Inner product formula for Shintani lift

大阪公立大学数学研究所 / 源嶋 孝太 (Gejima, Kohta)

概要

Shintani はあるテータ核を用いた積分として重さ整数のモジュラー形式から重さ半整数のモジュラー形式へのリフティングを構成した. また, Gross–Kohnen–Zagier はある正則な核関数を構成し, 新谷リフトを重さ整数のモジュラー形式と重さ整数のヤコビ形式の間のリフティングとして再定式化した. 本稿では新谷リフトをアデール群上の保型形式の言葉で再定式化し, その応用として Rallis の内積公式を明示的に計算することで新谷リフトのノルムがある保型 L-関数の特殊値で表されることを示す. 証明については技術的な計算を避け, 概略を述べるに留める. 本稿は 2022 年 1 月 24 日に行われた研究集会「保型形式, 保型 L 関数とその周辺」における筆者の講演を基に作成されたものである. 本研究は京都産業大学の村瀬篤氏との共同研究に基づく.

1　準備

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathbf{G}$ に対して $\mathbf{G}_v = \mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$ とおく. $\mathfrak{H}$ を上半平面とする. すなわち

$$\mathfrak{H} = \{x + iy \,|\, x \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

$e(z) = e^{2\pi i z}$ とおく. $\overrightarrow{\mathbb{Q}^n} = \{(x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}^n = \{{}^t(x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ とおく.

1.1　ヤコビ群

$G = SL_2$ とおき, N をハイゼンベルグ群とする. すなわち $N(\mathbb{Q}) = \overrightarrow{\mathbb{Q}^2} \times \mathbb{Q}$ の積は

$$(u, t)(u', t') = (u + u', t + t' + u_1 u_2' - u_2 u_1'), \quad u = (u_1, u_2), u' = (u_1', u_2') \in \overrightarrow{\mathbb{Q}^2}, \quad t, t' \in \mathbb{Q}$$

で与えられる. このとき $g \in G$ は $(u, t) \in N$ に $(u, t)g = (ug, t)$ により作用する. 半直積群 $N \rtimes G$ を G^J と表し, ヤコビ群と呼ぶ.

G^J_∞ は $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ に

$$((u, v), t)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\tau, w) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{w}{c\tau + d} + u\frac{a\tau + b}{c\tau + d} + v\right)$$

で作用する.

1.2　直交群

$\mathbb{Q}^3$ 上の二次形式 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} & & -4 \\ & 2 & \\ -4 & & \end{pmatrix},$$

により定め, $(\mathbb{Q}^3, Q)$ の直交群を $H' = O(Q)$ とおく. $H = GL_2(\mathbb{Q})$ とおき, 準同型写像 $\rho : H \to H'$ を

$$\rho(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad+bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

と定める. このとき $\ker\rho = \mathcal{Z}$ である. ここで $\mathcal{Z}$ は H の中心である.

$\mathbb{Q}^6$ 上の二次形式 Q^* を

$$Q^* = \begin{pmatrix} & 2Q \\ 2Q & \end{pmatrix}.$$

により定め, $(\mathbb{Q}^6, Q^*)$ の直交群を $H^* = O(Q^*)$ とおく. 準同型写像 $\rho^* : H \times H \to H^*$ を

$$\rho^*(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho(h_1)+\rho(h_2) & \rho(h_1)-\rho(h_2) \\ \rho(h_1)-\rho(h_2) & \rho(h_1)+\rho(h_2) \end{pmatrix}$$

により定める.

$P^* = N^*M^*$ を H^* の極大放物型部分群 P^* の Levi 分解とする. ここで N^*, M^* はそれぞれ

$$N^* = \left\{ n^*(\beta) = \begin{pmatrix} I_3 & \beta \\ & I_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathrm{M}_3, Q\beta + {}^t\beta Q = 0 \right\},$$
$$M^* = \left\{ m^*(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & Q^{-1}\,{}^t\alpha^{-1}Q \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in GL_3 \right\}$$

である. このとき岩澤分解 $H^*(\mathbb{A}) = P^*(\mathbb{A})U^*$ が成り立つ. すなわち, 任意の $h^* \in H^*(\mathbb{A})$ は

$$h^* = n^*(\beta(h^*))m^*(\alpha(h^*))u^*, \quad (\beta(h^*), \alpha(h^*), u^*) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{A}) \times GL_3(\mathbb{A}) \times U^*$$

と表される. ここで $U^* = \prod_v U_v^*$ であり, U_v^* は $H^*(\mathbb{Q}_v)$ の極大コンパクト部分群である.

1.3　保型形式

関数 $j : GL_2(\mathbb{R})^+ \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ を

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau) = (ad-bc)^{-1/2}(c\tau + d)$$

と定める. 任意の上半平面の点 $\tau = x + iy \in \mathfrak{H}$ に対して

$$g_\tau = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ & y^{-1/2} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

とおく.

正の偶数 $k > 0$ に対して次の条件 (1), (2), (3) をみたす $GL_2(\mathbb{A})$ 上のなめらかな関数 f を重さ k の楕円カスプ形式と呼ぶ. 重さ k の楕円カスプ形式の集合を S_k と表す:

(1) $f(z\gamma g) = f(g), \quad (\gamma, z, g) \in GL_2(\mathbb{Q}) \times \mathcal{Z}(\mathbb{A}) \times GL_2(\mathbb{A})$,

(2) $f(gu_f u_\infty) = j(u_\infty, i)^{-k} f(g), \quad (g, u_\mathrm{f}, u_\infty) \in GL_2(\mathbb{A}) \times U_\mathrm{f} \times U_\infty$,

(3) $f_{\mathrm{dm}}(\tau) = j(g_\tau, i)^k f(g_\tau)$ とおいたとき, $f_{\mathrm{dm}}(\tau)$ は

$$f_{\mathrm{dm}}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e(n\tau), \qquad a_f(n) \in \mathbb{C}$$

と展開される.

ここで $U_p = GL_2(\mathbb{Z}_p)$ ($p < \infty$ は素数), $U_\mathrm{f} = \prod_{p<\infty} U_p$, $U_\infty = SO_2(\mathbb{R})$ である.

関数 $j_{l,1} : G^J(\mathbb{R}) \times (\mathfrak{H} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{aligned} &j_{l,1}\left(((u,v),t)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (\tau, w)\right) \\ &\qquad = (c\tau + d)^l e\left(-\left\{t + uv + u^2 \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + 2u\frac{w}{c\tau + d} - \frac{cw^2}{c\tau + d}\right\}\right) \end{aligned}$$

で定める.

正の偶数 $l > 0$ に対して次の条件 (1), (2), (3) をみたす $G^J(\mathbb{Q})\backslash G^J(\mathbb{A})$ 上のなめらかな関数 ϕ を重さ l, 指数 1 のヤコビカスプ形式という. 重さ l, 指数 1 のヤコビカスプ形式の空間を $\mathrm{J}_{l,1}^{cusp}$ と表す:

(1) $\phi((0,0,t) g k_\mathrm{f} k_\infty) = \psi(t) j_{l,1}(k_\infty, (i,0))^{-1} \phi(g)$,
$${}^\forall(t, g, k_\mathrm{f}, k_\infty) \in \mathbb{A} \times G^J(\mathbb{A}) \times K_\mathrm{f} \times K_\infty.$$

(2) $\phi_{\mathrm{dm}}(\tau, w) = j_{l,1}(g_{(\tau,w)}, (i,0))^{-1} \phi(g_{(\tau,w)})$ とおくとき, ϕ_{dm} は $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ 上正則である. ここで $g_{(\tau,w)}$ は $(\tau, w) = g_{(\tau,w)} \cdot (i, 0)$ をみたすような $G^J(\mathbb{R})$ の要素である.

(3) ϕ_{dm} は

$$\phi_{\mathrm{dm}}(\tau, w) = \sum_{n,r \in \mathbb{Z}, 4n - r^2 > 0} c_\phi(n, r) e(n\tau + rw)$$

と展開される.

ここで $K_p = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ ($p < \infty$ は素数), $K_\mathrm{f} = \prod_{p<\infty} K_p$, $K_\infty = SO_2(\mathbb{R})$ である.

1.4 メタプレクティック表現

$\psi = \otimes_v' \psi_v$ を $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の非自明な標準加法指標とする. すなわち, ψ_v はそれぞれ次のように定義される:

- $\psi_\infty(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{R}$,
- $\psi_p(x) = e^{-2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{Z}[p^{-1}] \qquad$ (p は素数).

v を $\mathbb{Q}$ の素点とする. このとき $H'(\mathbb{Q}_v) \times G^J(\mathbb{Q}_v)$ の表現 $(\omega_v, \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^3 \times \mathbb{Q}_v))$ で次のようなものが存在する: 任意の $\phi(X,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^3 \times \mathbb{Q}_v)$ に対して

(1) $\omega_v(h, I_2)\phi(X,\xi) = \phi(h^{-1}X,\xi)$,
(2) $\omega_v(I_3, d(a))\phi(X,\xi) = (-1,a)_v|a|_v^2\phi(aX, a\xi), \quad a \in \mathbb{Q}_v^\times$,
(3) $\omega_v(I_3, n(b))\phi(X,\xi) = \psi\left(\frac{b}{2}({}^tXQX + 2\xi^2)\right)\phi(X,\xi), \quad b \in \mathbb{Q}_v$,
(4) $\omega_v(I_3, w)\phi(X,\xi) = \gamma_v(2)^2|2|_v^3 \int_{\mathbb{Q}_v^3} dY \int_{\mathbb{Q}_v} \psi\left({}^tXQY + 2\xi\eta\right)\phi(Y,\eta)\, d\eta$,
(5) $\omega(I_3, (u,v,t))\phi(X,\xi) = \psi(2v\xi + uv + t)\phi(X, \xi + u), \quad u, v, t \in \mathbb{Q}_v$.

ここで $a \in \mathbb{Q}_v^\times$, $b \in \mathbb{Q}_v$ に対して

$$d(a) = \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad n(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

であり, $d_\psi x$ を $(x,y) \mapsto \psi(xy)$ に関する自己双対測度とするとき, $\gamma_v(2)$ は等式

$$\int_{\mathbb{Q}_v} f(x)\psi\left(x^2\right) d_\psi x = \gamma_v(2)|2|_v^{-1/2} \int_{\mathbb{Q}_v} \psi\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left(\int_{\mathbb{Q}_v} \psi(xy)f(y)\, d_\psi y\right) d_\psi x$$

で定義される定数である.

同様に $H^*(\mathbb{Q}_v) \times G^J(\mathbb{Q}_v)$ の表現 $(\Omega_v, \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^6 \times \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v))$ で次のようなものが存在する: 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^6 \times \mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v)$ に対して

(1) $\Omega_v(h, I_2)\Phi(X,\xi_1,\xi_2) = \Phi(h^{-1}X,\xi_1,\xi_2)$,
(2) $\Omega_v(I_6, d(a))\Phi(X,\xi_1,\xi_2) = |a|_v^4\Phi(aX, a\xi_1, a\xi_2) \quad a \in \mathbb{Q}_v^\times$,
(3) $\Omega_v(I_6, n(b))\Phi(X,\xi_1,\xi_2) = \psi\left(\frac{b}{2}\left({}^tXQ^*X + 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2\right)\right)\Phi(X,\xi_1,\xi_2) \quad b \in \mathbb{Q}_v$,
(4) $\Omega_v(I_6, w)\Phi(X,\xi_1,\xi_2)$
$= |2|_v^9 \int_{\mathbb{Q}_v^6} dY \int_{\mathbb{Q}_v} d\eta_1 \int_{\mathbb{Q}_v} \psi\left({}^tXQ^*Y + 2\xi_1\eta_1 - 2\xi_2\eta_2\right)\Phi(Y,\eta_1,\eta_2)\, d\eta_2$,
(5) $\Omega_v(I_6, (u,v,t))\Phi(X,\xi_1,\xi_2) = \psi(2v(\xi_1 - \xi_2))\Phi(X, \xi_1 + u, \xi_2 + u), \quad u, v, t \in \mathbb{Q}_v$.

各 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A})$ に対して, 関数 $\iota(\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^6 \times \mathbb{A} \times \mathbb{A})$ を

$$\iota(\phi_1,\phi_2)({}^t(X_1,X_2),\xi_1,\xi_2) = \phi_1(X_1 + X_2, \xi_1)\overline{\phi_2(X_1 - X_2, \xi_2)}$$

により定める. このとき

$$\Omega(\rho^*(h_1,h_2), g)\iota(\phi_1,\phi_2) = \iota(\omega(\rho(h_1),g)\phi_1, \omega(\rho(h_2),g)\phi_2), \quad h_1, h_2 \in H(\mathbb{A}), g \in G^J(\mathbb{A})$$

が成り立つ.

2 テータリフト

アデール群上の新谷リフトの定式化を行う. まずは新谷リフトを構成するためのテスト関数を与える. 不分岐素点を除くと, 一般にテータリフトのテスト関数の構成は難しい. 我々の結果において本質的に新しい部分は $p=2$ おけるテスト関数の取り方である. 無限素点におけるテスト関数の構成については Shintani [1] に従う. その後, テータ核を構成し, アデール群上のテータリフトとして新谷リフトを定式化する.

2.1 テスト関数

関数 $\phi_0 = \otimes'_v \phi_{0,v} \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A})$ を次のように定める:

- $(v=\infty)$

  $$\phi_{0,\infty}(X,\xi) = (x_1 - ix_2 - x_3)^{l-1} e\left(\tfrac{i}{2}{}^t XRX + i\xi^2\right), \quad X = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \xi \in \mathbb{R}.$$

  ここで $R = \mathrm{diag}(4,2,4)$ である.
- $(v=p>2)$ $\phi_{0,p}$ は $\mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p$ の特性関数.
- $(v=2)$

  $$\begin{aligned}\phi_{0,2} = &\{\sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 - \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0\} \otimes \sigma_0 \\ &+ \{(\sigma_1 - \sigma_3) \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_1 - \sigma_3 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_3 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes (\sigma_1 - \sigma_3)\} \otimes \sigma_2.\end{aligned}$$

  ここで $j=0,1,2,3$ に対して σ_j は $4^{-1}j + \mathbb{Z}_2$ の特性関数である.

このとき, 各 $\phi_{0,v}$ について次が成り立つ.

命題 2.1.1.

(1) $(u_\infty, k_\infty) \in U_\infty \times K_\infty$ に対して

$$\omega(\rho(u_\infty), k_\infty)\phi_{0,\infty} = j(u_\infty, i)^{2l-2} j_{l,1}(k_\infty, (i,0))^{-1} \phi_{0,\infty}.$$

(2) $(u_p, k_p) \in U_p \times K_p$ に対して $\omega(\rho(u_p), k_p)\phi_{0,p} = \varepsilon_p(\det u_p)\phi_{0,p}$.

ここで ε_p はガウス数体 $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ に対応する $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の 2 次指標 ε の $\mathbb{Q}_p^\times$ への制限である. 特に素数 $p>2$ に対しては $\varepsilon_p|_{\mathbb{Z}_p^\times} = 1$ であり, $p=2$ に対しては

$$\varepsilon_2(a) = \begin{cases} 1 & (a \equiv 1 \bmod 4\mathbb{Z}_2) \\ -1 & (a \equiv 3 \bmod 4\mathbb{Z}_2) \end{cases}$$

であることに注意する.

我々の結果において本質的に新しい部分は $p=2$ に対するテスト関数の取り方である. そこで $p=2$ の場合に, 命題 2.1.1 (2) の証明についてもう少し述べたい.

関数 $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_2^3)$ を

$$\Psi_1 = \sigma_0 \otimes \sigma_0 \otimes (\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 - \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_0,$$
$$\Psi_2 = (\sigma_1 - \sigma_3) \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_1 - \sigma_3 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_3 + \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes (\sigma_1 - \sigma_3)$$

と定める. このとき次を確かめればよい.

補題 2.1.2. (1) $\omega(I_3, d(a))\phi_{0,2} = \phi_{0,2}, \quad a \in \mathbb{Z}_2^\times$.

(2) $\omega(I_3, n(b))\phi_{0,2} = \phi_{0,2}, \quad b \in \mathbb{Z}_2$.

(3) $\omega(I_3, w)\phi_{0,2} = \phi_{0,2}$.

(4) $\omega(I_3, (u,v,t))\phi_{0,2} = \phi_{0,2}, \quad (u,v,t) \in N(\mathbb{Z}_2)$.

(5) 各 $i = 1, 2$ について $\Psi_i(\rho(u)X) = \varepsilon(\det u)\Psi_i(X), \quad u \in U_2$.

ここでは (1), (2) だけ証明する.

Proof. (1) $a \in \mathbb{Z}_2^\times$ とする. このとき

$$\omega_2(I_3, d(a))\phi_{0,2} = (a, -1)_2 \{\Psi_1(aX)\sigma_0(\xi) + \Psi_2(aX)\sigma_2(\xi)\}$$

が成り立つ. したがって $\Psi_i(aX) = (a, -1)_2\Psi_i(X)$, $i = 1, 2$ が成り立つことを示せば十分である. これは次からわかる:

- $a \equiv 1 \bmod 4\mathbb{Z}_2$ のとき
$$\sigma_i(ax) = \sigma_i(x), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$
- $a \equiv 3 \bmod 4\mathbb{Z}_2$ のとき
$$\sigma_0(ax) = \sigma_0(x), \quad \sigma_1(ax) = \sigma_3(x), \quad \sigma_2(ax) = \sigma_2(x), \quad \sigma_3(ax) = \sigma_1(x).$$

(2) $b \in \mathbb{Z}_2$ とする. このとき

$$\omega_2(I_3, n(b))\phi_{0,2} = \psi_0\left(b(-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2)\right)\phi_{0,2}, \quad X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$$

が成り立つ. あとはすべての項について

$$\psi_0\left(b(-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2)\right) = 1$$

が成り立つことを確かめればよい. 各 $a, c = 0, 1, 2, 3$, $b = 0, 1$ に対して

$$\Lambda(a, b, c) = (4^{-1}a, 2^{-1}b, 4^{-1}c) + \mathbb{Z}_2^3$$

とおくと, 例えば $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda(1, 1, 1), \xi \in \mathbb{Z}_2$ のとき

$$-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2 \in -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2^2} + \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$$

なので $\psi_0\left(b(-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2)\right) = 1$ である. 同様に, $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda(1, 1, 2), \xi \in 2^{-1} + \mathbb{Z}_2$ のとき

$$-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2 \in -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$$

なので $\psi_0\left(b(-4x_1x_3 + x_2^2 + \xi^2)\right) = 1$ である. $\square$

2.2　テータ核

関数 $\theta : H(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$\theta(h,g) = \theta(h,g;\phi_0) = \sum_{(X,\xi)\in\mathbb{Q}^3\times\mathbb{Q}} \varepsilon(\det(h))\omega(\rho(h),g)\phi_0(X,\xi), \quad {}^{\forall}(h,g) \in H(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})$$

と定める. ここで ε はガウス数体 $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ に対応する $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の 2 次指標である.

命題 2.2.1. $(h,g) \in H(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A})$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $(u_\infty, u_{\mathrm{f}}) \in U_\infty \times U_{\mathrm{f}}$ と任意の $(k_\infty, k_{\mathrm{f}}) \in K_\infty \times K_{\mathrm{f}}$ に対して

$$\theta(hu_\infty u_{\mathrm{f}}, gk_\infty k_{\mathrm{f}}) = j(u_\infty, i)^{2l-2} j(k_\infty, i)^{-l}\theta(h,g)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $(\gamma', z, \gamma) \in H(\mathbb{Q}) \times \mathcal{Z}(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{Q})$ に対して

$$\theta(\gamma' zh, \gamma g) = \theta(h,g)$$

が成り立つ.

2.3　テータリフト

各 $f \in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対して

$$\mathcal{L}_f^*(g) = \int_{\mathcal{Z}(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})} f(h)\theta(h,g)\, dh, \qquad g \in G(\mathbb{A}).$$

とおく. このとき

$$\mathcal{L}_f^*(\gamma g k_\infty k_{\mathrm{f}}) = j(k_\infty, i)^{-l}\mathcal{L}_f^*(g), \quad (\gamma, g, k_\infty, k_{\mathrm{f}}) \in G(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{A}) \times K_\infty \times K_{\mathrm{f}}$$

が成り立つ.

$\mathcal{L}_f^*$ のフーリエ展開を述べるためにいくつか記号を導入する. L, L^* を

$$L = \mathbb{Z}^3, \quad L^* = 4^{-1}\mathbb{Z} \times 2^{-1}\mathbb{Z} \times 4^{-1}\mathbb{Z}$$

と定める. このとき

$$L^* = \bigsqcup_{\substack{a,c\,\in\,\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ b\,\in\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}} \Lambda(a,b,c), \qquad \Lambda(a,b,c) = (4^{-1}a, 2^{-1}b, 4^{-1}c) + L$$

が成り立つ. 各 $X \in \Lambda(a,b,c)$ に対して

$$\epsilon(X) = \begin{cases} (-1)^{(a-1)/2} & (a \text{ が奇数かつ } b^2 - ac \equiv 0, -1 \bmod 4) \\ (-1)^{(c-1)/2} & (c \text{ が奇数かつ } b^2 - ac \equiv 0, -1 \bmod 4) \\ 0 & (\text{ それ以外 }) \end{cases}$$

とおくと, ϵ は L^* 上の関数 $\epsilon : L^* \to \{-1,0,1\}$ を定める. $d_Q(X) = x_2^2 - 4x_1x_3 > 0$ をみたすような $X = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Q}^3$ に対して $\rho(g_X)X = {}^t(0, \sqrt{d_Q(X)}, 0)$ をみたすように $g_X \in G(\mathbb{R})$ をとる. $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ とおく. $d_Q(X) > 0$ かつ $d_Q(X) \notin (\mathbb{Q}^\times)^2$ ならば $\Gamma_X/\{\pm 1\}$ は無限巡回群であり, $\Gamma_X/\{\pm 1\}$ の生成元として $g_X s_X g_X^{-1} = \mathrm{diag}(t_0, t_0^{-1})$, $0 < t_0 < 1$ をみたすような s_X をとることができる. そこで曲線 $C(X)$ を次のようにとる:

$$C(X) = \begin{cases} g_X^{-1}\infty \text{ から } g_X^{-1}0 \text{ への } \mathfrak{H} \text{ 内の測地線} & (d_X \in (\mathbb{Q}^\times)^2) \\ \text{任意の } \tau \in \mathfrak{H} \text{ から } s_X\tau \text{ への } \mathfrak{H} \text{ 内の (有限長の) 曲線} & (d_X \notin (\mathbb{Q}^\times)^2) \end{cases}$$

Shintani [1] と同様にして次が示される.

定理 2.3.1 (G.–Murase('21))**.** 任意の $f \in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対して $\mathcal{L}^*(f)_{\mathrm{dm}}(\tau, w)$ は Fourier 展開

$$\mathcal{L}^*(f)_{\mathrm{dm}}(\tau, w) = \sum_{\substack{n, r \in \mathbb{Z} \\ 4n - r^2 > 0}} C_f(n,r)\, e(n\tau + rw)$$

を持つ. ここで $X = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, 二次形式 $X(s,t)$ を

$$X(s,t) = x_1 s^2 + x_2 st + x_3 t^2$$

と定めるとき, $C_f(n,r)$ は

$$C_f(n,r) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\{X\} \in SL_2(\mathbb{Z})\backslash L^* \\ d_Q(X) = n - \frac{r^2}{4}}} \epsilon(X) \int_{C(X)} f(\tau) X(1, -\tau)^{l-2} d\tau$$

で与えられる.

系 2.3.2. 任意の $f \in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対して $\mathcal{L}_f^* \in \mathrm{J}_l^{cusp}$ が成り立つ.

3 内積公式

ここでは主結果である新谷リフトの内積公式の証明の概略を述べる.

3.1 主結果

正規化された Hecke 固有形式 $f \in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対して

$$L(s, f, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f(n)\varepsilon(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > l)$$

とおく. ここで $a_f(n)$ は f_{dm} の n 番目の Fourier 係数である. このとき $L(s,f,\varepsilon)$ は全 s-平面上の有理型関数に解析接続される. 特に $s = l-1$ において正則であることが知られている. また, $L(s,f,\varepsilon)$ は Euler 積表示

$$L(s, f, \varepsilon) = \prod_{p:\text{素数}} L_p(s, f, \varepsilon),$$

$$L_p(s,f,\varepsilon)=\begin{cases}(1-a_f(p)\varepsilon(p)p^{-s}+p^{2l-3}p^{-2s})^{-1} & (p>2)\\ 1 & (p=2)\end{cases}$$

を持つことが知られている.

定理 3.1.1 (G.–Murase ('21))**.** 正規化された Hecke 固有形式 $f\in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対して

$$\|\mathcal{L}_f^*\|^2=2^{-2l}\pi^{1-l}(l-2)!\cdot\|f\|^2\cdot L(l-1,f,\chi).$$

特に $\mathcal{L}_f^*\neq 0$ である必要十分条件は $L(l-1,f,\chi)\neq 0$ である.

3.2 Eisenstein 級数

$\Psi_0=\iota(\phi_0,\phi_0)\in\mathcal{S}(\mathbb{A}^6\times\mathbb{A}\times\mathbb{A})$ とおき, $H^*(\mathbb{A})\times G^J(\mathbb{A})$ 上の関数 $\Theta^J(h^*,g)$ を

$$\Theta^J(h^*,g)=\sum_{\substack{X\in\mathbb{Q}^6\\ \xi_1,\xi_2\in\mathbb{Q}}}(\Omega(h^*,g)\Psi_0)(X,\xi_1,\xi_2)$$

により定める.

補題 3.2.1. $\Theta^J(\rho^*(h_1,h_2),g)\varepsilon(\det h_1)\varepsilon(\det h_2)=\theta(h_1,g)\overline{\theta(h_2,g)}$.

関数 $\phi:H^*(\mathbb{A})\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$\phi(h^*,s)=|\det\alpha(h^*)|^s(\mathcal{I}\circ\Omega(h^*,I_2)\Psi_0)(0),\quad (h^*,s)\in H^*(\mathbb{A})\times\mathbb{C}$$

で定める. ここで $\mathcal{I}:\mathcal{S}(\mathbb{A}^6\times\mathbb{A}\times\mathbb{A})\to\mathcal{S}(\mathbb{A}^6)$ は

$$(\mathcal{I}\Psi^J)(X)=\int_{\mathbb{A}}\Psi^J(X,y,y)\,dy$$

によって定義される. このとき $H^*(\mathbb{A})$ 上の Eisenstein 級数 $E(h^*,s)$ を

$$E(h^*,s)=\sum_{\gamma\in P^*(\mathbb{Q})\backslash H^*(\mathbb{Q})}\phi(\gamma h^*,s)\quad(\mathrm{Re}(s)\gg 0)$$

により定める. よく知られているように $E(h^*,s)$ は全 s-平面上の有理型関数として解析接続される. 特に $E(h^*,s)$ は $s=0$ で正則であることが知られている.

主結果の証明には次の “Siegel–Weil の公式” が重要な役割を果たす.

補題 3.2.2.

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})}\left(\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})}\Theta^J(h^*,ng)\,dn\right)dg=\frac{\pi}{6}E(h^*,s)|_{s=0}.$$

Proof. 関数

$$H^*(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})\to\mathbb{C},\quad (h^*,g)\mapsto\int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})}\Theta^J(h^*,ng)\,dn$$

が簡約対 $(O_{3,3}, SL_2)$ のテータ関数として表されることを示せば十分である. すると $(O_{3,3}, SL_2)$ に関する Siegel–Weil の公式によって補題 3.2.2 が示される (Siegel–Weil 公式については例えば [2] を見よ). □

3.3 主結果の証明

正規化された Hecke 固有形式 $f \in \mathrm{S}_{2l-2}$ に対してゼータ積分

$$Z(s,f) = \int_{[PGL_2]} dh_1 \int_{[PGL_2]} \varepsilon(\det h_1)\varepsilon(\det h_2) f(h_1)\overline{f(h_2)} E(\rho^*(h_1,h_2),s)\, dh_2 \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0)$$

を考える. ここで記号の簡略化のために $[PGL_2] = \mathcal{Z}(\mathbb{A})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})$ とおいた. $Z(s,f)$ は全 s-平面上の有理型関数として解析接続される. 特に $s=0$ で正則であることが知られている.

このとき, テータリフト $\mathcal{L}_f^*$ のノルムは, 補題 3.2.1 と補題 3.2.2 の公式によって

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_f^*\|^2 &= \int_{G^J(\mathbb{Q})\backslash G^J(\mathbb{A})} |\mathcal{L}_f^*(g^J)|^2 dg^J \\
&= \int_{G^J(\mathbb{Q})\backslash G^J(\mathbb{A})} dg^J \int_{[PGL_2]} dh_1 \int_{[PGL_2]} \theta(\rho(h_1),g^J)\overline{\theta(\rho(h_2),g^J)} f(h_1)\overline{f(h_2)}\, dh_2 \\
&= \int_{[PGL_2]} dh_1 \int_{[PGL_2]} \varepsilon(\det h_1)\varepsilon(\det h_2) f(h_1)\overline{f(h_2)} \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{G^J(\mathbb{Q})\backslash G^J(\mathbb{A})} \Theta^J(\rho^*(h_1,h_2),g^J)\, dg^J \right) dh_2 \\
&= \frac{\pi}{6} Z(s,f)|_{s=0}
\end{aligned}$$

と書き換えられる. したがって $\mathcal{L}_f^*$ のノルムの計算はゼータ積分 $Z(s,f)|_{s=0}$ の計算に帰着される.

ゼータ積分 $Z(s,f)$ を unfold すると

$$Z(s,f) = \int_{\mathcal{Z}(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} W_f(h)\varepsilon(\det h)\phi(\rho^*(h,I_2),s)\, dh$$

と表される. ここで W_f は $H(\mathbb{A})$ 上の行列要素であり, 具体的には

$$W_f(h) = \int_{[PGL_2]} f(xh)\overline{f(x)}\, dx$$

で与えられる. f が Hecke 固有形式であることから $Z(s,f)$ は Euler 積表示を持つ. 具体的には

$$Z(s,f) = \|f\|^2 \prod_v Z_v(s,f),$$

$$Z_v(s,f) =$$

$$\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{Q}_v)\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}_v)} W_v^0(h)\chi_v(\det h)|\alpha(\rho^*(h, I_2))|_v^s \left(\int_{\mathbb{Q}_v^3} \Psi_{0,v}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(I_3+\rho(h))X\\(I_3-\rho(h))X\end{pmatrix}\right)dX\right)dh$$

と表される. ここで W_v^0 は $H(\mathbb{Q}_v)$ 上のなめらかな関数で $W_v^0(I_2) = 1$ をみたす. より具体的には, $v = p < \infty$ に対して W_p^0 は帯球関数であり, $v = \infty$ に対して

$$W_\infty^0(h_\infty) = j(h_\infty, i)^{-2l+2}\left(\frac{h_\infty \cdot i + i}{2i}\right)^{-2l+2}, \quad {}^\forall h_\infty \in GL_2(\mathbb{R})^+$$

である.

補題 **3.3.1.** $2 < v = p < \infty$ について

$$Z_p(s, f) = \frac{L_p(s+l-1, f, \varepsilon)}{\zeta_p(2s+2)}.$$

ここで $\zeta_p(s)$ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の p-因子である. したがって

$$\prod_{2<v<\infty} Z_v(s,f)|_{s=0} = \left.\frac{L(s+l-1, f, \varepsilon)}{\zeta(2s+2)\zeta_2(2s+2)}\right|_{s=0} = \frac{2^3}{\pi^2}L(l-1, f, \varepsilon)$$

が成り立つことがわかる. また, 次も示される.

補題 **3.3.2.**

(1) $Z_2(s,f)|_{s=0} = 12$
(2) $Z_\infty(s,f)|_{s=0} = 2^{-2l-4}\pi^{-l+2}(l-2)!$

したがって

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_f^*\|^2 &= \frac{\pi}{6}Z(s,f)|_{s=0}\\ &= \frac{\pi}{6}\|f\|^2\prod_v Z_v(s,f)|_{s=0}\\ &= 2^{-2l}\pi^{1-l}(l-2)! \cdot \|f\|^2 \cdot L(l-1, f\otimes\varepsilon)\end{aligned}$$

がわかる.

参考文献

[1] T. Shintani, *On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight*, Nagoya. Math. J **58**, (1975), 83-126.

[2] S.Yamana, *On the Siegel–Weil formula:The case of singular forms*, Compos. Math. **147(4)**, (2011), 1003-1021.