差分方程式の Stokes 構造について

社本陽太

2022 年 10 月 18 日 講演

1. Introduction/Abstract

今回の城崎代数幾何学シンポジウムの講演では, mild と呼ばれるクラスの差分加群について, 対応する Stokes 構造を定式化し構成した最近の著者の結果 [3] をアナウンスしました. 加えて, この研究で定義した Stokes 構造を用いて, どのような研究への応用が期待されるのかについて説明しました. ここでは, 報告集の性質を鑑みて, 応用可能性より手前の主結果についてのみ説明します.

概略としては, 研究の背景となった Deligne-Malgrange による一変数有理型接続の茎に対する Riemann-Hilbert 対応について説明した後, その mild 差分類似である本講演の主結果について説明します. 専門家以外の方にも読んでいただきたいと考え, 講演では既知であると仮定した事柄についても記述しました.

Acknowledgement

講演の機会をくださった世話人の池田京司先生, 稲場道明先生, 深澤知先生にお礼申し上げます. また, 著者の拙い講演を聞いてくださった皆様, 講演時に有益な質問をくださった稲場道明先生, 桑垣樹先生, 望月拓郎先生に感謝いたします. 本研究は JSPS20K14280 の助成を受けています.

2. Background

本研究の背景には, 複素領域の線形微分方程式に関連した Deligne-Malgrange による Riemann-Hilbert 対応があります. 既知の読者も多いことは承知の上で, 記号の導入も兼ねて, この点について説明します.

2.1. Stalks of meromorphic connections (in one complex variable)

有理型接続の茎について説明します. 収束 Laurent 級数体を $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ とおきます. この体には変数 z に関する微分 ∂_z が自然に作用します. 有理型接続の茎 (a stalk of a meromorphic connection) とは, 有限次元 K ベクトル空間 M とその上の $\mathbb{C}$ 線形写像 $\nabla_{\partial_z}\colon M \to M$ の組 (M, ∇_{∂_z}) であって, Leibniz 則 $\nabla_{\partial_z}(fv) = \partial_z(f)v + f\nabla_{\partial_z}v \ (f \in K, v \in M)$ を満たすものを言います. 二つの有理型接続の茎 $M = (M, \nabla_{\partial_z})$ と $N = (N, \nabla_{\partial_z})$ に対して, M から N への射 $h\colon M \to N$ とは, K 線形写像であって, 接続との可換性 $\nabla_{\partial_z} \circ h = h \circ \nabla_{\partial_z}$ が成り立つものを言います. 以上により定まる有理型接続の茎の圏を $\mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ と書くことにします. この圏は, 自然に Abel 圏の構造を持つことがわかります.

有理型接続の茎は, 複素線形常微分方程式の特異点周りの局所的な構造を抽象化した対象です. K 係数の微分作用素環 $D = K\langle\partial_z\rangle/\langle\partial_z f - f\partial_z - \frac{df}{dz} : f \in K\rangle$ と, その要素である n 階の線形微分作用素 $P(z, \partial_z) = a_n(z)\partial_z^n + a_{n-1}(z)\partial_z^{n-1} + \cdots + a_1\partial_z + a_0 \ (a_i(z) \in K, a_n(z) \in K \setminus \{0\})$ を考えます. このとき, P が生成する左イデアル $DP \subset D$ による商加群 $M = D/DP$ を考えると, M は n 次元 K ベクトル空間であり, 左作用 $\partial_z\cdot\colon M \to M$ によって組 $(M, \partial_z\cdot)$ は $\mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ の対象となります. 逆に, 全ての $\mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ の対象はこのように得られる対象と同型になることも知られています (cyclic vector の存在).

2.2. Real (oriented) blow up and functions with fixed asymptotic behaviour

有理型接続の茎が定める微分方程式の「解全体」の構造を記述するものとして, 円周上の Stokes フィルター付き局所系について説明します. そのためにまず, 複素平面の原点における実ブローアップ

$$\widetilde{\mathbb{C}} := \{(z, e^{i\theta}) \in \mathbb{C} \times S^1 \mid z = |z|e^{i\theta}\} \xrightarrow{\varpi} \mathbb{C}, \quad (z, e^{i\theta}) \mapsto z$$

を用いた漸近解析の用語を準備します. この写像 $\varpi\colon \widetilde{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ は, 原点を除いた部分 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で同相写像であり, 原点におけるファイバー $\varpi^{-1}(0)$ が円周 S^1 となっています. この円周 $\varpi^{-1}(0) = S^1$ は, $\widetilde{\mathbb{C}}$ の (多様体としての) 境界にもなっています. 二つの自然な埋め込み $\widetilde{\jmath}\colon \mathbb{C}^* \to \widetilde{\mathbb{C}}$ と $\widetilde{\imath}\colon S^1 \to \widetilde{\mathbb{C}}$ が $\widetilde{\jmath}(z) = (z, z/|z|)$ 及び $\widetilde{\imath}(e^{i\theta}) = (0, e^{i\theta})$ によって定義されます. 以上をまとめると次の図式になります:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \arrow[r, "\widetilde{\jmath}"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathbb{C}} \arrow[d, "\varpi"] & S^1 \arrow[l, "\widetilde{\imath}"'] \arrow[d] \\
\mathbb{C}^* \arrow[r] & \mathbb{C} & \{0\} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

原点を除いた複素平面 $\mathbb{C}^*$ 上の正則関数全体のなす層を $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}$ とおきます. 層の理論における標準的な操作を用いて, S^1 上の層 $\widetilde{\mathscr{O}}$ を $\widetilde{\mathscr{O}} := \widetilde{\imath}^{-1}\widetilde{\jmath}_*\mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}$ によって定義します. 開集合 $\widetilde{U} \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ に対して, $\widetilde{\jmath}_*\mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}(\widetilde{U}) = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}(\widetilde{U} \setminus S^1)$ であり, 感覚的には, この層 $\widetilde{\mathscr{O}}$ は, 原点付近の角領域における正則関数を記述する層であると考えられます. そこで, 原点付近の漸近挙動を定めた層として, moderate growth な正則関数のなす層 $\mathscr{A}^{\leqslant 0}$ と rapid decay な正則関数のなす層 $\mathscr{A}^{<0}$ を $\widetilde{\mathscr{O}}$ の部分層として, 次で定義します.

Definition 2.1.

- 各開集合 $\widetilde{U} \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ に対して, $f \in \mathscr{A}^{\mathrm{mod}}(\widetilde{U})$ とは,
  (a) $f \in \widetilde{\jmath}_*\mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}(\widetilde{U}) = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}(\widetilde{U} \setminus S^1)$ かつ,
  (b) 任意のコンパクト集合 $\mathbf{K} \subset \widetilde{U}$ に対して, ある自然数 $N_{\mathbf{K}}$ と正定数 $C_{\mathbf{K}}$ が存在して, 全ての点 $z \in K \setminus S^1 \subset \mathbb{C}^*$ に対して不等式 $|f(z)| < C_{\mathbf{K}}|z|^{-N_{\mathbf{K}}}$ が成り立つこと.

  同様に, $f \in \mathscr{A}^{\mathrm{rd}}(\widetilde{U})$ とは, 上の条件 (a) に加えて, 条件 (b) の代わりに次の条件が成り立つこと: 任意のコンパクト集合 $\mathbf{K} \subset \widetilde{U}$ と任意の自然数 N に対して, ある正の定数 $C_{\mathbf{K},N}$ が存在して, 全ての $z \in K \setminus S^1$ に対して不等式 $|f(z)| < C_{\mathbf{K},N}|z|^N$ が成り立つ.
- 上で定まる $\widetilde{\jmath}_*\mathscr{O}_{\mathbb{C}^*}$ の部分層 $\mathscr{A}^{\mathrm{mod}}, \mathscr{A}^{\mathrm{rd}}$ に対して, $\mathscr{A}^{\leqslant 0} := \widetilde{\imath}^{-1}\mathscr{A}^{\mathrm{mod}}$, $\mathscr{A}^{<0} := \widetilde{\imath}^{-1}\mathscr{A}^{\mathrm{rd}}$ と定める.

2.3. Stokes structure (Stokes filtered local systems)

以上の準備のもとで, Stokes フィルター付き局所系について説明します. まず, 円周 S^1 上の ($\mathbb{C}$-) 局所系とは, S^1 上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間のなす層 $\mathcal{L}$ であって, 局所的には有限次元ベクトル空間のなす定数層と同型 ($\forall x \in S^1, \exists U \ni x$: open s.t. $\mathcal{L}_{|U} \simeq \mathbb{C}_U^r$) であるようなものを言います. ここに適切なフィルターを定めるのですが, そのときに用いる「指数 (index)」自体が順序付きの層の構造をなしています.

Definition 2.2. 層 $\widetilde{\mathscr{O}}$ の部分層 $\mathcal{I}$ を, $\mathfrak{a}(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^{-k/m} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{>0}, a_k \in \mathbb{C})$ の形の関数で代表される切断全体のなす $\mathbb{C}$-部分ベクトル空間の層として定める. そして, 各開集合 $U \subset S^1$ に対して, $\mathcal{I}(U)$ 上の半順序 $\leqslant_U$ を, $\mathfrak{a} \leqslant_U \mathfrak{b} \Leftrightarrow e^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} = \exp(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \in \mathscr{A}^{\leqslant 0}(U)$ で定義する. 同様に, $\mathfrak{a} <_U \mathfrak{b} \Leftrightarrow e^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} \in \mathscr{A}^{<0}(U)$ と定める (これは, $\mathfrak{a} \leqslant_U \mathfrak{b}$ かつ $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ と同値であることが確かめられます).

この順序付き層 $\mathcal{I}$ を添字として, 部分層の族をフィルターとして定義します.

Definition 2.3. 円周 S^1 上の $\mathbb{C}$ 加群の層 $\mathcal{L}$ に対して, $\mathcal{L}$ 上の前 Stokes フィルターとは, $\mathbb{C}$ 部分加群の層の族 $\mathcal{L}_{\leqslant \bullet} = \{\mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}} \subset \mathcal{L}_{|U} \mid U \subset S^1\colon \text{open}, \mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)\}$ であって, 以下の条件を満たすものをいう:

1. 二つの開集合 $U \supset V$ と切断 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)$, $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(V)$ に対して, $\mathfrak{a}_{|V} = \mathfrak{b}$ ならば, $(\mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}})_{|V} = \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{b}}$.

2. 二つの切断 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{I}(U)$ に対して, $\mathfrak{a} \leqslant_U \mathfrak{b}$ ならば, $\mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}} \subset \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{b}}$.

$\mathbb{C}$ 加群の層 $\mathcal{L}$ 上に前 Stokes フィルター $\mathcal{L}_{\leqslant \bullet}$ が与えられたとすると, 部分加群 $\mathcal{L}_{<\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U))$ が

$$\mathcal{L}_{<\mathfrak{a}} \coloneqq \sum_{\mathfrak{b} <_U \mathfrak{a}} \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{b}}$$

で定まります. そして, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L}) \coloneqq \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}}/\mathcal{L}_{<\mathfrak{a}}$ とおくと, 各開集合 $U \subsetneq S^1$ 毎に $\mathrm{gr}\mathcal{L}_{|U} = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)} \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L})$ を満たす $\mathbb{C}$ 加群の層 $\mathrm{gr}\mathcal{L}$ が定まり, 自然に前 Stokes フィルターを持ちます.

Definition 2.4. 円周上の局所系 $\mathcal{L}$ 上の前 Stokes フィルター $\mathcal{L}_{\leqslant \bullet}$ が Stokes フィルターであるとは, 任意の点 $x \in S^1$ に対して, x の近傍 U と $\mathbb{C}$ 加群の層の同型 $\eta\colon \mathrm{gr}\mathcal{L}_{|U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{|U}$ が存在して,

1. 全ての $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)$ に対して, $\eta(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L})) \subset \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}}$ が成り立ち, かつ

2. 商射との合成射 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}} \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(\mathcal{L})$ が恒等射であること.

円周上の局所系とその上の Stokes フィルターの組 $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\leqslant \bullet})$ を Stokes フィルター付き局所系 (Stokes filtered local system) あるいは単に Stokes 構造と呼ぶ. また, Stokes 構造 $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_{\leqslant \bullet})$ からもう一つの Stokes 構造 $(\mathcal{L}', \mathcal{L}'_{\leqslant \bullet})$ への射とは, 層の射 $\xi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ であって, 全ての開集合 $U \subset S^1$ と切断 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)$ に対して, $\xi_{|U}(\mathcal{L}_{\leqslant \mathfrak{a}}) \subset \mathcal{L}'_{\leqslant \mathfrak{a}}$ を満たすものをいう. このようにして定まる Stokes 構造の圏を $\mathsf{St}(\mathbb{C})$ と書く.

2.4. De Rham complexes and Riemann-Hilbert functor

2 つの圏 $\mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ と $\mathsf{St}(\mathbb{C})$ を結びつけるのが, Deligne-Malgrange による有理型接続の茎に対する Riemann-Hilbert 対応です. まず, $M \in \mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ の S^1 上の de Rham 複体を次で定義します:

$$\widetilde{\mathrm{DR}}(M) = [\widetilde{\mathscr{O}} \otimes_{K_{S^1}} M_{S^1} \xrightarrow{\widetilde{\nabla}_{\partial_z}} \widetilde{\mathscr{O}} \otimes_{K_{S^1}} M_{S^1}].$$

ここで, K_{S^1} や M_{S^1} は定数層を表し, テンソル積は自然な射 $K_{S^1} \to \widetilde{\mathscr{O}}$ を通じて与えられています. そして $\widetilde{\nabla}_{\partial_z}$ は $\widetilde{\nabla}_{\partial_z}(f \otimes v) = \partial_z(f) \otimes v + f \otimes \nabla_{\partial_z}(v)$ $(f \in \widetilde{\mathscr{O}}, v \in M)$ によって定まります. 複体の次数は, 0 と 1 に集中しているとします. 線形微分方程式の解の存在と初期値に対する一意性より, 0 次コホモロジー $\mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(M)$ が S^1 上の局所系を定めることがわかります. また, 各 $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(U)$ に対して, $\mathrm{DR}_{\leqslant \mathfrak{a}}(M) = [e^{\mathfrak{a}}\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{|U} \otimes_{K_U} M_U \xrightarrow{\widetilde{\nabla}_{\partial_z}} e^{\mathfrak{a}}\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{|U} \otimes_{K_U} M_U]$ と定めると, 部分層 $\mathscr{H}^0\mathrm{DR}_{\leqslant \mathfrak{a}}(M) \subset \mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(M)_{|U}$ が得られます. 冒頭で述べた Deligne-Malgrange の定理は, 次のようなものです:

Theorem 2.5 (Deligne-Malgrange [1, 2])**.** 任意の $M \in \mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0)$ に対して, 組

$$\mathrm{RH}(M) = (\mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(M), \mathscr{H}^0\mathrm{DR}_{\leqslant \bullet}(M))$$

は, Stokes フィルター付き局所系である. さらにこの対応は圏同値 $\mathrm{RH}\colon \mathsf{Mero}(\mathbb{C}, 0) \to \mathsf{St}(\mathbb{C})$ を与える.

主張自体は上のように比較的短い準備のもとで述べられますが, その証明には, 微分方程式論における古典的な結果を複数用いる必要があります. また, この定理は, 現在では複素多様体上のホロノミック $\mathscr{D}$ 加群の Riemann-Hilbert 対応へと一般化されています. そして, 一般化において Deligne-Malgrange による Stokes 構造の定義は (形式的には定式化を異にしているものの) 基本的な意義を持っています.

3. Main result

本稿で説明する主結果は, 微分方程式論における上述の定理の差分方程式論における類似です. ただし, 技術的な条件として, mild と呼ばれるクラスの差分加群に限定して定理を定式化しています. 以下では, まず mild 差分加群について説明した後, 著者が導入したこの加群に対する Stokes 構造の定義を説明し, 最後に主結果を述べます. なお, 前節で導入した記号を以下でも一部利用します.

3.1. Mild difference modules

まず, 有理型接続の茎の類似として, 差分加群を定義します. 前節と同様 $K=\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ を収束 Laurent 級数体とし, その上の自己同型 $\phi\colon K\to K$ を $\phi(f)(z)=f(\frac{z}{1+z})$ で定めます. この自己同型 ϕ は, $s=z^{-1}$ としたときのシフト $s\mapsto s+1$ に対する引き戻しと対応しています. ここで, ((K,ϕ) 上の) 差分加群とは, 有限次元 K ベクトル空間 $\mathscr{M}$ とその上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての自己同型 $\psi\colon \mathscr{M}\to\mathscr{M}$ の組であって, 関係式 $\psi(fv)=\phi(f)\psi(v)$ $(f\in K, v\in\mathscr{M})$ を満たすものを言います. 差分加群の間の射も自然に定義され, 差分加群のなす圏を Diffc と書きます (Difference の略).

差分加群ももちろん差分方程式との自然な対応がありますが, それを繰り返す代わりに, mild 差分加群を定義するのに必要な具体例をいくつか導入します. まず, 行列 $G\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$ に対して組 $\mathscr{R}_G=(K^r,\psi_G)$ を $\psi_G=(1+z)^{-G}\phi^{\oplus r}$ で定めると差分加群になります ($(1+z)^{-G}=\exp(-G\log(1+z))\in\mathrm{GL}_r(K)$). また, 正の整数 m に対して, $K_m=\mathbb{C}\{\zeta\}[\zeta^{-1}]$ を $K\to K_m, z\mapsto\zeta^m$ によって K の拡大体とみなし, 自己同型 $\phi_m: K_m\to K_m$ を $\phi_m(f)(\zeta)=f(\zeta(1+\zeta^m)^{-1/m})$ で定めると, 組 (K_m,ϕ_m) は差分加群となります.

もう少し具体例を続けます. 上述の定義より一般に, 環 R と自己同型 $\Phi\colon R\to R$ の組 (R,Φ) を差分環と呼び, R が体のとき差分体と呼ばれます. また, 差分環上の差分加群の概念を (「有限次元」を「有限生成」に置き換えることで) 同様に定義できます. 例えば, 組 (K_m,ϕ_m) は差分体の構造をもち, (K_m,ϕ_m) 上の差分加群という概念を定義できます. ここでは, (K_m,ϕ_m) 上の差分加群として代表的な次の加群を導入します. 整数 k と複素数の列 $c_1,\dots,c_m$ に対して, 多価関数 $\mathfrak{a}(\zeta)$ を

$$\mathfrak{a}(\zeta)=k\zeta^{-m}\log(\zeta)+\sum_{\ell=1}^{m}c_\ell\zeta^{-\ell} \tag{3.1}$$

で定めると, $\exp(\phi_m(\mathfrak{a})-\mathfrak{a})$ は K_m の元を定めることが確かめられます. そこで, 組 $\mathscr{E}^{\mathfrak{a}}=(K_m,\psi_{\mathfrak{a}})$ を $\psi_{\mathfrak{a}}=\exp(\phi_m(\mathfrak{a})-\mathfrak{a})\phi_m$ とおくと, $\mathscr{E}^{\mathfrak{a}}$ は, (K_m,ϕ_m) 上の差分加群となります. また, (K,ϕ) 上の差分加群 $\mathscr{M}$ に対して, テンソル積 $K_m\otimes_K\mathscr{M}$ は自然に (K_m,ϕ_m) 上の差分加群となります. 後で用いる例として, 特に, $\mathscr{E}^{\mathfrak{a}}\otimes_K\mathscr{R}_G\simeq\mathscr{E}^{\mathfrak{a}}\otimes_{K_m}(K_m\otimes_K\mathscr{R}_G)$ は (K_m,ϕ_m) 上の差分加群となります.

さて, mild 差分加群を定義するために必要な最後のステップは, 差分加群の形式的な分解定理です. 正の整数 m に対し, $\widehat{K}_m=\mathbb{C}(\!(\zeta)\!)$ を K_m の形式的完備化とし, 自己同型 $\widehat{\phi}\colon\widehat{K}_m\to\widehat{K}_m$ を先と同様に $\widehat{\phi}_m(f)(\zeta)=f(\zeta(1+\zeta^m)^{-1/m})$ で定めると, 組 $(\widehat{K}_m,\widehat{\phi})$ は差分体です. (K_m,ϕ_m) 上の差分加群 $\mathscr{M}$ に対して, $\widehat{K}_m\otimes_{K_m}\mathscr{M}$ は自然に $(\widehat{K}_m,\widehat{\phi})$ 上の差分加群となります. 次の定理は, 差分加群の形式的な分解定理 (formal decomposition theorem) として知られています:

Theorem 3.6 (c.f. References in [4]). 任意の差分加群 $\mathscr{M}\in\mathsf{Diffc}$ に対して, ある正の整数 m と (3.1) の形の有限個の多価関数 $\mathfrak{a}_i$, 行列 G_i $(i=1,2,\dots,n)$ 及び $(\widehat{K}_m,\widehat{\phi}_m)$ 上の差分加群の同型

$$\widehat{K}_m\otimes_K\mathscr{M}\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}\widehat{K}_m\otimes_{K_m}(\mathscr{E}^{\mathfrak{a}_i}\otimes_K\mathscr{R}_{G_i}) \tag{3.2}$$

が存在する. また, このような同型が存在する最小の m と $\{\mathscr{E}^{\mathfrak{a}_i}\otimes_K\mathscr{R}_{G_i}\}_{i=1}^{n}$ の同型類はそれぞれ一意.

この形式的な分解定理を念頭に, mild 差分加群は次で定義されます.

Definition 3.7. 差分加群 $\mathscr{M} \in \mathsf{Diffc}$ が mild とは, 形式分解 (3.2) において, 全ての $\mathfrak{a}_i$ が (3.1) の表示 $\mathfrak{a}_i(\zeta) = k_i\zeta^{-m}\log(\zeta) + \sum_{\ell=1}^{m} c_{i,\ell}\zeta^{-\ell}$ において $k_i = 0$, つまり非自明な $\zeta^{-m}\log\zeta$ の項を持たないこと.

Mild 差分加群のなす Diffc の充満部分 Abel 圏を $\mathsf{Diffc}^{\mathrm{mild}}$ と書きます.

3.2. Stokes filtered $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$-modules

差分加群の「解全体」の構造を記述することで Riemann-Hilbert 対応を考えたいところですが, 「微分して 0 な関数=定数」全体に比べて, 「差分して 0 な関数=周期関数」全体が大きすぎるために微分方程式に対する Stokes フィルター付き局所系のような良い構造を取り出すことは困難なように思われます. そこで, 「全ての解」を考える代わりに, 「漸近挙動の良い解全体」を考えることで, 元の mild 差分加群を復元するのに十分なだけの構造を取り出そう, というのが基本的なアイデアです.

このアイデアをより正確に説明するために, まず §2.2 で導入した層 $\widetilde{\mathscr{O}}$ は, $\widetilde{\phi}(f)(z) = f(z(1+z)^{-1})$ によって差分環の層の構造を持つ点に注意します. 先ほどの説明で「周期関数全体が大きするぎる」と書いたことの正確な意味は, $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathrm{per}} := \mathrm{Ker}[\widetilde{\mathscr{O}} \xrightarrow{\widetilde{\phi}-\mathrm{id}} \widetilde{\mathscr{O}}]$ が大きすぎるという意味です. 一方で, $\widetilde{\phi}$ は, 部分環の層 $\mathscr{A}^{\leqslant 0}$ や $\mathscr{A}^{<0}$ を保つので, これらも差分環の層とみなせます. そこで, 同様に $\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{\mathrm{per}} := \mathrm{Ker}[\mathscr{A}^{\leqslant 0} \xrightarrow{\widetilde{\phi}-\mathrm{id}} \mathscr{A}^{\leqslant 0}]$, $\mathscr{A}^{<0}_{\mathrm{per}} := \mathrm{Ker}[\mathscr{A}^{<0} \xrightarrow{\widetilde{\phi}-\mathrm{id}} \mathscr{A}^{<0}]$ とおきます. 次の補題は本研究のアイデアの種となった観察です:

Lemma 3.8. 二つの実数 $a < b$ に対して, $(a, b) = \{e^{i\theta} \in S^1 \mid a < \theta < b\}$ とし, $u = \exp(2\pi i z^{-1})$ とおく. このとき, 空でない $yutj$ 連結な開集合 $U \subset S^1$ に対して, 次が成り立つ:

$$\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{\mathrm{per}}(U) = \begin{cases} \mathbb{C}\{u^{-1}\} & (U \subset (0,\pi)) \\ \mathbb{C}\{u\} & (U \subset (-\pi, 0)) \\ \mathbb{C} & (U \cap \{e^0, e^{i\pi}\} \neq \emptyset), \end{cases} \qquad \mathscr{A}^{<0}_{\mathrm{per}}(U) = \begin{cases} u^{-1}\mathbb{C}\{u^{-1}\} & (U \subset (0,\pi)) \\ u\mathbb{C}\{u\} & (U \subset (-\pi, 0)) \\ 0 & (U \cap \{e^0, e^{i\pi}\} \neq \emptyset). \end{cases}$$

ここで, $\mathbb{C}\{v\}$ は v に関する収束冪級数環を表します. この補題から, $\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{\mathrm{per}}$ あるいはそれを拡張した $\mathscr{A}_{\mathrm{per}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^n \mathscr{A}^{\leqslant 0}_{\mathrm{per}} \subset \widetilde{\mathscr{O}}$ を用いることで, 良い構造を取り出したいというのが基本的なアイデアです.

前置きはこのくらいにして, mild 差分加群に対する Stokes 構造を定義していきます. まず, $\mathscr{I} \subset \mathcal{I}$ を, $\mathfrak{a}(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k z^{-k/m} \quad (m \in \mathbb{Z}_{>0}, a_k \in \mathbb{C})$ の形の和のなす部分層として定義します (最も特異性の高い項が z^{-1} まで, という制限がついています). 半順序 $\leqslant_U$ は $\mathcal{I}$ 上に定まるものを $\mathscr{I}$ 上に制限して定めます.

Definition 3.9. $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群 $\mathscr{L}$ 上の前 Stokes フィルターとは, 層の族

$$\mathscr{L}_{\leqslant\bullet} = \{\mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}} \subset \mathscr{L}_{|U} \colon \mathscr{A}^{\leqslant 0}_{\mathrm{per}|U}\text{-submodule} \mid U \subset S^1 \colon \mathrm{open}, \mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)\}$$

であって, 以下の 3 つの条件を満たすものをいう:

1. 二つの開集合 $U \supset V$ と切断 $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)$, $\mathfrak{b} \in \mathscr{I}(V)$ に対して, $\mathfrak{a}_{|V} = \mathfrak{b}$ ならば, $(\mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}})_{|V} = \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{b}}$.
2. 二つの切断 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathscr{I}(U)$ に対して, $\mathfrak{a} \leqslant_U \mathfrak{b}$ ならば, $\mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}} \subset \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{b}}$.
3. 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ と $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)$ に対して, $u^n \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}} = \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}+2\pi i n z^{-1}}$ が成り立つ.

定義と比較すると, 条件 3 が新たに加えられている点に注意してください. §2.3. と同様に, $\mathscr{L}_{<\mathfrak{a}}$ や $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\mathscr{L}$ 及び $\mathrm{gr}\mathscr{L}$ が定義されますが, 条件 3 により, $\mathrm{gr}\mathscr{L}$ は $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ 加群の層の構造を持ち, $\mathscr{A}_{\mathrm{per}} \otimes_{\mathbb{C}[u,u^{-1}]} \mathrm{gr}\mathscr{L}$ には自然に前 Stokes フィルターが定まります.

Definition 3.10. 局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群 $\mathscr{L}$ 上の前 Stokes フィルター $\mathscr{L}_{\leqslant\bullet}$ が Stokes フィルターであるとは, 任意の点 $x \in S^1$ に対して, x の開近傍 U と $\mathscr{A}_{\mathrm{per}|U}$ 加群の同型 $\eta\colon (\mathscr{A}_{\mathrm{per}} \otimes_{\mathbb{C}[u,u^{-1}]} \mathrm{gr}\mathscr{L})_{|U} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{|U}$ が存在して, 次の二つの条件を満たすこと：

1. 全ての $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)$ に対して, $\eta(\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}}$ が成り立つ.
2. 全ての $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)$ に対して, 商射との合成射 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\mathscr{L} \xrightarrow{\eta} \mathscr{L}_{\leqslant\mathfrak{a}} \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}\mathscr{L}$ は恒等射である.

局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群 $\mathscr{L}$ とその上の Stokes フィルター $\mathscr{L}_{\leqslant\bullet}$ の組 $(\mathscr{L}, \mathscr{L}_{\leqslant\bullet})$ を Stokes フィルター付き局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群と呼ぶ. 通常の (有理型接続の茎に対する)Stokes 構造の定義と同様にして, Stokes フィルター付き局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群の圏を定め, これを $\mathsf{St}(\mathscr{A}_{\mathrm{per}})$ と書く.

3.3. Riemann-Hilbert correspondence

2つの圏 $\mathsf{Diffc}^{\mathrm{mild}}$ と $\mathsf{St}(\mathscr{A}_{\mathrm{per}})$ を結びつけるのが, 本研究の主結果である mild 差分加群に対する Riemann-Hilbert 対応です. Mild 差分加群 $\mathscr{M} = (\mathscr{M}, \psi) \in \mathsf{Diffc}^{\mathrm{mild}}$ に対して, de Rham 複体を次で定義します:

$$\widetilde{\mathrm{DR}}(\mathscr{M}) = [\widetilde{\mathscr{O}} \otimes_{K_{S^1}} \mathscr{M}_{S^1} \xrightarrow{\widetilde{\psi}-\mathrm{id}} \widetilde{\mathscr{O}} \otimes_{K_{S^1}} \mathscr{M}_{S^1}].$$

ここで, $\widetilde{\psi}$ は, $\widetilde{\psi}(f \otimes v) = \widetilde{\phi}(f) \otimes \psi(v)$ ($f \in \widetilde{\mathscr{O}}$, $v \in \mathscr{M}$) で定義します. この複体の 0 次コホモロジー層 $\mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(\mathscr{M})$ をとってもうまくいかない (局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群がえられない) ので, 少し工夫をします. まず, 各 $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)$ に対して, $\mathrm{DR}_{\leqslant\mathfrak{a}}(\mathscr{M}) = [e^{\mathfrak{a}}\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{|U} \otimes_{K_U} \mathscr{M}_U \xrightarrow{\widetilde{\psi}-\mathrm{id}} e^{\mathfrak{a}}\mathscr{A}^{\leqslant 0}_{|U} \otimes_{K_U} \mathscr{M}_U]$ と定めると, 先と同様に部分層 $\mathscr{H}^0\mathrm{DR}_{\leqslant\mathfrak{a}}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(\mathscr{M})_{|U}$ が得られます. すると, 部分加群 $\mathrm{Per}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{H}^0\widetilde{\mathrm{DR}}(\mathscr{M})$ が存在して, 各開集合 $U \subsetneq S^1$ に対して,

$$\mathrm{Per}(\mathscr{M})_{|U} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(U)} \mathscr{H}^0\mathrm{DR}_{\leqslant\mathfrak{a}}(\mathscr{M})$$

が成り立ちます. 本研究の主定理は以下のように述べられます:

Theorem 3.11 (S. [3])**.** 任意の $\mathscr{M} \in \mathsf{Diffc}^{\mathrm{mild}}$ に対して, 組

$$\mathrm{RH}(\mathscr{M}) = (\mathrm{Per}(\mathscr{M}), \mathscr{H}^0\mathrm{DR}_{\leqslant\bullet}(\mathscr{M}))$$

は Stokes フィルター付き局所自由 $\mathscr{A}_{\mathrm{per}}$ 加群であり, 圏同値 $\mathrm{RH}\colon \mathsf{Diffc}^{\mathrm{mild}} \to \mathsf{St}(\mathscr{A}_{\mathrm{per}})$ が定まる.

証明には, 差分加群に関する古典的な結果 ([4] とそこで引用されている文献を参照) を駆使します.

References

[1] Pierre Deligne, Bernard Malgrange, and Jean-Pierre Ramis. *Singularités irrégulières*, volume 5 of *Documents Mathématiques (Paris)*. Société Mathématique de France, Paris, 2007. Correspondance et documents.

[2] B. Malgrange. *La classification des connexions irrégulières à une variable.* In *Mathematics and physics (Paris, 1979/1982)*, volume 37 of *Progr. Math.*, pages 381–399. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[3] Yota Shamoto. *Stokes structure of mild difference modules.* arXiv:2212.10753, 2022.

[4] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.