isobaric 保型表現のスタンダード L 関数の場合は [35, §4.4]).

L 関数の族とは L 関数の添え字の多重集合 $\mathcal{F}$ のこととし, 以下を仮定する: 多重集合 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}=\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_j$ という分解を持ち, 任意の j に対して $\mathcal{F}_j<\infty$ であり, $\lim_{j\to\infty}\mathcal{F}_j=\infty$ である (例えば $\mathcal{F}_j=\{\mathcal{A}\in\mathcal{F}\mid Q_{\mathcal{A}}\asymp j\}$ のようなもの). Katz, Sarnak の予想は以下の通りである.

[3]Neukirch の類体論の本 [28] の第 IV 章 §3, p. 283 の「部分群の添え字を体と呼ぶことにする」という説明を彷彿とさせる.

Conjecture 2.6 (密度予想 (Density Conjecture for $\mathcal{F}$))**.** L 関数の族 $\mathcal{F}$ に対して, 5 種類の群のタイプ $G(\mathcal{F}) \in \{\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}, \mathrm{O}\}$ が存在して, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})$ がコンパクトであるような任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 1 レベル密度の平均の極限は収束し,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_j} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_j} D(\mathcal{A},\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W(G(\mathcal{F}))(x) dx$$

となるであろう.

密度予想に登場する $G(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の対称タイプ (symmetry type) と呼ぶ.

Katz, Sarnak [17] は関数体上のゼータ関数・L 関数を考察し, 零点密度と固有値の偏角の密度の類似性を見つけている (cf. [18, §4]). 例えば, $\mathbb{F}_q$ 上の超楕円曲線 C の合同ゼータ関数 $Z_C(T)$ の族の零点分布を考察すると, q と C の種数 $g(C)$ を両方とも ∞ に飛ばすと, Sp 型になる. また, 関数体 $\mathbb{F}_q(X)$ 上の楕円曲線 E を 1 つ固定して, モニックで square-free な次数 n の多項式 Δ から定まる 2 次指標 χ_Δ を動かした時の L 関数の族 $\{L(T, E\otimes\chi_\Delta)\}_\Delta$ の場合は, q と n を共に ∞ に飛ばした時に, SO(even) 型や SO(odd) 型になる.

Katz, Sarnak は有限体上のゼータ関数の族に対して, 零点の分布がランダム行列理論から生じるものと一致するという結果を与えており, 標数 0 の大域体上の L 関数の場合は当時は何も知られていなかった. 標数 0 の大域体上の L 関数の low-lying zero の分布に関して現在知られている結果の一部を, 次の章でみていく.

3. 密度予想の具体例

早速タイトルを裏切るが, Katz, Sarnak の予想が成り立つ具体例は現段階で 1 つも見つかっていない. 知られている結果は十分小さい $\alpha > 0$ に対して「$\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\alpha,\alpha)$」の条件を満たす ϕ に対して与えられるものばかりである. サポートのサイズに関する条件は GRH を仮定しても完全には外せないのが現状である. もちろん上記のように $\alpha > 0$ を十分小さく取ったとしても 1 レベル密度の収束性は非自明であり, サポートの条件が課されているとしても傍証としては十分であるので, 上記のような $\alpha > 0$ をうまく取ることで得られる傍証をいくつか紹介する. low-lying zero の分布に関する結果はたくさんあり, すべてを列挙するのは大変なので, 初めて例が与えられた論文と一般的な設定で考察された論文に絞って紹介する. $\alpha > 0$ の大きさについても省略する.

Dirichlet L 関数の場合は以下の 2 つが知られている.

Example 3.1. (1) Hughes, Rudnick [14] は素数 q に対する mod q の非自明 Dirichlet 指標に付随する Dirichlet L 関数の族 $\{L(s,\chi) \mid \chi \neq \mathbf{1}_q, \mathrm{mod}\ q\}_q$ を考察した. ここで $\mathbf{1}_q$ は mod q の自明指標である. low-lying zero の密度は $W(\mathrm{U})$ で記述されるので, 対称タイプは U である.

(2) Rubinstein [33] は 2 次 Dirichlet L 関数の族 $\{L(s,\chi_d) \mid X/2 \leqslant |d| \leqslant X\}_{X>1}$ を考察した. ここで χ_d は mod d の原始的 2 次指標であり, d は基本判別式を動くものとする. この時, 対称タイプは Sp である

次に楕円モジュラー形式に付随するスタンダード保型 L 関数の場合を紹介する. $S_k(\Gamma_0(N))^{\mathrm{new}}$ を重さ k, レベル N の楕円新カスプ形式のなす空間とし, 正規化された Hecke 固有形式からなる Petersson 内積に関する直交基底を $B_k^*(N)$ とする.

Example 3.2. (1) GRH の仮定の下で Iwaniec, Luo, Sarnak [16] は $\{L(s,f) \mid f \in B_k^*(N)\}_{k,N}$ を考察した. ここで N は square-free な正整数を動くとし, k は正の偶数を動くとする. k, N の片方を固定してもよいし両方を動かしても良い. この時, 対称タイプは O である.

(2) 上の L 関数の族を関数等式の符号 (root number) によって以下の 2 つに分割する.

$$\{L(s,f) \mid f \in B_k^*(N),\ \varepsilon(1/2,f) = \epsilon\}_{k,N}$$

(ただし $\epsilon \in \{1,-1\}$). この時 $\epsilon = +1$ に対する保型 L 関数の族は対称タイプが SO(even) になり, $\epsilon = -1$ に対する保型 L 関数の族は対称タイプが SO(odd) になる.

この結果は標数 0 の大域体上の L 関数に関して初めて与えられた例であり, 先程紹介した Dirichlet L 関数の場合の結果は Iwaniec, Luo, Sarnak の結果よりも後になって出版されている[4].

ここまでで 5 種類の古典コンパクト Lie 群のすべてが出揃った. ちなみに Iwaniec, Luo, Sarnak [16] は GRH の仮定の下で, 対称 2 次 L 関数の族 $\{L(s, \mathrm{Sym}^2(f)) \mid f \in B_k^*(N)\}_{k,N}$ も考察しており, この場合は対称タイプが Sp である.

保型 L 関数の族に関しては他にも色々な結果が知られているが, 楕円モジュラー形式の場合の結果を最も一般的な設定に拡張したものとしては以下の Shin, Templier [35] がある.

Example 3.3. Shin, Templier [35] は代数体 F 上の連結簡約代数群 G に対して, $G(\mathbb{A}_F)$ の保型表現の L 関数を考察した. ここでは $G(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ が離散系列表現を持つという仮定が必要なので仮定しておく. 例えば GL_2, GSp_{2n}, Sp_{2n}, いくつかの p, q に対する特殊直交群 $\mathrm{SO}_{p,q}$ はこの仮定を満たすが, GL_n $(n \geqslant 3)$ はこの仮定を満たさない.

ξ を $G(F \otimes \mathbb{C})$ の既約代数的表現で最高ウェイトが正則であるものとし, $\mathfrak{n}$ を F の非ゼロ整イデアルとする. 保型表現の族としては $\mathcal{F}_{\xi,\mathfrak{n}}$ を扱う. これは $G(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現 $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_{\mathrm{fin}}$ であって, アルキメデス成分 π_∞ が ξ に付随する L パケット Π_ξ に含まれ, 有限成分 π_{fin} は $\pi_{\mathrm{fin}}^{K(\mathfrak{n})} \neq 0$ を満たすもの全体とする. ここで $K(\mathfrak{n})$ はレベル $\mathfrak{n}$ の主合同部分群である.

$r : {}^L G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を既約 L 準同型で, r は G の Langlands 双対群 ${}^L G$ の単位元の連結成分 $\widehat{G}$ 上で非自明とする (つまり $r(\widehat{G}) \neq 1$). r に対する Langlands 関手性原理を仮定し, r に対応するリフティングを同じ記号 r で書くことにする. $r(\pi)$ の導手に関する条件や ξ に関する良い条件も仮定する.

この時, 保型 L 関数の族 $\{L(s, \pi, r)\}_{\pi \in \mathcal{F}_{\xi,\mathfrak{n}}}$ の low-lyng zero の密度は ξ または $\mathfrak{n}$ を "無限大に飛ばす" と, 対称タイプが G_r になる. この G_r は Frobenius-Schur indicator $s(r) \in \{0, 1, -1\}$ の値が $0, 1, -1$ の時にそれぞれユニタリー型, シンプレクティック型, 直交型になる.

Remark 3.4. (1) $s(r) = 0$ の時に $G_r = \mathrm{U}$, $s(r) = 1$ の時に $G_r = \mathrm{Sp}$ となることは彼らの結果から分かるが, $s(r) = -1$ の時に G_r が SO(even), SO(odd), O の 3 つの直交型のうちのどれになるかまでは分からない. この問題はテスト関数の Fourier 変換 $\widehat{\phi}$ のサポートが $[-1, 1]$ より小さいことに起因する.

(2) 証明を見ると, 実は登場する保型表現 π はカスピダルでなくても discrete であれば良い. また ξ の最高ウェイトは正則である必要はない. ξ の最高ウェイトが正則であるという仮定は, 佐武パラメーターの一様分布定理を Arthur の跡公式から導く際に必要である. それは, 保型表現の数え上げ測度の非負性がないと Stone-Weierstrass の定理を使って跡公式のテスト関数を多項式環 (佐武同型により spherical Hecke 環と同一視できる環) から連続関数の関数環に拡張できないからである. low-lying zero に応用する際は跡公式のテスト関数が多項式の範疇であっても構わないので, 保型表現の数え上げ測度の重み因子の非負性は必要ない.

Siegel 保型形式の場合には以下の 2 つの結果が知られている.

Example 3.5. (1) Kim, 若槻, 山内 [21] は重さが (k_1, k_2) でレベルが主合同部分群 $\Gamma(N)$ である $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の Siegel カスプ形式に対するスタンダード L 関数 $\{L(s, f, \mathrm{Std})\}_f$ とスピノール L 関数の族 $\{L(s, f, \mathrm{Spin})\}_f$ を考察した. $\{L(s, f, \mathrm{Std})\}_f$ の対称タイプは Sp であり, $\{L(s, f, \mathrm{Spin})\}_f$ の対称タイプは O である.

(2) Kim, 若槻, 山内 [23] は, 重さが正則な $(k_1, \ldots, k_n)$ でレベルが主合同部分群 $\Gamma(N)$ である $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の Siegel カスプ形式に対するスタンダード L 関数の族 $\{L(s, f, \mathrm{Std})\}_f$ を考察した. $n = 2$ の時と同様に, この族の対称タイプは Sp である. Arthur の endoscopic classification を使っているため, 現状では conditional な結果とも思える[5].

---

[4] しかしながら, 当時のプレプリントが公開された正確な順番を筆者は知らない.

[5] Arthur のいくつかの未発表プレプリントが 2022 年 7 月時点でどこにも公開されていないため, 筆者は conditional だと考える. ひょっとすると進展があったのかもしれないが, 現状では folklore だと思われる.

Remark 3.6. Shin, Templier の結果で $G = \mathrm{GSp}_4, \mathrm{Sp}_{2n}$ としても Kim, 若槻, 山内の結果は得られない．実際, Shin, Templier は保型表現の無限成分を, 離散系列表現を含む L パケットの中で動かしている．一方で Kim, 若槻, 山内の場合は, 保型表現の無限成分がある固定された正則離散系列表現になるよう制限して保型表現を動かしている．

以上の結果は Dirichlet 指標や楕円モジュラー形式, および楕円モジュラー形式の高次元化にあたる保型形式の L 関数におけるものである．次に気になるのは Maass 形式 (非正則だが実解析的でラプラシアンの固有関数) の場合であるが, これも色々知られている．

Example 3.7. (1) Poincaré 上半平面上の関数としての Maass カスプ形式の場合は Alpoge, Miller [2] が, フルレベルの Maass 形式に対して GRH の仮定の下でスタンダード L 関数の族をスペクトラルアスペクト (ラプラシアンの固有値を無限大に飛ばす) で考察している．対称タイプは O である．Alpoge, Amersi, Iyer, Lazarev, Miller, Zhang [1] も Maass 形式のスタンダード L 関数の族を考察しており, ここではレベル N が 1 とは限らない square-free の場合も扱っており, 極限操作についてもスペクトラルアスペクトとレベルアスペクト (レベルを無限大に飛ばす) の両方が考察されている．

(2) Goldfeld, Kontrovich [11] は Ramanujan conjecture と GRH の仮定の下, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 上の Maass カスプ形式の L 関数の族 $\{L(s, f, r)\}_f$ をスペクトラルアスペクトで考察した．ここで $r = \mathrm{Std}, \mathrm{Sym}^2, \mathrm{Ad}$ である．対称タイプはそれぞれ $\mathrm{U}, \mathrm{U}, \mathrm{Sp}$ である．ちなみに, テスト関数の Fourier 変換のサポートを小さくすれば Ramanujan conjecture の仮定は外すことができる．

(3) Matz, Templier [27] は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の spherical カスピダル保型表現の L 関数の族 $\{L(s, \pi, r)\}_\pi$ を考察した．ここで r は Std, Sym^2, $\wedge^2$, Ad である．$r = \mathrm{Std}$ の時, $n = 2$ だと先行研究から想定できるように対称タイプは O だが, $n \geqslant 3$ の時は U である．$n = 2$ の時は SO(even), SO(odd) となるスタンダード L 関数の族も与えられている．$n \geqslant 3$ の場合は $r = \mathrm{Std}, \mathrm{Sym}^2, \wedge^2, \mathrm{Ad}$ に対して対称タイプはそれぞれ $\mathrm{U}, \mathrm{U}, \mathrm{U}, \mathrm{Sp}$ となる．ここで, $\wedge^2$ を考える時 $n \geqslant 3$ を課している．もし $n = 2$ だと外積 2 次 L 関数は保型表現によらず $\zeta(s)$ になり, 意味をなさないからである．

証明にあたって, $r = \mathrm{Sym}^2, \wedge^2$ の時は「$L(s, \pi, \mathrm{Sym}^2)$ と $L(s, \pi, \wedge^2)$ が極を持つような既約カスピダル保型表現 π は族の中では無視できる」ということを示す必要があるが, これを示す際に, Arthur の endoscopic classification を使って, 分裂特殊直交群や分裂シンプレクティック群の spherical な保型表現の数え上げに帰着させる．この部分は Example 3.5 (2) でも触れたように conditional とも思える．

(4) Ramacher, 若槻 [31] は GL_n の内部形式 $G = \mathrm{GL}_1(D)$ の保型表現のスタンダード L 関数の族を考察している．ここで D は $\mathbb{Q}$ 上の中心的斜体であって, 無限素点で分裂し, 指数が n (次元が n^2) である (この時 $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ はコンパクトである)．対称タイプは $n = 2$ だと直交型 (O, SO(even), SO(odd) のどれか) であり, $n \geqslant 3$ の時は U である．

保型 L 関数の族に対する low-lying zero の密度の unconditional な研究手法は, 現在知られている限りでは Kuznetsov 跡公式と Arthur 跡公式 (不変跡公式) によるものである．

L 関数を公理的に導入した際に Riemann ゼータ関数のシフトに関してコメントをしたが, 保型 L 関数が Riemann ゼータ関数のシフトを含む場合, CAP 表現に付随していることがあり, 跡公式のスペクトルサイドに現れる CAP 表現は全体の中で少ないという現象が少なくとも GSp_4, Sp_{2n} の場合で観察されている ([21], [23])．CAP 表現に付随する L 関数が公理的な L 関数の枠組みに含まれていても, CAP 表現の L 関数の low-lying zero は跡公式から生じるような L 関数の族の中では一般には無視できるのかもしれない．

4. 対称べき L 関数に関する主定理

この章で主定理を述べるが, その前に対称べき L 関数を導入しておく． q を素数とする． $B_k^*(q)$ が $S_k(\Gamma_0(q))^{\mathrm{new}}$ の正規化された Hecke 固有形式からなる直交基底であったことを思い出しておく． $B_k^*(q)$ の各要素 f の Fourier 係数 $\{a_f(n)\}_n$ を $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_f(n) e^{2\pi i n z}$ で定める． f に付随するスタンダード L 関数は Fourier 係数の Dirichlet 級数で定義され, この L 関数

は Euler 積を持つ.

$$L(s,f):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_f(n)}{n^{s+(k-1)/2}}=\prod_p(1-p^{\frac{1-k}{2}}a_f(p)p^{-s}+\mathbf{1}_q(p)\,p^{-2s})^{-1}$$
$$=\{\prod_{p\neq q}(1-\alpha_pp^{-s})^{-1}(1-\beta_pp^{-s})^{-1}\}\times(1-q^{\frac{1-k}{2}}a_f(q)q^{-s})^{-1}.$$

ここで $\mathbf{1}_q$ は mod q の自明な Dirichlet 指標であり, $\{\alpha_p,\beta_p\}$ は f の p における佐武パラメーターである. この時, 対称べき L 関数は

$$L(s,\mathrm{Sym}^r(f)):=\{\prod_{p\neq q}\det(1_{r+1}-p^{-s}\mathrm{Sym}^r(\left[\begin{smallmatrix}\alpha_p & \\ & \beta_p\end{smallmatrix}\right]))^{-1}\}\times(1-\{q^{\frac{1-k}{2}}a_f(q)\}^rq^{-s})^{-1}$$

で定義される. ここで 1_{r+1} は $r+1$ 次単位行列で, $\mathrm{Sym}^r:\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\to\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$ は対称テンソル表現である. 佐藤テイト予想への解決を動機として, $L(s,\mathrm{Sym}^r(f))$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続されて, s と $1-s$ に関する関数等式を持つことが既に分かっている. $k=2$ の時が Harris, Shepherd-Barron, Taylor [13], $k=3$ の時が Gee [9], 一般の $k\geqslant 2$ の時が Barnet-Lamb, Geraghty, Harris, Taylor [4], Hilbert モジュラー形式の場合だと Barnet-Lamb, Gee, Geraghty [3] の研究がある. ブレイクスルーとしては, 最近になって Newton, Thorne [29], [30] が $\mathrm{Sym}^r(f)$ の保型性を証明した[6]. これにより, π が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の non-CM な既約カスピダル保型表現で, 新 Hecke 固有形式 $f\in S_k(\Gamma_0(N),\omega)$ に対応するものとする. この時, $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ は $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ のカスピダル保型表現になる. 特に, $L(s,\mathrm{Sym}^r(f))$ は整関数である.

我々が考察している楕円モジュラー形式は $N=q$ (素数) であり, $\omega=\mathbf{1}_q$ なので, 保型誘導 (automorphic induction) としては生じ得ない. よって, 我々が今後考察する場合は常に楕円モジュラー形式は non-CM であり, 対称べき L 関数は整関数である.

Cogdell, Michel [5] にあるように, 対称べき L 関数の Archimedes 因子や分岐素点における局所 L 因子, 関数等式も明示的に記述することができる. f に対応するカスピダル保型表現の Archimedes 成分は $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ の極小 O(2) タイプ k の離散系列表現 D_k であり, 保型表現の分岐素点は素数 q のみである. 保型表現の q での成分は特殊表現 $\mathrm{St}_2\otimes\chi$ である. ここで St_n は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_q)$ の Steinberg 表現で, χ は $\mathbb{Q}_q^\times$ の不分岐指標で $\chi^2=1$ を満たすものとする. χ は 2 次指標か自明指標である. $\chi(q)\in\{\pm1\}$ の値で χ が定まるので, χ は 2 つの候補しかない. また, $q^{(1-k)/2}a_f(q)=\chi(q)q^{-1/2}$ が成り立つ.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の局所 Langlands 対応を用いると $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{R})$ の表現 $\mathrm{Sym}^r(D_k)$ は

$$\mathrm{Sym}^r(D_k)=\begin{cases}\boxplus_{j=0}^{(r-1)/2}D_{(2j+1)(k-1)+1} & (r:\text{奇数})\\ \mathrm{sgn}^{r(k-1)/2}\boxplus(\boxplus_{j=1}^{r/2}D_{2j(k-1)+1}) & (r:\text{偶数})\end{cases}$$

となる. したがって,

$$L_\infty(s,\mathrm{Sym}^r(f)):=\begin{cases}\prod_{j=1}^{(r+1)/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2j\frac{k-1}{2})\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1+2j\frac{k-1}{2}),r:\text{奇数},\\ \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_r)\prod_{j=1}^{r/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+(2j+1)\frac{k-1}{2})\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1+(2j+1)\frac{k-1}{2}),r:\text{偶数}\end{cases}$$

となる. ここで $\mu_r:=\delta_{r/2,\mathrm{odd}}\in\{0,1\}$ は $r/2$ が奇数の時に 1, $r/2$ が偶数の時は 0 である.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_q)$ に対する局所 Langlands 対応を用いると,

$$\mathrm{Sym}^r(\mathrm{St}_2\otimes\chi)=\mathrm{St}_{r+1}\otimes\chi^r$$

となる. ここで St_{r+1} は $\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{Q}_q)$ の Steinberg 表現である. $\epsilon_{f,r}\in\{\pm1\}$ を

$$\epsilon_{f,r}:=\{\prod_{j=0}^{(r-1)/2}i^{(2j+1)(k-1)+1}\}^{\delta_{r,\mathrm{odd}}}(-1)^r\chi(q)^{r^2}$$

[6] Thorne はこの研究によって 2022 年に New Horizons in Mathematics Prize を受賞した. この賞は数学ブレイクスルー賞と同様に数学ブレイクスルー賞財団から授与されるものである.

と定義する．ここで $\delta_{r,\mathrm{odd}}$ は r が奇数の時に 1, r が偶数の時に 0 である．$\chi(q)^{r^2} = \{q^{1-k/2}a_f(q)\}^{r^2}$ なので $\epsilon_{f,r}$ は classical な保型形式のデータのみで書けることに注意しておく．以上の準備のもとで, $\widehat{L}(s, \mathrm{Sym}^r(f)) = L_\infty(s, \mathrm{Sym}^r(f))L(s, \mathrm{Sym}^r(f))$ とおくと,

$$\widehat{L}(s, \mathrm{Sym}^r(f)) = \epsilon_{f,r}(q^r)^{1/2-s}\widehat{L}(1-s, \mathrm{Sym}^r(f))$$

という関数等式を持つ．ゆえに対称べき L 関数の代数的導手は q^r である．解析的導手も明示的に書けて, $Q_{\mathrm{Sym}^r(f)} \asymp k^{2[r/2]}q^r$ となる．

重みつき密度に関する主定理を述べる前に, まずは主定理と比較するために重みのついていない 1 レベル密度に関する 2011 年の Ricotta, Royer の結果 [32] をみてみる．$k \geqslant 2$ を偶数とし,

$$\omega_f := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}\|f\|^2}$$

とおく．分母は f の Petersson ノルムの 2 乗である．ω_f は調和重み (harmonic weight) と呼ばれる．

Theorem 4.1 ([32])**.** 明示的に与えられる $\beta > 0$ が存在して, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\beta, \beta)$ を満たす任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(q)} \omega_f} \sum_{f\in B_k^*(q)} \omega_f D(\mathrm{Sym}^r(f), \phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(G_r)(x)dx$$

が成り立つ．ここで,

$$G_r := \begin{cases} \mathrm{O} & (r : \text{奇数}) \\ \mathrm{Sp} & (r : \text{偶数}) \end{cases}$$

である．

このレベルアスペクトに関する結果の前に, Güloğlu [12] が 2005 年に GRH の仮定の下でレベル 1, 重さ $k \to \infty$ の設定で重さアスペクトを研究していたことも挙げておく．通常の零点密度を考察するときは ω_q は邪魔であるが, GRH を仮定すると ω_q の重み因子は取り除くことができる ([12])．よって, 上の結果は重みがついていない場合の結果とみなせる．

さて, 今回得られた対称べき L 関数 $L(s, \mathrm{Sym}^r(f))$ の low-lying zero の重みつき密度は以下のように記述できる．

Theorem 4.2 (Weighted one-level density for $r \neq 2$ [37])**.** k は偶数で $k \geqslant 6$ とする．$r \neq 2$ を仮定し, $1/2 \leqslant s \leqslant 1$ とする．この時, 明示的に書ける $\alpha > 0$ が存在して, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\alpha, \alpha)$ を満たす任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}} \sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\widehat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))} D(\mathrm{Sym}^r(f), \phi) \\
&= \widehat{\phi}(0) - \frac{(-1)^r}{2}\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(G_r)(x)dx.
\end{aligned}$$

Theorem 4.3 (Weighted one-level density for $r = 2$ [37])**.** k は偶数で $k \geqslant 6$ とする．また, $r = 2$ とする．この時, 明示的に書ける $\alpha > 0$ が存在して, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\alpha, \alpha)$ を満たす任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}} \sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\widehat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))} D(\mathrm{Sym}^2(f), \phi) \\
&= \begin{cases} \widehat{\phi}(0) - \frac{1}{2}\phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(\mathrm{Sp})(x)dx & (\frac{1}{2} < s \leqslant 1), \\ \widehat{\phi}(0) - \frac{3}{2}\phi(0) + 2\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)|x|dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W'(x)dx & (s = \frac{1}{2}). \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで

$$W'(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}.$$

$r = 2$ かつ $s = 1/2$ の時に限りランダム行列理論で生じた 5 種類の密度関数のどれにも当てはまらないものが現れることが明らかとなった.

最初に述べたように, 上述の定理は Hilbert モジュラー形式の設定でも成り立つ. F は有限次総実代数体で $2 \in \mathbb{Q}$ が F の中で完全分解するものとする. $k = (k_v)_{v|\infty}$ は各 k_v が偶数で $k_v \geqslant 6$ とする. $\mathfrak{q}$ は F の整数環の 0 でない素イデアルとする. $\Pi_k^*(\mathfrak{q})$ を, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約カスピダル保型表現であって, π の無限成分が $\boxtimes_{v|\infty} D_{k_v}$, 導手 (conductor) が $\mathfrak{q}$ であるものとする. ここでの導手は Casselman の local new form の理論によって表現論的に定義されるものとする. $\Pi_k^*(\mathfrak{q})$ は重さ k, レベル $\Gamma_0(\mathfrak{q})$ の原始的 Hilbert カスプ形式に対応する集合であり, 楕円モジュラー形式の場合の $B_k^*(q)$ の Hilbert モジュラー形式版である. この時, 以下が成り立つ.

Theorem 4.4 ([37])**.** 明示的に与えられる $\alpha > 0$ が存在して, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset [-\alpha, \alpha]$ を満たす任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{\mathrm{N}(\mathfrak{q})\to\infty} \frac{1}{\sum_{\pi\in\Pi_k^*(\mathfrak{q})} \frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(\pi))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(\pi))}} \sum_{\pi\in\Pi_k^*(\mathfrak{q})} \frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(\pi))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(\pi))} D(\mathrm{Sym}^r(\pi), \phi)$$

に関する同様の公式が成り立つ. ただし, $L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$ の $r \geqslant 5$ の解析的性質は仮定する.

F が $\mathbb{Q}$ とは限らない一般の代数体の場合の $L(s, \mathrm{Sym}^r(\pi))$ の解析的性質は $\mathrm{Sym}^r(\pi)$ の保型性から従う. 保型性は, $r = 2$ の時は Gelbart, Jacquet [10], $r = 3$ の時は Kim, Shahidi [20], $r = 4$ の時は Kim [19] によって証明されている. $r \geqslant 5$ の時は一般の F に対してはまだ証明は与えられていない.

Remark 4.5. 主定理の α は以下のように具体的に書ける. $d_F = [F : \mathbb{Q}]$ とおくと, α として

$$\alpha = \frac{1}{r(r\frac{\min_v k_v - 3 - s + 2d_F}{2d_F} + \frac{1}{2})} \times \begin{cases} \frac{1}{2} & (\text{if } \min_v k_v \geqslant d_F + 4) \\ \frac{\min_v k_v - 3 - s}{2d_F} & (\text{if } 6 \leqslant \min_v k_v \leqslant d_F + 3) \end{cases}$$

がとれる. この時 $0 < \alpha < 1$ である.

Theorem 4.4 で $s = 1$ とすると約分によって重み因子は 1 となり, Hilbert モジュラー形式の場合の通常の 1 レベル密度を復元することができる.

Remark 4.6. Hilbert モジュラー形式の場合に知られている結果は以下のとおりである.

(1) Liu, Miller [26] は GRH の仮定の下でスタンダード L 関数の族を考察している. 彼らは F の狭義類数が 1 という仮定もしており, 重さが平行で, レベルは square-free イデアルという設定で議論している.

(2) Shin, Templier [35] の一般的な結果を適用すると Hilbert モジュラー形式の場合の結果も得ることができる. F を総実代数体, $G = \mathrm{PGL}_2$ とし, レベルを $\Gamma(\mathfrak{q})$, L 準同型を $\mathrm{Sym}^r : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{C})$ とすると 1 レベル密度の極限は $\widehat{\phi}(0) - \frac{s(\mathrm{Sym}^r)}{2}\phi(0)$ となる. Frobenius-Schur indicator は $s(\mathrm{Sym}^r) = (-1)^r$ なので, 今回の結果と一致している. ただし Shin, Templier のレベルは $\Gamma_0(\mathfrak{q})$ ではない.

今回の主題である重みつき 1 レベル密度の研究は, 筆者による対称べき L 関数以外には以下が知られている.

Remark 4.7. (1) 楕円モジュラー形式の場合に 2019 年に Knightly, Reno [24] が考察した重みつき 1 レベル密度をみてみよう. χ を mod D の自明指標または 2 次指標として $q \to \infty$ とすると, スタンダード L 関数の族 $\{L(s, f)\}_{f\in B_k^*(q)}$ の low-lying zero の 1 レベル密度に $L(1/2, f \otimes \chi)$ の重みをつけると, χ が 2 次の時に対称タイプが通常と同じく O だが, χ が自明の時は対称タイプは Sp に変化する. また彼らは $L(1/2, f)L(1/2, f \otimes \chi)$ の重みをつけた分布も扱っていてこの時の対称タイプも通常とは異なり Sp になる.

(2) Siegel モジュラー形式の場合には, 2012 年の Kowalski, Saha, Tsimerman [25] による重さアスペクトの場合の研究が知られている．また, 2015 年の Dickson [6] による GRH の仮定の下での重さアスペクトとレベルアスペクトの場合の研究が知られている．Kowalski, Saha, Tsimerman の結果のみ述べると, f を重さ k, フルレベルの $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の Siegel カスプ形式とする時, $\{L(s,f,\mathrm{Spin})\}_f$ の low-lying zero の f の Bessel 周期による重みつき分布の対称タイプは Sp となる．彼らは「重みをつけることで密度が $W(\mathrm{Sp})$ になっているが, 重みをつけなければ密度は $W(\mathrm{O})$ であるはずだ」と [25, pp. 337–338] で述べている．

ここで, f の Bessel 周期は本質的に L 関数の中心値 $L(1/2,f,\mathrm{Spin})L(1/2,f\otimes\chi_{-4},\mathrm{Spin})$ になるだろうという Böcherer 予想を思い出すと, 上記は L 関数の中心値の重みつき分布とみなせる．むしろ, 重みつき 1 レベル密度の対称タイプが Sp になってしまうことが Böcherer 予想が成り立つ根拠であると [25, pp. 337–338] で主張されている．なお Böcherer 予想は最近になって古澤, 森本 [8] によって証明が与えられた．

一方, 重みのついてない通常の 1 レベル密度の対称タイプは O である．これは Kim, 若槻, 山内の結果 [21], [22] によるものである．Siegel モジュラーの場合はむしろ重みつきのほうが先に研究された．Knightly, Reno はあえて重みをつけて考察したが, Kowalski, Saha, Tsimerman は重みをつけたというよりも重みが外せなかったのである．

Theorems 4.2, 4.3 と Knightly, Reno の結果と Kowalski, Saha, Tsimerman の結果を見て, 筆者は (突拍子もない) 予想を提唱した．以下の通り記しておく．

Conjecture 4.8 (重みつき密度予想 (Weighted Density Conjecture), [37])**.** $\mathcal{F}$ を L 関数の添え字の族とする．$W(\mathcal{F})(x)$ を, $\{L(s,\Pi)\mid\Pi\in\mathcal{F}\}$ の low-lying zeros の one-level density に現れる密度関数とする:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mathcal{F}_k}\sum_{\Pi\in\mathcal{F}_k}D(\Pi,\phi)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W(\mathcal{F})(x)dx.$$

$W(\mathcal{F})$ は $W(\mathrm{U})$, $W(\mathrm{Sp})$, $W(\mathrm{SO(even)})$, $W(\mathrm{SO(odd)})$, $W(\mathrm{O})$ のいずれかになることがしばしばである．さて, 写像 $w:\mathcal{F}\to\mathbb{C};\Pi\mapsto w_\Pi$ を weight と呼ぶことにする．weight w に対して,

$$\frac{1}{\sum_{\Pi\in\mathcal{F}_k}w_\Pi}\sum_{\Pi\in\mathcal{F}_k}w_\Pi D(\Pi,\phi)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W(\mathcal{F},w)(x)dx$$

となる密度関数 $W(\mathcal{F},w)(x)$ が存在する時, $W(\mathcal{F},w)(x)$ が通常の low-lying zeros の密度で生じる $W(\mathcal{F})(x)$ と異なるのは, w_Π が常に $L(1/2,\Pi)$ を含むときに限るだろう．

「w_Π が $L(1/2,\Pi)$ を含む」という表現には曖昧さがあるが, 色んな weight を考えることでこの予想は精錬されるであろうし, 様々な興味深い現象が観察されるだろう．また, 予想の傍証は現状では少ししか知られていないが, L 関数の特殊値の中でも中心値の時だけ不思議な事が起こるのだとすれば, ただでさえ Riemann 予想や Birch–Swinnerton-Dyer 予想や保型形式の周期の観点で重要視されている中心値は, もっと神秘的な何かを持っているに違いないだろう．ゆえにこのような予想を期待してもおかしくはないだろう．例えば今回の研究では $\Pi=\mathrm{Sym}^2(f)$ の場合を扱ったが, w_Π として $L(s,\Pi)$ $(1/2\leqslant s\leqslant 1)$ を考えた時, $s\neq 1/2$ の時は $W(\mathcal{F})=W(\mathcal{F},w)$ だが, $s=1/2$ の時に $W(\mathcal{F})\neq W(\mathcal{F},w)$ となり, $\mathcal{F}$ に対応する対称タイプが $G(\mathcal{F})$ であっても, $W(\mathcal{F},w)$ は異なる対称タイプになるか, もしくは Katz, Sarnak が想起したようなランダム行列理論には出て来ない新しい密度関数になるだろう．

ランダム行列理論での類似物を考察することで, 重みつき密度予想がそもそも正しいのかどうか, 正しいとしたらどう精密化できるかといった理解が深まっていくと思われる．

5. 証明の概略

簡単のため, $F=\mathbb{Q}$ の場合に証明の概略を述べる．$r\in\mathbb{N}$, $f\in B_k^*(q)$ に対して $\Pi:=\mathrm{Sym}^r(f)$ とおくと, $Q_\Pi\asymp k^{2\lfloor\frac{r+1}{2}\rfloor}q^r$ である．関数等式の対称性により, ϕ は偶関数であると仮定してよ

い ($\phi(-x)=\phi(x)$). まず $L(s,\Pi)$ に対する Weil の明示公式 "$\sum_{\rho:\ \mathrm{zero}}=\sum_{p:\ \mathrm{prime}}$" を用意する. 正確に書くと,

$$D(\mathrm{Sym}^r(f),\phi)=\widehat{\phi}(0)-\sum_{p\neq q}\sum_{m=1}^{2}\{\sum_{j=0}^{r}(\alpha_p^j\beta_p^{r-j})^m\}\phi\left(\frac{m\log p}{\log Q_\Pi}\right)\frac{\log p}{p^{m/2}\log Q_\Pi}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log Q_\Pi}\right)$$

である. ここで佐武パラメーターのベキ和は f の Fourier 係数を用いて以下のように書ける.

Lemma 5.1. $a'_f(m):=m^{(1-k)/2}a_f(m)$ とおくと $a'_f(p)=\alpha_p+\beta_p$ であるが, この時,

$$\sum_{j=0}^{r}\alpha_p^r\beta_p^{r-j}=a'_f(p^r),\qquad \sum_{j=0}^{r}(\alpha_p^r\beta_p^{r-j})^2=(-1)^r+\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j a'_f(p^{r-j}).$$

したがってあとは

$$\sum_{f\in B_k^*(q)}\frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}a'_f(p^{r-j}),\qquad 0\leqslant j\leqslant r$$

を十分に解析可能な形で表示できれば良いのだが, これは都築と筆者の明示的 Jacquet-Zagier 型跡公式の研究 [39], [40] から分かる.

Theorem 5.2 (明示的 Jacquet-Zagier 型跡公式 [39], [40])**.** $k\geqslant 6$ は偶数とし, $\gcd(n,q)=1$, $2-k/2<\mathrm{Re}(s)<k/2-1$. とする. この時,

$$\Lambda_{k,q}(s,n):=\sum_{f\in B_k(q)}\frac{\widehat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\widehat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}a'_f(n)=\mathbb{J}_{\mathrm{id}}(s)+\mathbb{J}_{\mathrm{unip}}(s)+\mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(s)+\mathbb{J}_{\mathrm{ell}}(s)$$

が成り立つ. ここで右辺の関数たちは幾何的展開から生じる明示的に書ける関数である.

上の公式は n が奇数の時は [39] で証明されており, n が 2 で割り切れる時は [40] の Appendix で証明が与えられている. Jacquet-Zagier 型跡公式において $s=1$ とすると Hecke 作用素 $T(n)$ のトレースに関する $\mathrm{tr}\,T(n)=\cdots$ という公式が得られるが, これは Eichler-Selberg 跡公式と一致する. Jacquet-Zagier 型跡公式の歴史は拙著 [36] に詳しく書いたので参照されたし.
この跡公式により, 以下を得る.

Proposition 5.3. 明示的に与えられる $A>0$ と $\delta>0$ が存在して, 任意の $1/2\leqslant s\leqslant 1$ となる s と任意の異なる 2 つの素数 p,q と任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, 以下の漸近公式が成り立つ.

$$\frac{\Lambda_{k,q}(s,p^n)}{\Lambda_{k,q}(s,1)}=\delta_{n,\mathrm{even}}\,p^{-ns/2}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{s,1/2}\frac{\log p^n}{\log q}\right)+\mathcal{O}\left(p^{nA}q^{-\delta}\right).$$

ここで $\delta_{n,\mathrm{even}}$ は n が偶数の時に 1, n が奇数の時に 0 であり, $\delta_{s,1/2}$ は Kronecker のデルタである.

$s=1/2$ の時だけ $\frac{\log p}{\log q}$ の項が現れるが, この項こそが 1 レベル密度の密度関数に影響を与えているのである. あとは素数に関する和を処理すれば良いが, それには部分和法 (partial summation) を用いて ϕ の積分で書けば良い. 部分和法は Stieltjes 積分による部分積分という説明もでき, 素数定理 (総実代数体 F の場合は Landau の素イデアル定理) を使用する.

Lemma 5.4 (部分和法 (partial summation))**.** $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})\subset[-\alpha,\alpha]$ を仮定する. $Q_\Pi\to\infty$ の時, 以下の漸近公式が成り立つ.

$$\sum_p\widehat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log Q_\Pi}\right)\frac{\log p}{p\log Q_\Pi}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi}(x)dx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log Q_\Pi}\right),$$

$$\sum_p\widehat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log Q_\Pi}\right)\frac{\log p}{p^{1/2}\log Q_\Pi}p^{rA}q^{-\delta}=\mathcal{O}\left(\frac{q^{r\alpha(rA+1/2)-\delta}}{\log Q_\Pi}\right),$$

$$\sum_p \widehat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log Q_\Pi}\right)\frac{(\log p)^2}{p(\log Q_\Pi)^2}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi}(x)|x|dx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log Q_\Pi}\right).$$

この Lemma 5.4 の 2 つ目の漸近式により, 誤差項が $q\to\infty$ で消えるためには $\alpha\leqslant\frac{\delta}{r(rA+1/2)}$ である必要がある. これにより α のサイズが具体的に分かる. また, Lemma 5.4 の 1 つ目と 3 つ目の漸近式は $r=2$ かつ $s=1/2$ の時に用いられる.

6. 展望

筆者が本講演の内容に関する [37] を arXiv に公開したのは 2021 年 1 月のことであり, 2020 年 10 月以降, いくつかの談話会やセミナーなどで講演をおこなった. その後, 2021 年 9 月に Fazzari のプレプリント [7] が arXiv に公開され, そこでは筆者とは独立に重みつき 1 レベル密度に関する予想が提唱されていた. それについて述べる.

Fazzari は重みつき 1 レベル密度 (Weighted one-level density) として, L 関数のベキ乗による重みをつけた密度を考察した. $\mathcal{F}=\cup_X\mathcal{F}_X$ を L 関数の (添え字の) 族とし, 対称タイプが $G=\mathrm{U},\mathrm{Sp},\mathrm{SO(even)}$ のいずれかであると仮定する. この時, $V:\{L(s,\mathcal{A})\}_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}}\to\mathbb{C}$ を

$$V(L(1/2,\mathcal{A}))=\begin{cases}|L(1/2,\mathcal{A})|^2 & G=\mathrm{U}\\ L(1/2,\mathcal{A}) & G=\mathrm{Sp},\mathrm{SO(even)}\end{cases}$$

と定める.

Conjecture 6.1 (Fazzari 予想)**.** 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して明示的な関数 $W_G^k(x)$ が存在して, 任意の良い関数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ に対して, $X\to\infty$ の時,

$$\frac{1}{\sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_X}V(L(1/2,\mathcal{A}))^k}\sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_X}V(L(1/2,\mathcal{A}))^kD(\mathcal{A},\phi)=\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W_G^k(x)dx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log X}\right).$$

ここで良い関数とは, 偶関数であって $|\mathrm{Im}(x)|<2$ 上正則に解析接続できて, $\phi(x)\ll\frac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たす $\mathbb{R}$ 上実数値であるような関数である.

Theorem 6.2 ([7])**.** GRH と the Ratios Conjecture を仮定すると, 以下の族に対しては Fazzari の予想は正しい.

(1) $\{\zeta(s+ia)\}_{a\in\mathbb{R}}$ $(k=1,2)\rightsquigarrow W_{\mathrm{U}}^k(x)$,
(2) $\{L(s,\chi_D)\}_{D\leqslant X}$ $(k=1,2,3,4)\rightsquigarrow W_{\mathrm{Sp}}^k(x)$,
(3) $\{L(s,\Delta\otimes\chi_D)\}_{D\leqslant X}$ $(k=1,2,3,4)\rightsquigarrow W_{\mathrm{SO(even)}}^k(x)$.

Fazzari は密度関数の明示式も与えている. ユニタリー型の時は,

$$W_{\mathrm{U}}^0(x)=W(\mathrm{U})(x)=1,\qquad W_{\mathrm{U}}^1(x)=1-\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}=W(\mathrm{GUE})(x),$$
$$W_{\mathrm{U}}^2(x)=1-\frac{2+\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2}+\frac{3\sin(2\pi x)}{(\pi x)^3}+\frac{3(\cos(2\pi x)-1)}{2(\pi x)^4}$$

である. シンプレクティック型の時は,

$$W_{\mathrm{Sp}}^0(x)=W(\mathrm{Sp})(x)=1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x},\qquad W_{\mathrm{Sp}}^1(x)=1+\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}-\frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2},$$
$$W_{\mathrm{Sp}}^2(x)=1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}-\frac{24(1-\sin^2(\pi x))}{(2\pi x)^2}+\frac{48\sin(2\pi x)}{(2\pi x)^3}-\frac{96\sin^2(\pi x)}{(2\pi x)^4}$$

である ($W_{\mathrm{Sp}}^3(x)$ と $W_{\mathrm{Sp}}^4(x)$ は式が長いので省略する). 直交型 (SO(even)) の時は, $W_{\mathrm{SO(even)}}^k(x)=W_{\mathrm{Sp}}^{k-1}(x)$ $(k=1,2,3,4)$ である. 一般の k についても $W_{\mathrm{U}}^k(x)$, $W_{\mathrm{Sp}}^k(x)$, $W_{\mathrm{SO(even)}}^k(x)$ の明示式が予想されている.

我々の重みつき密度も $r=2,s=1/2$ の時には Fazzari の重みつき 1 レベル密度と同じ設定だが, 密度関数を比較すると次のようになる.

Proposition 6.3 (Coincidence)**.** Theorem 4.3 の $W'(x)$ は $W^1_{\mathrm{Sp}}(x)$ に等しい.

つまり, 我々の対称 2 次 L 関数の場合の密度関数は Fazzari の予想の傍証であり, Fazzari と違って我々の場合は unconditional な結果を与えている.

最後に, 2022 年 1 月上旬に arXiv に公開した筆者と Ade Irma Suriajaya (九州大学) との共同研究 [38] について紹介し, Fazzari 予想と筆者の重みつき密度予想の新たな例を見つけたことを報告しておく. Hughes, Rudnick [14] の結果によれば, $\{L(s,\chi) \mid \chi \neq \mathbf{1}_q, \bmod q\}_q$ の対称タイプは U であったことを思い出す.

Theorem 6.4 ([38])**.** $1/2 \leqslant s < 1$ とする. この時, $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset [-2s/3, 2s/3]$ を満たすような任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, 素数 q を $q \to \infty$ と動かす時, 以下が成り立つ.

$$\frac{1}{\sum_{\chi \neq \mathbf{1} \bmod q} |L(s,\chi)|^2} \sum_{\chi \neq \mathbf{1} \bmod q} |L(s,\chi)|^2 D(\chi,\phi) \to \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W(\mathrm{U})(x)dx & (1/2 < s < 1), \\ \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W(\mathrm{GUE})(x)dx & (s = 1/2). \end{cases}$$

ここで $W(\mathrm{GUE})$ は GUE に属するランダム Hermite 行列の固有値の相関関係関数であり, Montgomery-Odlyzko の法則に出てきた密度関数でもある.

ここで $W(\mathrm{GUE})(x) = W^1_{\mathrm{U}}(x)$ に注意すると, 上の定理は Fazzari の予想と筆者の予想の両方を支持する unconditional な傍証になっている. この研究の詳細はどこかの研究集会で述べることにしたい.

Acknowledgements

講演および本記事の執筆の機会を与えて下さった世話人の森本和樹氏 (神戸大学), 宮崎直氏 (北里大学) にはこの場を借りて感謝いたします. 研究集会は社会情勢の急な変化に伴い, ハイブリッド開催から完全オンライン開催に変更になりましたので, スケジュールの管理は大変であったと推察します.

また本研究は JSPS 科研費 20K14298(若手研究) の助成を受けております.

References

[1] L. Alpoge, N. Amersi, G. Iyer, O. Lazarev, S. J. Miller, L. Zhang, *Maass waveforms and low-lying zeros*, Analytic number theory, 19–55, Springer, Cham, 2015.

[2] L. Alpoge, S. J. Miller, *Low-lying zeros of Maass form L-functions*, Int. Math. Res. Not. **2015**, No. 10, (2015), 2678–2701.

[3] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, *The Sato-Tate conjecture for Hilbert modular forms*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 2, 411–469.

[4] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, R. Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 1, 29–98.

[5] J. Cogdell, P. Michel, *On the complex moments of symmetric power L-functions at $s = 1$*, Int. Math. Res. Not. **2004**, No. 31, (2004), 1561–1617.

[6] M. Dickson, *Local spectral equidistribution for degree two Siegel modular forms in level and weight aspects*, Int. J. Number Theory **11** (2015), 341–396.

[7] A. Fazzari, *A weighted one-level density of families of L-functions*, preprint, arXiv:2109.07244 [math.NT].

[8] M. Furusawa, K. Morimoto, *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer's conjecture*, J. Eur. Math. Soc. **23**, Issue 4, (2021), 1295–1331.

[9] T. Gee, *The Sato-Tate conjecture for modular forms of weight 3*, Doc. Math. **14** (2009), 771–800.

[10] S. Gelbart, H. Jacquet, A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3), Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 471–542.

[11] D. Goldfeld, A. Kontorovich, *On the* GL(3) *Kuznetsov formula with applications to symmetry types of families of L-functions*, Automorphic representations and L-functions, 263–310, Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math., 22, Tata Inst. Fund. Res. Mumbai, 2013.

[12] A. M. Güloğlu, *Low-lying zeroes of symmetric power L-functions*, Int. Math. Res. Not. **2005**, No. 9, (2005), 517–550.

[13] M. Harris, N. Shepherd-Barron, R. Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*, Ann. Math. (2) **171** (2010), no. 2, 779–813.

[14] C.P. Hughes, Z. Rudnick, *Linear statistics of low-lying zeros of L-functions*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 3, 309–333.

[15] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[16] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. tome **91** (2000), 55–131 (2001).

[17] N. M. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 45. American Mathematical Society, Providence (1999).

[18] N. M. Katz, P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** no. 1, (1999), 1–26.

[19] H. H. Kim, *Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 139–183, With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.

[20] H. H. Kim, F. Shahidi, *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and the symmetric cube for* GL_2, Ann. Math. (2) **155** (2002), no 3, 837–893, With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart.

[21] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for* GSp_4 *and its applications*, J. Inst. Math. Jussieu **19** (2020), 351–419.

[22] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for GSp_4; Hecke fields and n-level density*, Math. Z. **295** (2020), 917–943.

[23] H.H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel cusp forms of general degree: the level aspect*, preprint, arXiv:2106.07811 [math.NT].

[24] A. Knightly, C. Reno, *Weighted distribution of low-lying zeros of* $\mathrm{GL}(2)$ *L-functions*, Canad. J. Math. **71** (1), (2019), 153–182.

[25] E. Kowalski, A. Saha, J. Tsimerman, *Local spectral equidistribution for Siegel modular forms and applications*, Compos. Math. **148** (2012), 335–384.

[26] S.-C. Liu, S. J. Miller, *Low-lying zeros for L-functions associated to Hilbert modular forms of large level*, Acta Arith. 180.3 (2017), 251–266.

[27] J. Matz, N. Templier, *Sato-Tate equidistribution for families of Hecke-Maass forms on* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$, Algebra Number Theory. **15** no.6 (2021), 1343–1428.

[28] J. ノイキルヒ 著, 足立 恒雄 監修, 梅垣 敦紀 訳, 代数的整数論, シュプリンガー・ジャパン, 2003.

[29] J. Newton, J. A. Thorne, *Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **134** (2021), 1–116.

[30] J. Newton, J. A. Thorne, *Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms, II*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **134** (2021), 117–152.

[31] P. Ramacher, S. Wakatsuki, *Asymptotics for Hecke eigenvalues of automorphic forms on compact arithmetic quotients*, Adv. Math. **404** (2022), Paper Number 108372, 47 pp.

[32] G. Ricotta, E. Royer, *Statistics for low-lying zeros of symmetric power L-functions in the level aspect*, Forum Math. **23** (2011), 969–1028.

[33] M. Rubinstein, *Low-lying zeros of L-functions and random matrix theory*, Duke Math. J. **109** (2001), 147–181.

[34] P. Sarnak, S. W. Shin, N. Templier, *Families of automorphic forms and the trace formula*, 531–578, Simons Symp., Springer, [Cham], 2016.

[35] S. W. Shin, N. Templier, *Sato-Tate theorem for families and low-lying zeros of automorphic L-functions*, Invent. Math. **203** (2016) no. 1, 1–177. With appendices by Robert Kottwitz [A] and by Raf Cluckers, Julia Gordon, and Immanuel Halupczok [B].

[36] 杉山真吾, Hilbert モジュラー形式に対する Jacquet-Zagier 型の跡公式, 第 11 回福岡数論研究集会報告集, (2018), 57–69.

[37] S. Sugiyama, *Low-lying zeros of symmetric power L-functions weighted by symmetric square L-values*, preprint, arXiv:2101.06705 [math.NT].

[38] S. Sugiyama, A. I. Suriajaya, *Weighted one-level density of low-lying zeros of Dirichlet L-functions*, to appear in Res. Number Theory, arXiv:2201.00326 [math.NT].

[39] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. **275**, Issue 11, (2018), 2978–3064.

[40] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *Quantitative non-vanishing of central values of certain L-functions on* $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(3)$, Math. Z., **301** (2022), 1447–1479.