時間遅れ系と遅延微分方程式

東北大学・材料科学高等研究所　西口　純矢 *†
Junya Nishiguchi,
Advanced Institute for Materials Research,
Tohoku University

1　はじめに

この文書は，2021 年度 RIMS 共同研究（公開型）「時間遅れ系と数理科学：理論と応用の新たな展開に向けて」[*1] の講究録原稿であるが，講演の内容をまとめるのではなく，時間遅れ系と遅延微分方程式についての基礎事項をまとめることにした．

本共同研究の題目およびこの文書のタイトルにある **時間遅れ系** (time-delay system) とは一体何であろうか？ まずは「時間遅れ」であるが，時間とともに変化するシステム（以後，時間発展システムと呼ぶ）において，考えている状態の瞬間変化率が現在の状態だけでなく過去の状態にも依存する場合に，その時間発展システムは「時間遅れを持つ」と言う．時間遅れのことはタイムラグとも呼ばれる．そして，このような意味で，因果律にタイムラグを有する時間発展システムおよびそれらの数理モデルを総称して時間遅れ系と呼ぶことにするのである．

数学においては，時間遅れ系という用語はあまり用いられず，直接的な考察の対象である方程式で呼ぶことが多い．**遅延微分方程式** (delay differential equation; DDE) あるいは **関数微分方程式** (functional differential equation; FDE) と呼ばれる微分方程式がそれである．連続時間の差分方程式もまた特別な関数微分方程式であり，このような微分方程式と差分方程式を総称して，**遅延方程式** と呼ぶこともある．たとえば，[6] を参照されたい．

遅延微分方程式の研究には，常微分方程式 (ODE) の一般化としての微分方程式論の側面があると同時に，その解の振る舞いであるダイナミクスを調べるという力学系理論の側面がある．そして，これらの研究の背後には，「時間遅れを持つ微分方程式 (differential equations with delayed arguments)」に対する自然な枠組みは連続関数の空間において与えられるという N. Krasovskii [26] による思想がある．J. Hale [11] により導入された，「時間遅れを持つ微分方程式」の数学的定式化である関数微分方程式の形式は，この思想をわかりやすく表現した．微分

---

* 〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1 東北大学材料科学高等研究所 (AIMR) 数学連携グループ
† E-mail: junya.nishiguchi.b1@tohoku.ac.jp
*1 `https://sites.google.com/view/delayws2021/`

差分方程式と呼ばれる特別なクラスの方程式に関する研究[*2]や，N. Krasovskii [26, Chapters 6 and 7] および A. Halanay [9, Chapter 4] による研究を整理・発展させる形で，関数微分方程式の微分方程式論が勃興した．

また，上に述べた Krasovskii による思想は「時間遅れを持つ微分方程式」の “geometric theory” に関するものである[*3]．現代的に言えば，『「時間遅れを持つ微分方程式」は連続関数の空間を相空間とする **無限次元力学系** を定める』ということである．ODE から切り離されて抽象的な力学系理論が発展し，また，時間発展する偏微分方程式が定める無限次元力学系が研究されている今日においては，「関数微分方程式が連続関数空間における無限次元力学系を定める」という事実に何ら驚きはない．しかし，当時は無限次元 Banach 空間における力学系の定義（現代的に言えば，無限次元 Banach 空間における半流れ）とそれに基づく研究が開始されたばかりであった[*4]．関数微分方程式のダイナミクスの力学系の観点での研究は，一般の無限次元力学系を理解するための１つのピースとして今もなお重要な地位を占めている．無限次元力学系に関する書籍として [34], [16], [20] を挙げる．無限次元力学系と発展方程式に関する文献としては [40], [37] がある．

[14] は Hale による関数微分方程式に関する最初の文献である．内容の大幅な増補により，[15] として「関数微分方程式論」の名を冠する書籍となった．その内容は，第 1 章でスカラーの線型微分差分方程式を簡単に議論し，第 2 章で関数微分方程式の基礎理論を展開する．そして，その１つの着地点は，第 10 章における関数微分方程式の平衡点や周期軌道の近傍でのダイナミクスの解析にあると言えるだろう．これは，ODE の力学系理論と比較すれば基本的ではあるが，その道筋は容易ではない．これは，やはり，関数微分方程式の取り扱いの困難さにその原因があると言えるだろう．また，[15] における議論はさまざまな観点で十分ではなかった．Verduyn Lunel が著者に加わった改訂版 [21] はこの不十分さを取り除くためにあったと言えるだろう．また，Diekmann, van Gils, Verduyn Lunel, and Walther による異なる観点での書籍 [6] を生み出すきっかけとなったと思われる．

関数微分方程式論はこのように発展してきたが，この 30 年ほどで「関数微分方程式」という用語が用いられることは少なくなったように思われる．その発展と同時代を生きたわけではない著者にとっては正確な年代はわからないが，近年では，「関数微分方程式」という用語はほとんど「遅延微分方程式」という用語に取って代わられたように思われる．これにはさまざまな要因があると思われる．１つ目の要因は，1960 年台から 1980 年代にかけて発展した関数微分方程式の一般論に関する研究が落ち着いたことである．２つ目の要因は，しばしば Hale の書籍が難しいと言われることにもあるように，「関数微分方程式」という用語が敬遠されるようになったことである．もちろん，「関数微分方程式」より「遅延微分方程式」の方が直感的にわかりやすいということもあるであろう．これは，この文書におけるタイトルでも「遅延微分

[*2] 詳しくは，[4] を参照されたい．

[*3] この “geometric theory” に関する Hale による初期の文書として [12] を参照されたい．

[*4] たとえば，[18], [13] を参照されたい．なお，[18, Definition 3] において，（やや設定が異なるが）Banach 空間における半流れの不変集合の定義が与えられている．

方程式」を採用していることに現れている．

しかし，であるからと言って，関数微分方程式という概念が捨てられたわけではないのである．「時間遅れを持つ微分方程式」と同義である遅延微分方程式の数学的定式化として関数微分方程式があるのであり，それは，遅延微分方程式の微分方程式論や力学系理論という一般的な取り扱いの枠組みを与えてくれる．遅延微分方程式と関数微分方程式は切っても切り離せない．

以上のような理由から，遅延微分方程式を含む時間遅れ系の専門家とそれ以外の分野の研究者との間をつなぐには，ここで改めて関数微分方程式という遅延微分方程式の定式化の導入を行うことが重要であると考える．関数微分方程式の導入は，歴史的には非常に自然であったため，Hale による文献 [14], [15] ではあまり説明がない．これは [21] においても同じである．

この文書は以下のように構成されている．第 2 節では，遅延微分方程式における過去依存性という観点から関数微分方程式の導入を行う．第 3 節では，関数微分方程式の基礎理論（初期値問題の解の存在と一意性）について概観する．第 3.1 小節で述べる内容は標準的なものであるが，第 3.2 小節における微分差分方程式に対するステップ法の議論を通して，解の存在と一意性に関する定理における条件の吟味を第 3.3 小節で行う．第 4 節では，あえて曖昧にしてきた遅延微分方程式の（必ずしも数学的でない）定義を述べ，その数学的定式化である関数微分方程式との差異について議論する．

2　時間遅れ系と遅延微分方程式

2.1　微分差分方程式

時間遅れ系を表す方程式の名称にはさまざまな変遷がある．たとえば，以前は **微分差分方程式** (differential difference equation) という用語が用いられていた．これは，定数の $\tau_1, \dots, \tau_m > 0$ に対する

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)) \tag{2.1}$$

という微分方程式のことである[*5]．ここで，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^n$ は適切な滑らかさを持っていると仮定する．微分差分方程式の理論の一般的な文献として [4] を挙げる．最近では，方程式 (2.1) をことさらに微分差分方程式とは呼ばず，単に遅延微分方程式 (DDE) と呼ぶ方が多い．しかし，この文書では，微分差分方程式が遅延微分方程式 (DDE) の特別なクラスであることを強調するために，方程式 (2.1) を微分差分方程式と呼ぶ．

注 2.1. $\tau_1, \dots, \tau_m > 0$ が定数ではなく未知関数に依存して変化するような状況を考えると，「差分」という用語はあまり適切ではなくなる．このような事情を反映してか，differential delay equation や delay differential equation という用語が浸透していったように思われる．

[*5] 右辺に時間変数 $t \in \mathbb{R}$ が陽に含まれるものも考えられるが，ここでは右辺に t が陽には含まれない自励系の方程式のみを考える．

differential difference equation や differential delay equation の略語はすべて “DDE” であるが，この文書では DDE とは遅延微分方程式 (delay differential equation) の略語のこととする．また，ロシア系のコミュニティにおいては differential equation with deviating argument (DEDA) という用語も用いられていた (詳しくは，[29], [28] を参照されたい).

2.2 遅れ型関数微分方程式

では，遅延微分方程式 (DDE) の定義は何かと言うと，あまりはっきりしない．時間遅れ系の数理モデルとして微分差分方程式 (2.1) が使われることが多いため (たとえば，[8] を参照されたい),「微分差分方程式 = 遅延微分方程式 (DDE)」と考えられることもあるかもしれない．微分差分方程式 (2.1) の特徴は，未知関数 x の導値 $\dot{x}(t)$ が $x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)$ に依存することであるが，これは，時間遅れ系の微分方程式モデルとしては特殊な対象に過ぎないことに注意する必要がある．

歴史的には，Bellman and Cooke [4] による微分差分方程式に関する一般的な研究の後に，これらを含むクラスとして関数微分方程式の概念が Hale [11] により整理・導入された．以後，次の記法を用いる．

記法 1. $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a,b]$ に対して，$C([a,b],\mathbb{R}^n)$ で $[a,b]$ から $\mathbb{R}^n$ への連続関数全体のなす線型空間を表す．$C([a,b],\mathbb{R}^n)$ には上限ノルム

$$\|x\| \coloneqq \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad (x \in C([a,b],\mathbb{R}^n))$$

を与え，これによる Banach 空間と考える．ここで，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ のあるノルムである．

上に述べた関数微分方程式とは，$r > 0$ を定数として

$$\dot{x}(t) = F(x_t) \tag{2.2}$$

と書かれる微分方程式である[*6]．ここで，$F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ は「ベクトル値汎関数」であり，$x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ は連続な未知関数 x に対して

$$x_t(\theta) \coloneqq x(t+\theta) \quad (\theta \in [-r,0])$$

で定義される．この文書では，x_t を x の t における **履歴切片** (history segment) と呼ぶ．通常は，RFDE (2.2) における F は連続写像であると仮定する．

[11] で導入された当時は，方程式 (2.2) は単に関数微分方程式 (FDE) と呼ばれていた．その後，(2.2) を含むさまざまなタイプが考えられた．これらと区別するために，方程式 (2.2) は **遅れ型の FDE** (FDE of retarded type)，あるいは **遅れ型関数微分方程式** (retarded functional differential equation; RFDE) と呼ばれる[*7]．RFDE の理論の一般的な文献としては，Hale

[*6] 微分差分方程式と同様に，ここでも自励系の方程式のみを考える．

[*7] この名称が，(2.2) の右辺が（ベクトル値）汎関数であることに由来するかどうかはよくわからない．なお，functional differential equation の「関数微分方程式」という日本語訳は定着している (たとえば，[25], [30], [1] を参照されたい).

によるテキスト [14], [15]，および Verduyn Lunel が加わった改訂版 [21] を参照されたい．歴史的なことも含めて，Hale による文書 [17] も参照されたい．

注 2.2. Hale [17] が述べているように，RFDE の概念は

$$\dot{x}(t) = F(x(t+\theta))$$

という形で Krasovskii [26, Chapters 6 and 7] により考察されていた．ここで，$x(t+\theta)$ は θ の関数として考えており，したがって，右辺の F は関数ではなく（ベクトル値の）汎関数として理解されなければならない．[9, Chapter 4] も参照されたい．また，[11] によると，「時間遅れを持つ微分方程式 (differential equations with delayed arguments)」に対する自然な枠組みは連続関数の空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ において与えられることもまた Krasovskii により指摘されていたようである．なお，Hale [17] は記法 x_t は自身が導入したと述べているが，Shimanov [38] によっても用いられている．

2.3 RFDE における過去依存性

RFDE (2.2) の形式において重要ことは，それが「$\dot{x}(t)$ は x_t に依存している」ということを表現しているのであって，具体的な依存性の表記を与えてはいないことである．ここで，「具体的な依存性の表記」という表現には注意が必要である．たとえば，ODE[*8]

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

も，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の具体的な表示式を想定しているわけではない．しかし，x_t は $x(t)$ と異なり関数であるから，$F(x_t)$ には ODE (2.3) における $f(x(t))$ 以上にさまざまなものが考えられる．x_t の積分が含まれてもよいし，非線型な F に対しては積分と非線型な変換をどのように組み合わせてもよい．以後，RFDE (2.2) における $\dot{x}(t)$ の x_t への依存性を，単に **RFDE における過去依存性** と呼ぶことにする．

注 2.3. ODE (2.3) は，形式的に $r=0$ とすることで $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ と考えれば RFDE と見なすことができる．ただし，$r=0$ としなくても，写像 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を

$$F(\phi) \coloneqq f(\phi(0)) \tag{2.4}$$

と定めれば，(2.3) を任意の $r>0$ に対して RFDE として書くことができる．すなわち，ODE は RFDE に埋め込むことができる．この埋め込みにより得られる RFDE は，未知関数 xn の導値 $\dot{x}(t)$ が x の現在の値 $x(t)$ のみに依存するという <u>自明な過去依存性</u> しか持っていないと言える．

注 2.4. RFDE における過去依存性という観点では，微分差分方程式 (2.1) は「単純」である．これは $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を

$$F(\phi) \coloneqq f(\phi(0), \phi(-\tau_1), \dots, \phi(-\tau_m))$$

[*8] 以後，単に ODE と言えば 1 階正規形の方程式を指すとする．

と定めることで，(2.1) を RFDE (2.2) として書けることからわかる．ここで，$r > 0$ は $\tau_1, \ldots, \tau_m \in (0, r]$ となるように取っている．ただし，過去依存性の構造と解の振る舞いであるダイナミクスがどのようにつながるかが明らかでない以上，過去依存性が「単純」であるからと言って，解の振る舞いであるダイナミクスが簡単であるかどうかはわからない．一方で，過去依存性が「単純」であれば解析がしやすくなるのは事実である．この意味で，時間遅れ系の数理モデルとして微分差分方程式は多く用いられている．

連続線型写像 $L\colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ に対する **線型 RFDE**

$$\dot{x}(t) = Lx_t \tag{2.5}$$

に対しては，RFDE における過去依存性の状況はやや簡単になる．この場合には，$\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数のなす Banach 空間 $C([a, b], \mathbb{R})$ 上の連続線型汎関数に対する Riesz の表現定理より，L は次の積分表示が可能である：

$$L\phi = \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\eta(\theta)\,\phi(\theta) \quad (\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)). \tag{2.6}$$

ここで，$\eta\colon [-r, 0] \to M_n(\mathbb{R})$ は $[-r, 0]$ 上で定義された $n \times n$ 実行列に値を取る有界変動関数，すなわち各成分が有界変動であるような関数であり，右辺はベクトル値関数 ϕ の行列値関数 η による Riemann-Stieltjes 積分である[*9]．実数値関数または複素数値関数に対する Riemann-Stieltjes 積分に関する文献として，[41, Chapter I] を挙げる．RFDE の文脈での Riemann-Stieltjes 積分については，[6, Chapter I and Appendix I] も参照されたい．線型 RFDE (2.5) に対しては，積分表示 (2.6) を介した有界変動関数 η が線型 RFDE (2.5) における過去依存性を「格納」していると言える．

例 2.5. 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ と $\tau > 0$ に対する線型の微分差分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

は，連続線型写像 $L\colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を

$$L\phi \coloneqq A\phi(0) + B\phi(-\tau) \quad (\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n))$$

と定めることで線型 RFDE (2.5) として書ける．ここで，$r > 0$ は $\tau \in (0, r]$ となるように取っている．上の L は，たとえば行列値有界変動関数 $\eta\colon [-r, 0] \to M_n(\mathbb{R})$ を

$$\eta(\theta) \coloneqq \begin{cases} O & (\theta \in [-r, -\tau]), \\ B & (\theta \in (-\tau, 0)), \\ A + B & (\theta = 0). \end{cases}$$

と定めることで，積分表示 (2.6) が可能である．O で零行列を表す．

---

*9 区間 $[-r, 0]$ のタグ付き分割 $-r = \theta_0 < \cdots < \theta_m = 0$, $\theta'_j \in [\theta_{j-1}, \theta_j]$ $(1 \le j \le m)$ における小区間の長さを 0 に近づける極限の下での，Riemann 和 $\sum_{j=1}^{m} [\eta(\theta_j) - \eta(\theta_{j-1})]\phi(\theta'_j)$ の収束性により定義される．

3 RFDE の基礎理論

1960 年代初めの RFDE の概念の導入以来，その研究領域は急速に拡大した．これには,「時間遅れを持つ微分方程式」に対する自然な考察は連続関数空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ において与えられるという Krasovskii による思想を，RFDE (2.2) という定式化と形式がわかりやすく表現していることも影響していると思われる．

解の振る舞いであるダイナミクスを力学系の観点で調べるとき，考えている微分方程式の **初期値問題** を考えることになる．RFDE (2.2) の場合には，その初期値問題における初期条件が

$$x_0 = \phi \in \mathrm{dom}(F) \subset C([-r,0],\mathbb{R}^n) \tag{3.1}$$

で与えられることは自然である．ここで，ϕ を初期条件 (3.1) における **初期履歴関数** (initial history function) と呼ぶ[*10]．

3.1 初期値問題の解の存在と一意性

3.1.1 初期値問題の解の存在性

次は，RFDE (2.2) の初期値問題の解の存在性に関する基本的な結果である．

定理 3.1. $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする．このとき，$\mathrm{dom}(F)$ が開集合ならば，任意の $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，RFDE (2.2) は初期条件 $x_0 = \phi$ の下で解を持つ．すなわち，$a > 0$ と関数 $x\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ であって次を満たすものが存在する：(i) $x_0 = \phi$，(ii) 任意の $t \in [0,a]$ に対して $x_t \in \mathrm{dom}(F)$，(iii) $x|_{[0,a]}\colon [0,a] \to \mathbb{R}^n$ は微分可能で，すべての $t \in [0,a]$ に対して $\dot{x}(t) = F(x_t)$.

これは，RFDE に対する **Peano の存在定理** とでも言うべきものである．定理 3.1 における定義より，RFDE (2.2) の初期条件 $x_0 = \phi \in \mathrm{dom}(F)$ の下での解 $x\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ は連続関数である．有界閉区間上の連続関数は一様連続であるので，関数

$$[0,a] \ni t \mapsto x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

は連続である．よって，解 x に対して関数 $[0,a] \ni t \mapsto F(x_t) \in \mathbb{R}^n$ もまた連続であり，制限 $x|_{[0,a]}$ は連続的微分可能である．これより，定理 3.1 における条件 (ii) の下で，連続関数 $x\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ が RFDE (2.2) の初期条件 $x_0 = \phi \in \mathrm{dom}(F)$ の下での解であることと，x が積分方程式

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t F(x_s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0,a]) \tag{3.2}$$

[*10] 単に初期関数と呼ぶことが多い．

を満たすことは同値である．ここで，右辺の積分は連続関数の Riemann 積分である．定理 3.1 の証明は，積分方程式 (3.2) を不動点問題に持ち込み，Schauder の不動点定理*11 を適用することでなされる．定理 3.1 の証明に関する詳細な議論は [21, Chapter 2] を参照されたい．第 3.3 小節も参照されたい．

注 3.2. 解 $x\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ のうち未知であるのは $x|_{[0,a]}$ である. そこで, 関数 $y\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ を

$$y(t) \coloneqq x(t) - \widetilde{\phi}(t) \quad (t \in [-r,a])$$

と定めて，$y_0 = 0$ を満たす連続関数 $y \in C([-r,a],\mathbb{R}^n)$ に関する不動点問題と考えるのもわかりやすい．ここで，$\widetilde{\phi}\colon [-r,\infty) \to \mathbb{R}^n$ は

$$\widetilde{\phi}(t) \coloneqq \begin{cases} \phi(t) & (t \in [-r,0]), \\ \phi(0) & (t \geq 0) \end{cases}$$

で定まる関数である．上の x から y に帰着させる操作は ODE の初期値問題の場合の平行移動に相当するが，RFDE の場合には平行移動にはならない．

3.1.2　初期値問題の解の一意性

RFDE (2.2) の初期値問題の解の一意性は，方程式の右辺の F の局所 Lipschitz 連続性により保証される．次が成り立つ．

定理 3.3. $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ は局所 Lipschitz 連続かつ $\mathrm{dom}(F)$ は開集合とする．このとき，任意の $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ に対して $a > 0$ が存在して，RFDE (2.2) は初期条件 $x_0 = \phi$ の下で一意的な解 $x\colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ を持つ.

ここで，F が **局所 Lipschitz 連続** であるとは，任意の $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ に対して ϕ の近傍 U が存在して，F が $U \cap \mathrm{dom}(F)$ において Lipschitz 連続となることを言う．定理 3.3 は，RFDE に対する **Picard-Lindelöf の定理** とでも言うべきものである．

定理 3.3 の証明は定理 3.1 の証明と同じく積分方程式 (3.2) を不動点問題に持ち込むが，この場合には縮小写像の原理*12 を用いる．その詳細は省略するが，[9, Section 4.1] を参照されたい．逐次近似法を用いた議論については [39, Section 3.3] も参照されたい．

注 3.4. 証明には縮小写像の原理を用いるので，定理 3.3 は未知関数 x が Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ ではなく無限次元 Banach 空間に値を取るときも成り立つ．一方で，定理 3.1 にはコンパクト性

*11 いくつかバージョンがあるが，次を用いればよい．**Schauder の不動点定理**：「X を Banach 空間，$C \subset X$ を凸な有界閉集合，$T\colon C \to C$ を連続写像とする．このとき，$T(C)$ が相対コンパクトならば，T は不動点を持つ.」証明は与えられていないが，[21, Lemma 2.4 in Chapter 2] を参照されたい.

*12 **縮小写像の原理**：「X を完備距離空間とする．このとき，縮小写像 $T\colon X \to X$ はただ 1 つの不動点を持つ.」

(Ascoli-Arzelà の定理，Heine-Borel の定理) を用いるので，未知関数 x が無限次元 Banach 空間に値を取るときは一般には成り立たない．

3.2　微分差分方程式とステップ法

ODE (2.3) に対しても，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が局所 Lipschitz 連続であることは (2.3) の初期値問題の解が一意に存在するための十分条件であった．f が局所 Lipschitz 連続であれば (2.4) で定義される $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ も局所 Lipschitz 連続であるから，定理 3.3 はこの ODE に対する結果の自然な拡張と言える．一方で，RFDE は過去依存性を備えている．この観点から言うと，次の例が示すように，F が局所 Lipschitz 連続であるという仮定は必ずしも自然ではない．

例 3.5. 連続写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $\tau > 0$ に対して，微分差分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t-\tau)) \tag{3.3}$$

を考える．$\tau \in (0,r]$ に対して，連続写像 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を

$$F(\phi) \coloneqq f(\phi(-\tau)) \tag{3.4}$$

と定めることで (3.3) は RFDE として書けるのであるが，f が局所 Lipschitz 連続でなければ F もそうとは限らない．しかし，微分差分方程式 (3.3) は任意の $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ に対して，初期条件 $x_0 = \phi$ の下での一意的な大域解を持つ．これは $t \in [0,\tau]$ に対しては

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(\phi(s-\tau))\,\mathrm{d}s$$

として一意的な解を得ることができ，あとはこれを区間 $[\tau,2\tau],[2\tau,3\tau],\ldots$ ごとに繰り返せばよい．

同様の考察は，連続写像 $f\colon \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^m \to \mathbb{R}^n$ と $\tau_1,\ldots,\tau_m > 0$ に対する微分差分方程式 (2.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau_1),\ldots,x(t-\tau_m))$$

に対しても行うことができる．この場合には $\tau \coloneqq \min_{1\le i\le m}\tau_i$ と置くと，初期条件 $x_0 = \phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ の下で微分差分方程式 (2.1) は，$t \in [0,\tau]$ において非自励系の ODE

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \phi(t-\tau_1),\ldots,\phi(t-\tau_m)) \quad (t \in [0,\tau])$$

になる．したがって，(2.1) の解の存在と一意性には関数

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x,y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^n$$

の $((y_1,\dots,y_m)$ に関する一様な) 局所 Lipschitz 連続性があればよい．ただし，微分差分方程式 (3.3) とは異なり，解はすべての $t\geq 0$ で定義されるとは限らない．このように，微分差分方程式の初期値問題の解を求める方法を **ステップ法** (method of steps もしくは step-by-step method) と呼ぶ．ステップ法については，[9, Section 4.1], [7, Section 21 in Chapter V], [21, Section 1.2], [39, Section 3.3] も参照されたい．

3.3　解の存在と一意性定理における条件の吟味

3.3.1　Lipschitz 条件の吟味

第 3.2 小節における考察が示唆するのは，RFDE (2.2) の初期値問題の解の一意性には，$F(\phi)$ において $\phi(\theta)$ の θ が 0 付近の情報が重要であるということである．Halanay and Yorke [10] によると，この洞察は Jones [23] が得ていたようである．たとえば，[31, Definition VI] の特別な場合として，次のような Lipschitz 条件を考えることができる．

定義 3.6. $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\supset \mathrm{dom}(F)\to\mathbb{R}^n$ を写像とする．このとき，次が成り立つような $r_0\in(0,r)$ と $L>0$ が存在するとき，F は **短期記憶に関して Lipschitz** であると言う：任意の $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{dom}(F)$ に対して，$\mathrm{supp}(\phi_1-\phi_2)\subset[-r_0,0]$ ならば，

$$|F(\phi_1)-F(\phi_2)|\leq L\|\phi_1-\phi_2\|.$$

各 $\phi\in\mathrm{dom}(F)$ に対して ϕ の近傍 U が存在して，F が $U\cap\mathrm{dom}(F)$ において短期記憶に関して Lipschitz であるとき，F は **短期記憶に関して局所 Lipschitz** であると言う．

定義 3.6 の意味で，(3.4) により定義される写像 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ は短期記憶に関して Lipschitz である．なぜならば，$r_0\in(0,\tau)$ と取れば，$\mathrm{supp}(\phi_1-\phi_2)\subset[-r_0,0]$ となる $\phi_1,\phi_2\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$F(\phi_1)=f(\phi_1(-\tau))=f(\phi_2(-\tau))=F(\phi_2)$$

だからである．すなわち，F は短期記憶に関して定数である．定義 3.6 における条件をもう少し弱めて，[31, Definition V] の特別な場合として，次のような条件を考えることができる．以下の記法を用いる．

記法 2. $\phi\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ と $a,b>0$ に対して，

$$\Gamma_\phi(a,b)\coloneqq\left\{x\in C([-r,a],\mathbb{R}^n): x_0=\phi,\ \sup_{t\in[0,a]}|x(t)-\phi(0)|\leq b\right\}$$

と置く．

注 3.7. Halanay and Yorke [10] が述べているように，$\Gamma_\phi(a,b)$ は RFDE (2.2) の初期条件 $x_0=\phi$ の下での解の候補集合である．また，(無限遅れの関数微分方程式の文脈になるが) [24] においては prolongation と呼ばれている．

考える条件は以下である：

(L) 各 $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，次が成り立つような $a, b, L > 0$ が存在する：任意の $x^1, x^2 \in \Gamma_\phi(a, b)$ に対して，

$$\left|F(x^1_t) - F(x^2_t)\right| \le L\left\|x^1_t - x^2_t\right\|$$

が $x^1_t, x^2_t \in \mathrm{dom}(F)$ となるすべての $t \in [0, a]$ に対して成り立つ.

上の条件 (L) を [10, Theorem 1.1] における条件と比較されたい.

注 3.8. $x^1, x^2 \in \Gamma_\phi(a, b)$ に対して，$\mathrm{supp}(x^1_t - x^2_t) \subset [-a, 0] \cap [-r, 0]$ である．また，ϕ の近傍 U に対して，$a, b > 0$ を小さく取れば，任意の $x \in \Gamma_\phi(a, b)$ と $t \in [0, a]$ に対して

$$x_t \in U$$

となるようにできる[*13]．よって，F が短期記憶に関して局所 Lipschitz ならば，F は条件 (L) を満たす.

条件 (L) を用いて，[31, Theorem A] の特別な場合として定理 3.3 を次のように拡張できる.

定理 3.9. $F\colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ は連続かつ $\mathrm{dom}(F)$ は開集合とする．このとき，F が条件 (L) を満たすならば，任意の $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ に対して $a > 0$ が存在して，RFDE (2.2) は初期条件 $x_0 = \phi$ の下で一意的な解 $x\colon [-r, a] \to \mathbb{R}^n$ を持つ.

証明には，積分方程式 (3.2) を不動点問題に帰着させたとき，得られる変換が縮小的であることを確かめればよい．詳細は省略する.

注 3.10. (L) と類似の条件は，Halanay and Yorke [10] によるコメントとは別にさまざまな論文に表れている：

- 中立型関数微分方程式：Melvin [27],
- 無限遅れの関数微分方程式：Seifert [36, (H4)], Kappel and Schappacher [24, (A3)].

中立型関数微分方程式については第 4 節も参照されたい．また，定理 3.9 と [27], [24] における結果を比較されたい.

[*13] これを見るには，$x_t = (x_t - \widetilde{\phi}_t) + \widetilde{\phi}_t$ と分解して，$\|x_t - \phi\| \le \left\|x_t - \widetilde{\phi}_t\right\| + \left\|\widetilde{\phi}_t - \phi\right\|$ と評価すればよい.

3.3.2 F の連続性の仮定の吟味

RFDE (2.2) において，$F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\supset \mathrm{dom}(F)\to\mathbb{R}^n$ の連続性を仮定することは自然ではあるが，この仮定が定理 3.1 の証明のどこに用いられているかを調べる．ここでは，$\mathrm{dom}(F)$ は開集合であると仮定し，初期条件 $x_0=\phi\in\mathrm{dom}(F)$ の下での初期値問題を考える．

第 3.1 小節において議論したように，F の連続性より，連続関数 $x\colon[-r,a]\to\mathbb{R}^n$ に対して関数 $[0,a]\ni t\mapsto F(x_t)\in\mathbb{R}^n$ は連続である．これより，RFDE (2.2) の初期値問題を積分方程式 (3.2) に書き換えることができるのであった．さらに，連続写像は局所的に有界であるので，ϕ の近傍 $U\subset\mathrm{dom}(F)$ と $M>0$ を取って，

$$\sup_{\phi\in U}|F(\phi)|\le M \tag{3.5}$$

とできる．(3.5) により，$a,b>0$ を十分小さく取ることで，積分方程式 (3.2) の右辺により定まる変換を $\Gamma_\phi(a,b)$ 上の自己写像にすることができる．ここでも，($a,b>0$ を十分小さく取ることで) 任意の $x\in\Gamma_\phi(a,b)$ と任意の $t\in[0,a]$ に対して $x_t\in U$ とできることを用いている．得られた自己写像を

$$T\colon\Gamma_\phi(a,b)\to\Gamma_\phi(a,b)$$

と書くことにする．

上の変換に Schauder の不動点定理を用いるためには，T が連続写像でありかつ T の像が相対コンパクトであることを示す必要がある．T の像の相対コンパクト性には Ascoli-Arzelà の定理を適用すればよいが，ここでも (3.5) を用いることになる．

以上の考察より，F の連続性の仮定を緩めてもなお定理 3.1 の主張が成立するためには，以下の性質が満たされていればよい：$U\subset\mathrm{dom}(F)$ を ϕ の近傍とし，$a,b>0$ を $x_t\in U$ が任意の $x\in\Gamma_\phi(a,b)$ と任意の $t\in[0,a]$ に対して成り立つように取る．

(C1) 任意の $x\in\Gamma_\phi(a,b)$ に対して，関数 $[0,a]\ni t\mapsto F(x_t)\in\mathbb{R}^n$ は Lebesgue 可積分である．

(C2) $M>0$ が存在して，任意の $x\in\Gamma_\phi(a,b)$ と任意の $t\in[0,a]$ に対して

$$|F(x_t)|\le M$$

が成り立つ．

(C3) 各 $x\in\Gamma_\phi(a,b)$ に対して，$\Gamma_\phi(a,b)$ における $y\to x$ の極限で

$$\sup_{t\in[0,a]}|F(y_t)-F(x_t)|\to 0$$

が成り立つ．

これらの性質の下で次が成り立つ：

- (C1) により，RFDE (2.2) の初期値問題を積分方程式 (3.2) に書き換えることができる．ただし，(3.2) の右辺の積分は Lebesgue 積分になるので，定理 3.1 における解の概念を次のように拡張する必要がある：(i) $x_0 = \phi$，(ii) 任意の $t \in [0,a]$ に対して $x_t \in \mathrm{dom}(F)$，(iii) $x|_{[0,a]} \colon [0,a] \to \mathbb{R}^n$ は絶対連続で，ほとんどすべての $t \in [0,a]$ に対して $\dot{x}(t) = F(x_t)$.
- (C2) は (3.5) の代替物である．
- (C3) は，$T \colon \Gamma_\phi(a,b) \to \Gamma_\phi(a,b)$ の連続性のために必要である．

注 3.11. 上の意味での解は，非自励系 RFDE に対する Carathéodory 条件の下での解の概念に近い．非自励系 RFDE に対する Carathéodory 条件については，[21, Section 2.6] を参照されたい．文脈がやや異なるが，[5, Lemma 4.4], [35, (H1), (H2), (H3)] も参照されたい．そこで，上の意味での解を **Carathéodory の意味での解** と呼ぶこともあるが，(C1), (C2), (C3) は Carathéodory 条件とは異なる．よって，この文書では上の意味での解を単に **解** と呼ぶことにする．

(C2), (C3) からわかるように，重要なのは ϕ の近傍における F の振る舞いではなく，ϕ の延長による履歴として得られる集合上での F の振る舞いである．このことを印象的に述べるために，以下の記法を導入する．

記法 3. $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ と $a,b > 0$ に対して，

$$\Lambda_\phi(a,b) \coloneqq \{x_t : x \in \Gamma_\phi(a,b),\, t \in [0,a]\}$$

と置く．

上の記法については [32] も参照されたい．これまで用いてきた事実を，$\Lambda_\phi(a,b)$ を用いて補題として述べておく．

補題 3.12. $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ とし，U を ϕ の近傍とする．このとき，$\Lambda_\phi(a,b) \subset U$ となる $a,b > 0$ が取れる．

定理 3.1 の拡張として次の定理を得る．

定理 3.13. $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ とし，ϕ の近傍 U を $U \subset \mathrm{dom}(F)$ となるように取る．また，$a,b > 0$ を $\Lambda_\phi(a,b) \subset U$ となるように取る．このとき，$F \colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ が (C1), (C2), (C3) を満たすならば，RFDE (2.2) は初期条件 $x_0 = \phi$ の下で解 $x \colon [-r,a] \to \mathbb{R}^n$ を持つ．

F が連続ならば (C3) を満たすので，定理 3.13 は定理 3.1 の拡張になっていることに注意する．この事実の証明は，実際，定理 3.1 の証明に含まれている．[31, Proof of Theorem 4.4]

も参照されたい．

興味深いことは，(L) から (C3) が導かれることである．したがって，(C3) を (L) に取り替えても定理 3.13 の主張は成り立つが，この場合の証明には縮小写像の原理を用いることができる．したがって，（局所）解の一意性まで保証される．

定理 3.14. $\phi \in \mathrm{dom}(F)$ とし，ϕ の近傍 U を $U \subset \mathrm{dom}(F)$ となるように取る．また，$a, b > 0$ を $\Lambda_\phi(a, b) \subset U$ となるように取る．このとき，$F\colon C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ が (C1), (C2), (L) を満たすならば，RFDE (2.2) は初期条件 $x_0 = \phi$ の下で一意的な解 $x\colon [-r, a] \to \mathbb{R}^n$ を持つ．

ほぼ同様の主張は [10, Theorem 1.1] に述べられている．[32] も参照されたい．また，(C1), (C2), (C3) と [24, (A2)] を比較されたい．

3.4　RFDE が定める半流れ

RFDE (2.2) が初期条件 (3.1) の下での一意的な大域解 $x(\cdot;\phi)\colon [-r, \infty) \to \mathbb{R}^n$ を持つとき，各時刻 $t \geq 0$ における “力学系的状態” は $x(\cdot;\phi)$ の t における履歴切片 $x(\cdot;\phi)_t$ と考えなければならない．これは，次で定義される $\mathrm{dom}(F) \subset C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ における **半流れ** $\varPhi_F\colon [0, \infty) \times \mathrm{dom}(F) \to \mathrm{dom}(F)$

$$\varPhi_F(t, \phi) := x(\cdot;\phi)_t \tag{3.6}$$

が力学系としての対象であることを意味する．したがって，RFDE のダイナミクスの力学系的考察には，無限次元力学系のフレームワークが必要である．

注 3.15. 解 $x(\cdot;\phi)$ がすべての $t \geq 0$ で定義されるとは限らないときは，半流れではなく局所半流れを考えることになる．位相空間における連続な局所半流れに関する一般的な文献として [3] を挙げる．

4　RFDE と遅延微分方程式 (DDE)

4.1　遅延微分方程式 (DDE) の定義

ここで，これまで曖昧にしてきた遅延微分方程式 (DDE) あるいは「時間遅れを持つ微分方程式」の（必ずしも数学的でない）定義を述べることにする．未知関数 $x = x(t)$ の時刻 $t \in \mathbb{R}$ における導値 $\dot{x}(t)$ が x の t 以前の情報 にも依存するような微分方程式を **遅延微分方程式** (DDE) または **時間遅れを持つ微分方程式** と呼ぶ．「x の t 以前の情報」というのをきちんと表現しなければ数学的な定義とは言えないが，系統だった研究を目指さない限りはこれで十分

である．未知関数 x の t における履歴切片は x の区間 $[t-r,t]$ への制限

$$x|_{[t-r,t]}\colon [t-r,t] \to \mathbb{R}^n$$

の平行移動であるから，上の定義により RFDE は遅延微分方程式 (DDE) である．また，DDE も RFDE と同じように過去依存性を備えている．RFDE の定式化と形式は過去依存性の抽象化を通した DDE の（1つの）数学的定式化を与えていると言える．

4.2　中立型方程式

RFDE の定義からわかるように，RFDE が表現する DDE においては，導値 $\dot{x}(t)$ の x の過去の情報への依存性はある正の数 $r > 0$ に対する $x|_{[t-r,t]}$ への依存性として常に書かれる．また，RFDE (2.2) の右辺に現れる $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n) \supset \mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^n$ は連続であるから，$\dot{x}(t)$ の $x|_{[t-r,t]}$ の導関数への依存性も想定されていない．これらは，それぞれ RFDE (2.2) が表現する DDE は有限遅れでありかつ非中立型であることを意味する．ここで，未知関数 $x = x(t)$ の時刻 $t \in \mathbb{R}$ における導値 $\dot{x}(t)$ が x の導関数の t 以前の情報 にも依存するような DDE を **中立型** と呼ぶ．この用語は，対応する FDE を **中立型の FDE** (FDE of neutral type) または **中立型関数微分方程式** (neutral functional differential equation; NFDE) と呼ぶことに由来すると思われる．この文書ではこれ以上 NFDE に触れることはしないが，NFDE についてはたとえば [21] を参照されたい．

4.3　RFDE と DDE の差異

RFDE と DDE の差異を考える上で重要なことは，RFDE (2.2) においては初期履歴関数および履歴切片 x_t が属する空間（ここでは，**履歴関数空間** と呼ぶ）として連続関数空間 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ の部分集合 $\mathrm{dom}(F)$ を指定していることにある．もちろん，これはこれまで述べてきた Krasovskii による思想を反映しているわけではあるが，別の関数空間を採用する余地も残されているはずである．たとえば，微分差分方程式 (2.1) において，$\tau_1,\dots,\tau_m > 0$ をパラメータと考える．すると，(2.1) を RFDE (2.2) として表して得られる F にもこれらのパラメータが含まれることになる．具体的には，

$$F(\phi;\tau_1,\dots,\tau_m) \coloneqq f(\phi(0),\phi(-\tau_1),\dots,\phi(-\tau_m))$$

となる．上で定まる写像 $F\colon C([-r,0],\mathbb{R}^n)\times(0,\infty)^m \to \mathbb{R}^n$ は連続であるが，一般には微分可能でない．したがって，遅れのパラメータ $\tau_1,\dots,\tau_m > 0$ に関する解の微分可能性は，RFDE の理論からは従わない．これは，遅れのパラメータが通常のパラメータとは異なる性質を持っていることを意味する．ここに，履歴関数空間として連続関数よりも reguralityのよい関数空間（たとえば，Sobolev 空間）を選択する余地が生じる．詳細は [19] を参照されたい．[33] も参照されたい．

5　おわりに

この文書では，遅れ型関数微分方程式 (RFDE) の導入とその過去依存性の観点での解説を行った．一部，説明の仕方が [2, Section 2] と重複しているところがあるがその切り口は異なる．また，その基礎理論（初期値問題の解の存在と一意性）に関して，標準的とはなっていない内容についても取り扱った．解の初期条件に関する連続依存性も議論するべきであるが，紙数の都合上，省略せざるを得なかった．遅延微分方程式 (DDE) の力学系理論について議論する機会があれば，そのときに譲りたい．また，微分差分方程式の解の振る舞いが時間遅れのない常微分方程式 (ODE) とどのように異なるかや，状態依存の遅れを持つ微分方程式の取り扱いについても議論したかったが，これらについても省略せざるを得なかった．状態依存の遅れを持つ方程式については，[2, Subsections 2.5 and 2.6] も参照されたい．さらに，無限遅れの関数微分方程式も履歴関数空間の選択という観点から興味深く，日本人数学者の貢献も大きい分野である．これについても省略したが，興味のある読者は日本語によるレビュー記事 [30] および書籍 [22] を参照されたい．合わせて，[31] も参照されたい．

■謝辞　この原稿を執筆する機会を与えてくださった，2021 年度 RIMS 共同研究（公開型）「時間遅れ系と数理科学：理論と応用の新たな展開に向けて」の研究代表者である青山学院大学の中田行彦先生にお礼申し上げます．

参考文献

[1] 内藤 敏機，原 惟行，日野 義之，宮崎 倫子，『タイムラグをもつ微分方程式—関数微分方程式入門—』，牧野書店，2002.

[2] 西口 純矢，「時間遅れがもたらす無限次元性と超越性」，2021 年度 RIMS 共同研究（公開型）「力学系理論の最近の進展とその応用」講究録，13–29，2022．著者原稿：`https://researchmap.jp/junya_nishiguchi/misc/36776017`.

[3] N. P. Bhatia and O. Hájek, *Local semi-dynamical systems*, Lecture Notes in Math., Vol. 90. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969. `https://doi.org/10.1007/BFb0079585`.

[4] R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York-London, 1963.

[5] M. C. Delfour and S. K. Mitter, *Hereditary differential systems with constant delays. I. General case*, J. Differential Equations **12** (1972), 213–235; erratum, ibid. **14** (1973), 397. `https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90030-7`.

[6] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther, *Delay Equations. Functional, complex, and nonlinear analysis*, Appl. Math. Sci., Vol. 110.

Springer-Verlag, New York, 1995. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4206-2.

[7] R. D. Driver, *Ordinary and delay differential equations*, Appl. Math. Sci., Vol. 20. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9467-9.

[8] T. Erneux, *Applied delay differential equations*, Surv. Tutor. Appl. Math. Sci., Vol. 3. Springer, New York, 2009. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74372-1.

[9] A. Halanay, *Differential equations: Stability, oscillations, time lags*, Academic Press, New York-London 1966.

[10] A. Halanay and J. A. Yorke, *Some new results and problems in the theory of differential-delay equations*, SIAM Rev. **13** (1971), 55–80. https://doi.org/10.1137/1013004.

[11] J. K. Hale, *A stability theorem for functional-differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 942–946. https://doi.org/10.1073/pnas.50.5.942.

[12] J. K. Hale, *Geometric theory of functional differential equations*, INTERN. SYMP. ON DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DYNAMICAL. No. NASA-CR-70260. 1965.

[13] J. K. Hale, *Dynamical systems and stability*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 39–59. https://doi.org/10.1016/0022-247X(69)90175-9.

[14] J. K. Hale, *Functional differential equations*, Appl. Math. Sci., Vol. 3. Springer-Verlag New York, New York-Heidelberg, 1971. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9968-5.

[15] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Second edition. Appl. Math. Sci., Vol. 3. Springer-Verlag, New York, 1977. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2.

[16] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monogr., Vol. 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. http://dx.doi.org/10.1090/surv/025.

[17] J. K. Hale, *History of delay equations*, in: Delay differential equations and applications, 1–28, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Vol. 205, Springer, Dordrecht, 2006. https://doi.org/10.1007/1-4020-3647-7_1.

[18] J. K. Hale and E. F. Infante, *Extended dynamical systems and stability theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **58** (1967), 405–409. https://doi.org/10.1073/pnas.58.2.405.

[19] J. K. Hale and L. A. C. Ladeira, *Differentiability with respect to delays*, J. Differential Equations **92** (1991), no. 1, 14–26. https://doi.org/10.1016/0022-0396(91)90061-D.

[20] J. K. Hale, L. T. Magalhães and W. M. Oliva, *Dynamics in infinite dimensions*, With an appendix by Krzysztof P. Rybakowski. Second edition. Appl. Math. Sci., Vol. 47.

Springer-Verlag, New York, 2002. https://doi.org/10.1007/b100032.

[21] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Appl. Math. Sci., Vol. 99. Springer-Verlag, New York, 1993. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7.

[22] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, *Functional-differential equations with infinite delay*, Lecture Notes in Math., Vol. 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991. https://doi.org/10.1007/BFb0084432.

[23] G. S. Jones, *Hereditary structure in differential equations*, Math. Systems Theory **1** (1967), 263–278. https://doi.org/10.1007/BF01703824.

[24] F. Kappel and W. Schappacher, *Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations*, J. Differential Equations **37** (1980), no. 2, 141–183. https://doi.org/10.1016/0022-0396(80)90093-5.

[25] J. Kato, *Systems of linear functional differential equations*, (Japanese), Sūgaku **20** (1968), 86–95. https://doi.org/10.11429/sugaku1947.20.86.

[26] N. N. Krasovskii, *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*, Translated by J. L. Brenner Stanford University Press, Stanford, Calif. 1963.

[27] W. R. Melvin, *A class of neutral functional differential equations*, J. Differential Equations **12** (1972), 524–534. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90023-X.

[28] A. D. Myshkis, *On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument*, Russ. Math. Surv. **32** (1977), 181–213. https://doi.org/10.1070/RM1977v032n02ABEH001623.

[29] A. D. Myshkis and L. E. El'sgol'ts, *Some results and problems in the theory of differential equations*, Russ. Math. Surv. **22** (1967), 19–57. https://doi.org/10.1070/RM1967v022n02ABEH001209.

[30] T. Naito and Y. Hino, *Functional-differential equations with infinite delay*, (Japanese), Sūgaku **37** (1985), no. 4, 338–352. https://doi.org/10.11429/sugaku1947.37.338.

[31] J. Nishiguchi, *A necessary and sufficient condition for well-posedness of initial value problems of retarded functional differential equations*, J. Differential Equations **263** (2017), no. 6, 3491–3532. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.04.038.

[32] J. Nishiguchi, *Theory of well-posedness for delay differential equations via prolongations and C^1-prolongations:its application to state-dependent delay*, arXiv:1810.05890.

[33] J. Nishiguchi, *C^1-smooth dependence on initial conditions and delay: spaces of initial histories of Sobolev type, and differentiability of translation in L^p*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2019, Paper No. 91, 32 pp. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.91.

[34] S. H. Saperstone, *Semidynamical systems in infinite-dimensional spaces*, Appl. Math. Sci., vol. 37. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. https:doi.org/10.1007/978-1-4612-5977-0.

[35] K. Sawano, *Some considerations on the fundamental theorems for functional-differential equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. **25** (1982), no. 1, 97–104.

[36] G. Seifert, *Positively invariant closed sets for systems of delay differential equations*, J. Differential Equations **22** (1976), no. 2, 292–304. https://doi.org/10.1016/0022-0396(76)90029-2.

[37] G. R. Sell and Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Appl. Math. Sci., vol. 143. Springer-Verlag, New York, 2002. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5037-9.

[38] S. N. Shimanov, *On the stability in the critical case of a zero root for systems with time lag*, Prikl. Mat. Meh. **24** (1960), 447–457 (Russian); translated as J. Appl. Math. Mech. **24** (1960), 653–668. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90172-6.

[39] H. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Texts Appl. Math., Vol. 57. Springer, New York, 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7646-8.

[40] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Second edition. Appl. Math. Sci., **68**. Springer-Verlag, New York, 1997. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3.

[41] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton Mathematical Series, Vol. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.