On modular linear differential equations and generalized Rankin-Cohen brackets

久留米工業大学基幹教育センター　境 優一 *

Yuichi Sakai
Research Center for Remedial and Fundamental Science Education,
Kurume Institute of Technology

1 Introduction

古くは Poincaré や Fuchs など，群 Γ の作用で不変となる関数及びこれらが満たす線形常微分方程式について研究が行われていた．[10] において，Kaneko-Zagier による解空間が重さ k の slash 作用で不変となる線形微分方程式，すなわち "モジュラー線形微分方程式" を定義・導入されたことにより，近年，モジュラー線形微分方程式は supersingular j-polynomial や，指標関数で張られる空間とモジュラー線形微分方程式の解空間との対応関係を用いての頂点作用素代数の分類など，様々な文脈で現れる対象である．

本論文では，モジュラー線形微分方程式に関する条件を決定し，また，任意のモジュラー線形微分方程式は，モジュラー線形作用素である Kaneko-Koike 作用素と Rankin-Cohen 括弧積の和で記述できることを報告する．さらに，新たな微分表現 (modified derivative, modified higher Serre derivative) 及びこれを用いた generalized Rankin-Cohen 括弧積を定義することにより，モジュラー線形微分方程式は統一的な表現として与えられることを紹介する．

本研究の講演に関して様々なご助言を頂きました, 永友清和先生, Don Zagier 先生, また, 研究集会での講演に関してご助力ご支援いただきましたオーガナイザーの皆様に心より感謝申し上げます.

* 本研究は科研費（課題番号：JP18K03215, JP21K03138）の助成を受けたものである.

2 Basic definitions and preliminaries

k を非負整数，$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を第 1 種 Fuchs 群とする．このとき，複素上半平面 $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$ およびカスプ[*1] ($\mathbb{R} \cup \{i\infty\}$ の群 Γ による既約剰余類) で正則な関数に対して $f\big|_k[\gamma](\tau) = f(\tau)$[*2] (for $^\forall\gamma \in \Gamma$) を満たすとき，関数 f は群 Γ に関する重さ k の**モジュラー形式**であるという．ただし，$f\big|_k[\gamma]$ は重さ k の slash 作用素であり

$$f\big|_k[\gamma](\tau) \;=\; (c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \qquad \text{for } {}^\forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

で定義されるものである．例えば，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，(正規化) アイゼンシュタイン級数

$$E_k(\tau) \;=\; 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d\,|\,n} d^{k-1}\right)q^n \qquad (k \geqq 4 \,:\, 偶数,\;\; q = e^{2\pi i\tau})$$

は重さ k のモジュラー形式である．(B_k は k 番目のベルヌーイ数)

また，$\mathfrak{H}$ で正則及びカスプ近傍で多項式増大条件を満たす関数 f_n $(i = 1, \ldots, r)$ に対して

$$f|_k[\gamma])(\tau) \;=\; \sum_{n=0}^{r} f_n(\tau)\Big(\frac{c}{c\tau+d}\Big)^n$$

の関係を満たす時，f を群 Γ に関する重さ k, 深さ (depth) r の**準モジュラー形式**であるという．特に，$f_0 = f$ である．例えば，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d\,|\,n} d\right)q^n$ は重さ 2，深さ 1 の準モジュラー形式であり，

$$E_2|_2[\gamma](\tau) \;=\; E_2(\tau) + \frac{12}{2\pi i}\frac{c}{c\tau+d} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

を満たす．また，[9] により合同部分群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する 任意の重さ k, 深さ r 準モジュラー形式 $f \in \mathcal{M}_k^{(\leq r)}(\Gamma)$ は

$$g_k(\tau) + g_{k-2}(\tau)E_2(\tau) + g_{k-4}(\tau)E_2(\tau)^2 + \cdots + g_{k-2r}(\tau)E_2(\tau)^r \quad (g_m \in \mathcal{M}_m(\Gamma))$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は，群 Γ に関する重さ k のモジュラー形式の空間，$\mathcal{M}_k^{(\leq r)}(\Gamma)$ を群 Γ に関する重さ k, 深さ r 以下の準モジュラー形式の空間とする．

[*1] 群 Γ が non-cocomapct な場合にはカスプが存在する．cocomapct な場合には考えない．
[*2] 一般に k が非整数の場合，multiplier system が必要である．

3 Differential operators and Cohen-Kuznetsov series

さらに，モジュラー形式に関連する微分作用素を与える．ここで，D を $D(f)=(2\pi i)^{-1}\frac{df}{d\tau}$ とする．群 Γ が non-cocompact の場合には，関数 $\phi(\tau)$ として以下の変換法則を満たすものを取ることができる：

$$\phi|_2[\gamma](\tau) \;=\; \phi(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\frac{c}{c\tau+d} \quad \text{for} \quad \gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma.$$

- Rankin-Cohen brackets [,]

$$[f,\,g]_n^{(k,\,\ell)} \;=\; \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n+k-m}{n-m}\binom{n+\ell-1}{m}D^m(f)D^{n-m}(g)\,,$$

- Kaneko-Koike operator Θ

$$\Theta_k^n(f)=D^n(f)-(k+n-1)[\phi,\,f]_{n-1}^{(2,k)}\,,$$

- the canonical higher Serre derivative (Villegas-Zagier) $\partial_k^{[n]}(f)$

$$\partial_k^{[n+1]}(f):=\;\partial_{k+2n}\Big(\partial_k^{[n]}(f)\Big)+n(n+k-1)\Psi\partial_k^{[n-1]}(f)\quad (n\geqq 1)\,,$$

$\partial_k^{[1]}(f):=\partial_k(f)=D(f)-k\phi f$, $\partial_k^{[0]}(f)=f$, where $\Psi=D(\phi)-\phi^2$.

これらは，モジュラー形式に対するモジュラー微分作用素であるが，一般にモジュラー形式を (例えば D で) 微分するモジュラー不変性は崩れてしまう．これら微分作用素のモジュラー不変性を考察するために，**Cohen-Kuznetsov 級数**を以下で定義する．

$$\Phi_{f,\,k}^{(D)}(\tau,\,X)\;=\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D^n(f)}{n!(k)_n}X^n\,,$$

ただし，f は $\mathfrak{H}$ 上正則な関数，k は整数，$(\alpha)_0=1$, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ $(n>0)$. このとき，Cohen-Kuznetsov 級数は群 Γ に関する変換即を満たす：

$$\Phi_{f,\,k}^{(D)}\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\,\frac{X}{(c\tau+d)^2}\Big)\;=\;(c\tau+d)^k e^{\frac{c}{c\tau+d}\frac{X}{2\pi i}}\Phi_{f|_k[\gamma],\,k}^{(D)}(\tau,\,X)\quad\text{for}\quad\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$$

Cohen-Kuznetsov 級数を用いることで

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f,\,g]_n^{(k,\,\ell)}}{(k)_n(\ell)_n}X^n\;=\;\Phi_{f,\,k}^{(D)}(\tau,\,-X)\Phi_{g,\,\ell}^{(D)}(\tau,\,X)$$

の関係から，$\big[f|_k[\gamma],\, g|_\ell[\gamma]\big]_n^{(k,\,\ell)} = [f,\, g]_n^{(k,\,\ell)}\big|_{k+\ell+2n}[\gamma]$ $(\gamma \in \Gamma)$ がわかる．すなわち，

$$[\ ,\ ]_n^{(k,\,\ell)}\ :\ \mathcal{M}_k(\Gamma) \times \mathcal{M}_\ell(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{M}_{k+\ell+2n}(\Gamma)$$

である．同様に，$\hat{D}$, ∂, Θ に対する Cohen-Kuznetsov 級数を

$$\Phi_{f,\,k}^{(\hat{D})}(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{D}^n(f)}{n!(k)_n} X^n, \quad \Phi_{f,\,k}^{(\partial)}(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_k^{[n]}(f)}{n!(k)_n} X^n, \quad \Phi_{f,\,k}^{(\Theta)}(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Theta_k^n(f)}{n!(k)_n} X^n$$

(ただし，$\hat{D}_k = D(f) - \frac{k}{4\pi\Im(\tau)} f)$ とすると $\Phi_{f,\,k}^{(D)}(\tau, X) = e^{\frac{X}{4\pi\Im(\tau)}} \Phi_{f,\,k}^{(\hat{D})}(\tau, X) = e^{\phi X} \Phi_{f,\,k}^{(\partial)}(\tau, X)$, $\Phi_{f,\,k}^{(\partial)}(\tau, X) = e^{-\hat{\phi} X} \Phi_{f,\,k}^{(\hat{D})}(\tau, X)$ (ただし，$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{4\pi\Im(\tau)}$) である．

また，D に関して，定数関数 $1 \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$ に対する Cohen-Kuznetsov 級数を定義する：

$$\Phi_{1,\,0}(\tau, X)\ =\ 1 + X\Phi_{\phi,\,2}(\tau, X) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^{n-1}(\phi)}{n!(n-1)!} X^n$$

このとき，以下の命題を得る．

Proposition 1. (1) $\Phi_{1,\,0}(\tau,\, X)$ は以下の変換即を満たす：

$$\Phi_{1,\,0}\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{X}{(c\tau + d)^2}\Big) = e^{\frac{c}{c\tau + d}\frac{X}{2\pi i}} \Phi_{1,\,0}(\tau, X) \qquad \textit{for} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

(2) $\Phi_1^{(\partial)} = \Phi_{1,\,0}^{(\partial)}$ を $\Phi_1^{(\partial)}(\tau, X) := e^{-\phi X}\Phi_{1,\,0}(\tau, X)$ で定義する．このとき，$(\tau, X) \mapsto \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{X}{(c\tau+d)^2}\right)$ で不変.

これにより，$\Phi_{f,\,k}^{(\Theta)}(\tau, X) = \Phi_{f,\,k}^{(D)}(\tau, X)\Phi_{1,\,0}(\tau, -X)$ が得られる．すなわち，以下の定義が得られる．

Theorem 1. 微分作用素 $D, \partial_k^{[n]}, \Theta_k^n$ に対して，以下の関係式がなりたつ．

$$\partial_k^{[n]}(f) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (k + r)_{n-r} \big(- \phi\big)^{n-r} D^r(f)\,,$$

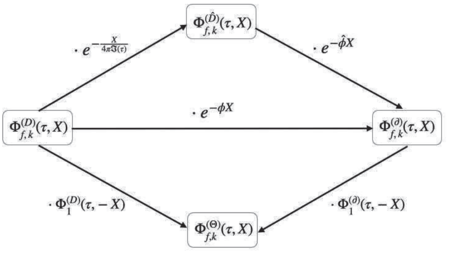
$$\Theta_k^n(f) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \binom{k + n - 1}{m} \omega_m \partial_k^{[n-m]}(f)\,,$$

ただし，ω_m は群 Γ に関する重さ m のモジュラー形式.

Remark 1. $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合，ω_m は以下のようなものが対応する：

m	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_m	1	0	$-\frac{E_4}{72}$	$-\frac{E_6}{144}$	$-\frac{E_4^2}{288}$	$-\frac{5E_4E_6}{2592}$	$-\frac{9E_4^3+16E_6^2}{20736}$	$-\frac{35E_4^2E_6}{41472}$

ここで $\Phi_1^{(\partial)}(\tau, X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_m(\tau)}{(m!)^2}(-X)^m$ を定義すると，以下の図が与えられる．



4 Modular linear differential operators and modular linear differential equations

まず，モジュラー線形微分作用素及びモジュラー線形微分方程式の定義を以下で与える．

Definition 1. 微分作用素 $\mathcal{L}$ が群 Γ に関する *type* $(k,\, k+K)$ のモジュラー線形微分作用素とは，以下の条件を満たすことである：

(1) $\mathcal{L}$ は，$\mathfrak{H}$ 上で正則 (かつカスプを持つ場合には，カスプ近傍で多項式増大条件を満たす) 係数関数を持つ，有限次数の線形微分作用素である．

(2) $\mathcal{L}\bigl(f|_k[\gamma]\bigr) \;=\; \mathcal{L}(f)\big|_{k+K}[\gamma] \qquad \textit{for} \quad \gamma \in \Gamma$

Definition 2. $\mathcal{L}(f) = 0$ を満たすとき，群 Γ に関する *type* $(k,\, k+K)$ のモジュラー線形微分方程式という．

モジュラー線形微分作用素 (方程式) はセール微分や Rankin-Cohen 括弧積を用いた表現がよく知られているが，ここでは群 Γ, 次数 n，type $(k,\, k+K)$ の場合で

$$\mathcal{L} = \sum_{r=0}^{n} a_r(\tau) D^r \qquad (a_r(\tau)\ \text{：}\mathfrak{H}\ \text{上正則な関数})$$

の形式について扱う．この場合，Theorem 1 より $a_r(\tau)$ は重さ $K-2r$, 深さ $n-r$ 以下の準モジュラー形式であることがわかる．このことから，$\mathcal{L}(f) = 0$ の解空間への $|_k[\gamma]$ $(\gamma \in \Gamma)$ の作用により，以下のことがわかる．

Theorem 2. $\mathcal{L}(f)$ が次数 n, *type* $(k, k+K)$, 群 Γ に関するモジュラー線形微分作用素 (

方程式) であるための必要十分条件は

$$\big(a_r|_{K-2r}[\gamma]\big)(\tau) \,=\, \sum_{s=0}^{n-r}\binom{r+s}{s}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\frac{c}{c\tau+d}\Big)^s a_{s+r}(\tau) \qquad \gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$$

$(0\le r\le n)$ である．

これにより，$a_r(\tau)$ に関する具体的な性質が確認できるが，この $a_r(\tau)$ の準モジュラー性を用いることにより $\mathcal{L}$ に関するシンプルな表現を与えることができる．

Theorem 3. (1) $\mathcal{L}=\sum_{r=0}^{n}a_r(\tau)D^r\quad(K>2n)$ が群 Γ, 次数 n, *type* $(k,k+K)$ のモジュラー線形微分作用素 (方程式) である必要十分条件は

$$h_m := \sum_{s=0}^{n-m}\binom{m+s}{s}\frac{(k+m)_s}{(K-2m-s-1)_s}D^s\big(a_{m+s}(\tau)\big) \qquad (0\le m\le n)$$

が群 Γ に関する重さ $K-2m$ のモジュラー形式であることである．さらにこのとき

$$\mathcal{L}(f) \,=\, \sum_{m=0}^{n}\binom{K-m-1}{m}^{-1}[h_m,\, f]_m^{(K-2m,\, k)}$$

の表現が得られる．

(2) $\mathcal{L}=D^n+\sum_{r=0}^{n-1}a_r(\tau)D^r\quad(K=2n)$ が *non-cocompact* 群 Γ, 次数 n, *type* $(k,k+K)$ のモジュラー線形微分作用素 (方程式) である必要十分条件は，$h_n=1, h_{n-1}=a_{n-1}+n(k+n-1)\phi$,

$$h_m := \sum_{s=0}^{n-m}\binom{m+s}{s}\frac{(k+m)_s}{(K-2m-s-1)_s}D^s\big(a_{m+s}(\tau)\big) \qquad (0\le m\le n-2)$$

が群 Γ に関する重さ, 0, $K-2$, $K-2m$ のモジュラー形式であることである．さらにこのとき

$$\mathcal{L}(f) \,=\, \Theta_k^n(f)+\sum_{m=0}^{n-1}\binom{2n-m-1}{m}^{-1}[h_m,\, f]_m^{(2n-2m,\, k)}$$

の表現が得られる．

このように, 任意のモジュラー線形微分作用素は Kaneko-Koike 作用素と Rankin-Cohen 括弧積の線形和で記述できることが確認できた．注意として，Kaneko-Koike 作用素が扱える場合は，重さ 2, 深さ 1 の準モジュラー形式が存在する場合に限られる．すなわち，群 Γ が non-cocompact 群である場合に限られる．

5 Modified derivatives, and extended Rankin-Cohen brackets

ここでは，微分に関する表現として modified derivative というシンプルな表現方法を定義し，これらを用いた extended Rankin-Cohen 括弧積を与える．

Definition 3. *Modified derivative* $\mathbb{D}$ を以下で定義する．

(1) f が重さ $k>0$ のモジュラー形式の場合，　$\mathbb{D}^n := \mathbb{D}_k(f) = \dfrac{D^n(f)}{(k)_n}$.
(2) $f=1, k=0$ (すなわち，重さ 0 のモジュラー形式) の場合，

$$\mathbb{D}^n(1) := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \dfrac{D^{n-1}(\phi)}{(n-1)!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

この定義を与えることにより，Cohen-Kuznetsov 級数 $\Phi^{(D)}_{f,\,k}$, $\Phi^{(D)}_{1,\,0}$ は

$$\begin{aligned} \Phi^{(D)}_{f,\,k}(\tau, X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n(f)}{n!(k)_n} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^n(f)}{n!} X^n = e^{X\mathbb{D}} \cdot f\,, \\ \Phi^{(D)}_{1,\,0}(\tau, X) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^{n-1}(\phi)}{n!(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^n(1)}{n!} X^n = e^{X\mathbb{D}} \cdot 1 \end{aligned}$$

の表現を得る．この modified derivative を用いて *extended Rankin-Cohen* 括弧積を定義を与える．

Definition 4. 関数 f, g に対して，*extended Rankin-Cohen* 括弧積 $\langle f,\, g\rangle_n$ を

$$\langle f,\, g\rangle_n := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \mathbb{D}^m(f)\mathbb{D}^{n-m}(g)\,.$$

で定義する．

これらは，$\Phi^{(\mathbb{D})}_f(\tau, X) := \Phi^{(D)}_{f,\,k}(\tau, X)$ とするとき，

$$\Phi^{(\mathbb{D})}_f(\tau, -X)\Phi^{(\mathbb{D})}_g(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f,\, g\rangle_n \frac{X^n}{n!}$$

の表現が得られる．このとき，以下の命題が得られる．

Proposition 2. n を非負整数，関数 f, g を群 Γ に関する重さ $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ のモジュラー形式とする．この時，以下が成り立つ．

(1) $\langle f, g\rangle_n$ は群 Γ に関する重さ $k+\ell+2n$ のモジュラー形式である．

(2) $k>0, \ell>0$ のとき，$\langle f, g\rangle_n = \dfrac{n!}{(k)_n(\ell)_n}[f, g]_n^{(k,\ell)}$.

(3) $f=1, k=0$ のとき，$\langle f, g\rangle_n = \dfrac{1}{(\ell)_n}\Theta_\ell^n(g)$.

これにより，§4 にて与えたモジュラー線形微分作用素 (方程式) は extended Rankin-Cohen 括弧積を用いることにより，簡潔な表現を提示できる．

Theorem 4. n を非負整数，f_s, g を群 Γ に関する重さ $k_s \geq 0, \ell \geq 0$ のモジュラー形式とする．$(s=0,\dots,n)$. このとき g に対する，次数 n，群 Γ に関する任意のモジュラー線形微分作用素 (方程式) は $\langle f_s, g\rangle$ の線形和で与えられる．

参考文献

1. Y. Arike, M. Kaneko, K. Nagatomo and Y. Sakai, Affine vertex operator algebras and modular linear differential equations. Lett. Math. Phys. **106**, no. 5, 693–718 (2016)
2. Y. Arike, K. Nagatomo and Y. Sakai, with an appendix by Don Zagier, Vertex operator algebras, minimal models, and modular linear differential equations of order 4. J. Math. Soc. Japan **70** (2018), 1347–1373.
3. Y. Choie, M. H. Lee, Symmetric tensor representations, quasimodular forms, and weak Jacobi forms, Advances in Math. **287** (2016) 567–599 (2010).
4. H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. **217** (1975) 271–285.
5. P. Cohen, Y. Manin and D. Zagier, Automorphic pseudodifferential operators. *In Algebraic Aspects of Integrable Systems: In Memory of Irene Dorfman*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **26**, Birkhäuser, Boston (1997) 17–47.
6. M. Eichler and D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*. Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser, Boston (1985).
7. M. Kaneko and M. Koike, On extremal quasimodular forms. Kyushu J. Math. **60** (2006), 457–470.
8. M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Modular forms and second order ordinary differential equations: applications to vertex operator algebras. Lett. Math. Phys. **103** (2013), no. 4, 439–453.

9. M. Kaneko and D. Zagier, A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms, *In The Moduli Spaces of Curves* (R. Dijkgraaf, C. Faber, G. van der Geer, eds.), Prog. in Math. **129**, Birkhäuser, Boston (1995), 165–172.
10. M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, **7** (1998), 97–126.
11. M. Kuga, G. Shimura, On vector differential forms attached to automorphic forms, Journal of the Mathematical Society of Japan, **12** (1960), no. 3, 258–270.
12. N.V. Kuznetsov, A new class of identities for the Fourier coefficients of modular forms (in Russian), Acta Arithm. **27** (1975) 505–519.
13. F. Martin and E. Royer, Rankin-Cohen brackets on quasimodular forms. J. Ramanujan Math. Soc. **24** (2009), 213–233.
14. G. Mason, Vector-valued modular forms and linear differential operators. Int. J. Number Theory **3** (2007), 377–390.
15. G. Mason, K. Nagatomo, Y. Sakai, Vertex operator algebras with central charge 8 and 16. Contemporary Mathematics **695** (2017), 157–186.
16. F. Rodriguez Villegas and D. Zagier, Square roots of central values of Hecke L-series. *In Advances in Number Theory* (Proceedings of the Third Conference of the Canadian Number Theory Association), eds. F.Q. Gouvea and N. Yui, Oxford University Press (1993) 81–99.
17. D. Zagier, Modular forms and differential operators. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **104** (1994), 57–75.
18. D. Zagier, Elliptic modular forms and their applications. In J. Bruinier, G. Harder, G. van der Geer and D. Zagier, *The 1–2–3 of Modular Forms : Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway* (ed. K. Ranestad). Universitext, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (2008), 1–103.
19. Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras. J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237–302.

Research Center for Remedial and Fundamental Science Education
Kurume Institute of Technology
Fukuoka 830-0052
JAPAN
E-mail address : dynamixaxs@gmail.com