Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification

光明 新

概要

本稿では，城崎代数幾何学シンポジウム 2022 での著者の講演をもとに，レンヌ第一大学の Frank Loray 氏，神戸学院大学の齋藤政彦氏との共同研究 [20] の結果を説明する．

1　導入

C を複素非特異射影曲線とし，D をその上の有効因子とする．組み (C, D) 上の (準) 放物束について考察する．特に今回は C が射影直線で，(準) 放物束の階数が 2 の場合を詳細に調べることにする．この場合で D が被約のときに知られていた結果を，D が被約とは限らない場合に拡張することを目標とする．まずこの節では放物束の一般論について復習し，次節で C が射影直線で，階数が 2，さらに D が被約のときに知られていた結果を復習する．

まず r と ν は正の整数とする．また $n, n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ も正の整数とし，

$$\sum_{i=1}^{\nu} n_i = n$$

をみたすものとする．$t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ を C 上の相異なる点とし，C 上の有効因子 $n_1[t_1] + \cdots + n_\nu[t_\nu]$ を D とおく．

定義 1.1. 一般に (C, D) 上の **(準) 放物束** $(E, \mathbf{l} = \{l_i^j\}_{1\leq i\leq \nu}^{0\leq j\leq r-1})$ とは，階数 r の C 上のベクトル束 E と $E|_{n_i[t_i]}$ の自由 $\mathcal{O}_{n_i[t_i]}$-加群によるフィルトレーション

$$E|_{n_i[t_i]} = l_i^0 \supset l_i^1 \supset \cdots \supset l_i^{r-1} \supset l_i^r = 0,$$

の組みのことである．ただし任意の i, j に対して $l_i^j/l_i^{j+1} \cong \mathcal{O}_{n_i[t_i]}$ をみたすとする．またこのフィルトレーションを E の t_i 上の**放物構造**と呼ぶ．　□

D が被約の場合の放物束は Mehta–Seshadri [23] によって導入された．ここでの放物束は，上の (準) 放物束 $(E, \mathbf{l})$ に放物重み $\boldsymbol{\alpha}$ を加えた組みのことであり，この放物重みは，放物束の良いモジュライ空間を構成するための安定性条件の定義に使われる．安定重み $\boldsymbol{\alpha}$ を固定したとき，$\boldsymbol{\alpha}$-半安定放物束のモジュライ空間は [23], [6], [9] の中で構成されている．また，この放物重みを動かしたときのモジュライ空間の変化は [11], [5], [25], [14] などで研究されている．D が被約とは限らない場合の放物束は，例えば [7], [8] の中で調べられた．このような放物束に対しても安定性条件が導入され，この場合の $\boldsymbol{\alpha}$-半安定放物束のモジュライ空間が [8] の中で構成された．最終的には横川氏によってより一般的な形で放物束は定式化され，その安定性条件の導入とモジュライ空間の構成がなされた ([27], [28])．

通常，放物束といえば，ベクトル束 E，フィルトレーション $\mathbf{l}$，放物重み $\boldsymbol{\alpha}$ の組みからなるが，この報告書ではベクトル束とフィルトレーションの組みを放物束と呼ぶことにする．(このような組みは通常，準放物束と呼ばれる)．放物重みを省いて考える理由として，我々がモノドロミー保存変形に興味があることが挙げられる．

次に放物束とモノドロミー保存変形の関係について議論する．稲場氏・岩崎氏・齋藤氏は一連の論文 [16], [17], [15] の中で放物接続を導入し，そのモジュライ空間を構成し，モノドロミー

保存変形の研究にこのモジュライ空間を応用した．まずこれについて簡単に振り返る．ベクトル束 E と，ライプニッツ則をみたす $\mathbb{C}$-写像 $\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_C(D)$ の組みを**接続**といい，さらに接続と両立するフィルトレーション

$$E|_{n_i[t_i]} = l_i^0 \supset l_i^1 \supset \cdots \supset l_i^{r-1} \supset l_i^r = 0,$$

の三つ組を**放物接続**と呼ぶのであった．(ここでも任意の i, j に対して $l_i^j/l_i^{j+1} \cong \mathcal{O}_{n_i[t_i]}$ をみたすとする)．

D が被約な場合は，放物重み $\boldsymbol{\alpha}$ に対して安定性条件が [16], [15] の中で導入され，$\boldsymbol{\alpha}$ を一般に取れば $\boldsymbol{\alpha}$-安定と $\boldsymbol{\alpha}$-半安定が同値になるようにでき，そのような放物重み $\boldsymbol{\alpha}$ を固定する．このとき [16], [15] の中で $\boldsymbol{\alpha}$-安定放物接続のモジュライ空間がスムースな準射影的スキームとして構成された．D が被約とは限らない場合の放物接続は [18] の中で研究されている．この放物接続は不分岐型不確定特異点を持つ線形常微分方程式に対応するため，この場合，放物接続を**不分岐型不確定放物接続**と呼ぶことにする．不分岐型不確定放物接続についても放物重み $\boldsymbol{\alpha}$ に対して安定性条件が導入され，$\boldsymbol{\alpha}$-安定不分岐型不確定放物接続のモジュライ空間が [18] においてスムースな準射影的スキームとして構成された．

$\boldsymbol{\alpha}$-安定放物接続のモジュライ空間や $\boldsymbol{\alpha}$-安定不分岐型不確定放物接続のモジュライ空間は，放物接続や不分岐型不確定放物接続のモノドロミー保存変形が幾何学的パンルヴェ性を持つことの証明において重要な役割を果たしたのであった．またこれらのモジュライ空間上には自然なシンプレクティック形式が入り，この事実はモノドロミー保存変形 (例えばパンルヴェ方程式) がハミルトン系の表示を持つことに対応している．このようにモノドロミー保存変形の研究にこれらのモジュライ空間は有用であるが，これらのモジュライ空間を調べる上で，放物束は有用であることが知られている．実際，(不分岐型不確定) 放物接続から接続を忘れることで，放物束を得る．ここで注意しなければならないのが，下部の放物束が $\boldsymbol{\alpha}$-安定ならば，(不分岐型不確定) 放物接続も $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるが，逆は成り立たないことである．そのため，接続を忘れることで得られる写像は，例えば，$\boldsymbol{\alpha}$-安定 (不分岐型不確定) 放物接続のモジュライ空間の，下部の放物束が $\boldsymbol{\alpha}$-安定である部分から，$\boldsymbol{\alpha}$-安定放物束のモジュライ空間への写像ということになる．この写像は (アフィン束や，ラグランジアンファイブレーションになるなどの) 良い性質をみたすことが期待されている．

これまでの議論は，下部のベクトル束の階数は一般の r，また下部の複素非特異射影曲線も一般にとっていたが，これからは階数は 2，下部の複素非特異射影曲線は射影直線であるとする．つまり我々の放物束 $(E, \mathbf{l})$ は，階数 2 の $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 E と，$\mathbf{l} = \{l_i\}_{1 \le i \le \nu}$ の組みからなる．ただし，各 i に対して，$l_i \subset E|_{n_i[t_i]}$ は長さ n_i の $E|_{m_i t_i}$ の自由 $\mathcal{O}_{n_i[t_i]}$-部分加群とする．つまり我々は特殊な場合しか考えないが，対応するモノドロミー保存変形は十分に興味深い対象を含む．実際，この場合のモノドロミー保存変形は

- $D = [t_1] + [t_2] + [t_3] + [t_4]$ の場合は**パンルヴェ VI 型方程式**に;
- $\deg(D) \ge 5$ で D が被約な場合は**ガルニエ系**に;
- D が $D = [t_1] + [t_2] + 2[t_3]$, $D = [t_1] + 3[t_2]$, $D = 2[t_1] + 2[t_2]$, $D = 4[t_1]$ の場合はそれぞれ，**パンルヴェ V 型**, **パンルヴェ IV 型**, **パンルヴェ III($D_6^{(1)}$) 型**, **パンルヴェ II 型方程式**に;
- $\deg(D) \ge 5$ で D が被約でない場合はいくつかの**不確定ガルニエ系**に対応する．

さらに，モノドロミー保存変形の文脈のみならず，[3], [4], [13] では幾何学的ラングランズ問題の視点からもこれらの場合が研究されている．

2 D が被約な場合

我々の目的は，D が被約な場合に知られている放物束に関する結果を D が被約とは限らない場合に拡張することである．そこで今から，$D = [t_1] + \cdots + [t_\nu]$ と置いたときに知られている，今回の研究に関連する放物束についての結果を復習する．ここで $t_1, \ldots, t_\nu$ は $\mathbb{P}^1$ 上の相異なる点とする．

まず, $\Lambda = (\lambda_i^+, \lambda_i^-)_{1 \leq i \leq \nu}$ は $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda_i^+ + \lambda_i^-) + d = 0$ をみたす複素数の組みとする．ここで Λ に対して, $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq \nu} \in \{+, -\}$ の任意の選択について $\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i^{\epsilon_i} \notin \mathbb{Z}$ をみたすという条件を課す．Λ がこの条件をみたしている場合, この Λ は**一般**である, ということにする．

定義 2.1. 一般の Λ に対して **Λ-放物接続**とは, 接続 $(E, \nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D))$ と, $\mathbf{l} = \{l_i\}_{1 \leq i \leq \nu}$ の組みからなる．ただし, ∇ の各 t_i における留数行列の固有値は λ_i^+ と λ_i^- であるとし, l_i は固有値 λ_i^+ に対する固有空間であるとする． $\square$

定義 2.2. 放物束 $(E, \mathbf{l})$ が **Λ-平坦**であるとは, $(E, \mathbf{l})$ に対して $(E, \nabla, \mathbf{l})$ が Λ-放物接続となるような $\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ が存在するときにいう． $\square$

放物束 $(E, \mathbf{l})$ がいつ Λ-平坦になるかの判定法は [3, Proposition 3] で与えられており, 次が成り立つ:

$$\mathrm{End}(E, \mathbf{l}) = \mathbb{C} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ が } \Lambda\text{-平坦} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ が直既約.} \tag{1}$$

$\mathfrak{Bun}(D, d)$ を $(\mathbb{P}^1, D)$ 上, 次数 d の直既約放物束の粗モジュライ空間とする．この Λ-平坦性の判定法から, 接続を忘れるという写像についての Λ-放物接続のモジュライ空間の像が $\mathfrak{Bun}(D, d)$ ということになる．ここで Λ が一般であることから, Λ-放物接続は既約となる．この既約性よりこの Λ-放物接続は自動的に安定性条件をみたすことに注意する．このように $\mathfrak{Bun}(D, d)$ は接続を忘れるという写像の像になるのだが, [3], [2], [21] において観察されているように, 一般にはハウスドルフ空間 (または分離スキーム) にならない.

分離スキームとして構成するための一つの方法として, 放物束の安定性条件の導入がある．重み $\boldsymbol{w} = (w_i)_{1 \leq i \leq \nu} \in [0, 1]^{\nu}$ を固定し, [21, Definition 2.2] にあるようにこの重みに対して安定性条件を定義する．次数 d の $\boldsymbol{w}$-半安定放物束のモジュライ空間を $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ とおく．この $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ は正規射影多様体として構成されることが知られている．そして $\boldsymbol{w}$-安定な部分からなる開集合ではスムースである．ここで $\boldsymbol{w}$ を一般に取れば, $\boldsymbol{w}$-半安定と $\boldsymbol{w}$-安定が同値となり, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ はスムースな射影多様体となる．もし $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ が空でないならば, その次元は $n - 3$ となる．一方で, [21, Proposition 3.4] によって次が知られている:

$$(E, \mathbf{l}) \text{ が直既約} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ が } \boldsymbol{w}\text{-安定となるような重み } \boldsymbol{w} \text{ が存在.} \tag{2}$$

この事実により, 次数 d の直既約放物束の粗モジュライ空間 $\mathfrak{Bun}(D, d)$ は, 重み $\boldsymbol{w}$ を変えることにより, スムースな射影多様体 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ によって覆われることになる.

例えば $\deg(D) = 4$ または $\deg(D) = 5$ の場合を考える．この場合 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ の次元はそれぞれ $1, 2$ となる．これらのモジュライ空間 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ は, いくつかの重み $\boldsymbol{w}$ に対して, 具体的な曲線または曲面としての描像をもつ．ここではこれについて復習する．実数 $w \in [0, 1]$ を固定し, 重み $\boldsymbol{w}$ は

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_{\nu} = w$$

をみたすとする．重み $\boldsymbol{w}$ がこのような形をしている場合, $\boldsymbol{w}$ を**均一重み**と呼ぶことにする. $\deg(D) = 4$ で $d = -1$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ の具体的描像は次のようになる

- $0 < w < \frac{1}{4}, \frac{3}{4} < w < 1$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1)$ は空;
- $\frac{1}{4} < w < \frac{1}{2}$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1) = \mathbb{P}^1$;
- $\frac{1}{2} < w < \frac{3}{4}$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1) = \mathbb{P}^1$.

そして粗モジュライ空間 $\mathfrak{Bun}(D, d)$ は, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1) \cong \mathbb{P}^1$ $(\frac{1}{4} < w < \frac{1}{2})$ と $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1) \cong \mathbb{P}^1$ $(\frac{1}{2} < w < \frac{3}{4})$ の, $t_1, \ldots, t_4$ の外側での貼り合わせとして実現される ([21, Section 3.7])．次に $\deg(D) = 5$ and $d = -1$ の場合を考える．$\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, d)$ の具体的描像は次のようになる:

- $0 < w < \frac{1}{5}$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1)$ は空;
- $\frac{1}{5} < w < \frac{1}{3}$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1) = \mathbb{P}^2$;
- $\frac{1}{3} < w < \frac{3}{5}$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1)$ は次数 4 のデルペッゾ曲面となり;
- $\frac{3}{5} < w < 1$ の場合, $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1)$ は次数 5 のデルペッゾ曲面となる.

([21, Section 6.1], [13, Proposition 3.11])．d が偶数の場合, [13, Theorem 3.2] に詳細な記述がある．$\deg(D) = 5$ の場合, $\mathfrak{Bun}(D, -1)$ を覆うためには均一重みのみを考えるのは十分ではない．均一重みに対するモジュライ空間 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D, -1)$ に適切な初等変換を作用させるこ

とで, 新にモジュライ空間 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}'}(D,-1)$ を得るが, この重み $\boldsymbol{w}'$ は一般に均一とは限らない. この初等変換を考えることで $\mathfrak{Bun}(D,-1)$ を覆うことができる. もし均一重みが

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_\nu = \frac{1}{2}$$

をみたす場合は, 初等変換によって得られるモジュライ空間 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}'}(D,-1)$ の重みは $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}$ となる. つまりこのような均一重みの場合, 初等変換は $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D,-1)$ 上の自己同型を引き起こす. [1] ではこの視点からモジュライ空間 $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ の自己同型群について研究している.

3 主結果について

以上のような D が被約な場合の結果を, D が被約とは限らない場合に拡張することを考える.

3.1 Λ-平坦性について

まずは (1) の対応物について議論する. まず $\Lambda = (\lambda^+, \lambda^-)$ とおく. ただし $\lambda^\pm \in \Omega^1(D)/\Omega^1$ とする. D が被約な場合と同様に, 一般の Λ に対して成り立つような条件を Λ に課すことにする.

定義 3.1. **Λ-不分岐型不確定放物接続**とは, 接続 $(E, \nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D))$ と, $\mathbf{l} = \{l_i\}_{1\leq i\leq\nu}$ の組みからなる. ただし,

- D における接続の主要部の対角化は, λ^+ と λ^- を対角成分とする対角行列となり,
- 各 l_i は ∇ と λ^+ に関する両立条件をみたす. すなわち $s|_{n_i[t_i]} \in l_i$ をみたすような E の t_i の近傍における任意の切断 s に対して, $\nabla(s) - \lambda^+ s$ が t_i 上正則となる. □

定義 3.2. $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の放物束が **Λ-平坦**であるとは, $(E, \nabla, \mathbf{l})$ が Λ-不分岐型不確定放物接続になるような $\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ が存在するときにいう. □

もし $\deg(D) = 4$ で $\deg(E)$ が奇数の場合,

$$\mathrm{End}(E, \mathbf{l}) = \mathbb{C} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ は } \Lambda\text{-平坦}$$

であることが [4, Proposition 4.8] において示されている.

定義 3.3.
- 放物束 $(E, \mathbf{l} = \{l_i\}_i)$ が**直可約**であるとは, E の分解 $E = L_1 \oplus L_2$ で, 任意の $i \in I$ に対して, $l_i = l_i^{(1)}$ または $l_i = l_i^{(2)}$ をみたすときにいう. ここで, $l_i^{(1)}$, $l_i^{(1)}$ は次のようにおいた: $l_i^{(1)} := l_i \cap (L_1|_{n_i[t_i]})$; $l_i^{(2)} := l_i \cap (L_2|_{n_i[t_i]})$.
- 放物束 $(E, \mathbf{l})$ が直可約でないとき放物束 $(E, \mathbf{l})$ は**直既約**であるという. □

もし $(E, \mathbf{l})$ が Λ-平坦ならば, $(E, \mathbf{l})$ が直既約であることが, D が被約な場合と同様の議論で示すことができる. しかしその逆は上の $\deg(D) = 4$ で $\deg(E)$ が奇数の場合でも反例が存在する. この場合に逆の主張を通すためには, 次の許容性が必要である:

定義 3.4. 次をみたすときに, 放物束 $(E, \mathbf{l})$ は**許容**であるという:

$$\forall L \subset E,\ \ \deg(E) \leq 2\deg(L) \implies \sum_{i\in I} \mathrm{length}(l_i \cap L|_{n_i[t_i]}) \leq n + \deg(E) - 2\deg(L) - 2.$$

□

[4, Section 4] や [3, Proposition 3] のアイデアを用いることで次を示すことができる:

命題 3.5 ([20, Proposition 9])**.** 一般に次が成り立つ:

$$(E, \mathbf{l}) \text{ は単純} \implies (E, \mathbf{l}) \text{ は } \Lambda\text{-平坦} \implies (E, \mathbf{l}) \text{ は直既約で許容}. \tag{3}$$

□

これが (1) の対応物となる. ここで $(E, \mathbf{l})$ が $\mathrm{End}(E, \mathbf{l}) = \mathbb{C}$ をみたすときに $(E, \mathbf{l})$ を**単純**と呼んでいる. もし $\deg(D) = 4$ で $\deg(E)$ が奇数の場合

$$(E, \mathbf{l}) \text{ は直既約で許容} \implies \mathrm{End}(E, \mathbf{l}) = \mathbb{C}.$$

であることがわかる.

3.2 $\boldsymbol{w}$-安定性について

第二に (2) の対応物を議論する．重み $\boldsymbol{w} \in (w_i) \in [0,1]^\nu$ を固定すると，放物束のこの重みに関する安定性条件を，D が被約の場合にならって定義することができる．この安定性条件に関する $\boldsymbol{w}$-半安定放物束のモジュライ空間を $\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ とおく．ここで，放物束の定義において l_i は自由であることを課したため，$\mathfrak{Bun}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ は射影的であるとは限らないことに注意する．そこで射影的でスムースなモジュライ空間を構成するために次のように精密放物束を導入する．

定義 3.6.
- ベクトル束 E に対して，$l_{i,\bullet} = \{l_{i,k}\}_{1\le k\le n_i}$ をフィルトレーション
$$E|_{n_i[t_i]} \supset l_{i,n_i} \supset l_{i,n_i-1} \supset \cdots \supset l_{i,1} \supset 0$$
とする．ただし各 $l_{i,k}$ は $\mathcal{O}_{n_i[t_i]}$-加群で長さは k であるとする．この $l_{i,\bullet} = \{l_{i,k}\}_{1\le k\le n_i}$ を t_i 上の**精密放物構造**と呼ぶ．
- **精密放物束**を，ベクトル束とその上の精密放物構造の組みと定義する． □

もし l_{i,n_i} が自由であるならば，精密放物構造の概念は上の放物構造の概念と一致する．すなわち，l_{i,n_i} が自由の場合，その精密放物構造は

$$E|_{n_i[t_i]} \supset l_{i,n_i} \supset z_i l_{i,n_i} \supset \cdots \supset z_i^{n_i-1} l_{i,n_i} \supset 0$$

の形に限られる．ここで z_i は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,t_i}$ の極大イデアルの生成元とする．そこで，任意の i に対して l_{i,n_i} が自由の場合の精密放物束も，放物束と呼ぶことにする．

次に精密放物束に対して安定性条件を定義する．まず重み

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_\nu), \quad \boldsymbol{w}_i = (w_{i,n_i}, \ldots, w_{i,1}) \in [0,1]^{n_i} \quad (1 \le i \le \nu),$$

(ただし $0 \le w_{i,n_i} \le \cdots \le w_{i,1} \le 1$) を固定する．さらに，精密放物束 $(E, \mathbf{l})$ と E の部分直線束 L に対して

$$\epsilon_{i,k}(L) := \begin{cases} -1 & \mathrm{length}((l_{i,k} \cap L|_{n_i[t_i]})/(l_{i,k-1} \cap L|_{n_i[t_i]})) \neq 0 \text{ の場合} \\ 1 & \mathrm{length}((l_{i,k} \cap L|_{n_i[t_i]})/(l_{i,k-1} \cap L|_{n_i[t_i]})) = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

とおく．これらに対して

$$\mathrm{stab}_L^{\boldsymbol{w}}(E, \boldsymbol{l}) := \deg(E) - 2\deg(L) + \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{n_i} \epsilon_{i,k}(L) \cdot w_{i,k}$$

とおく．この値を**安定性指数**と呼ぶことにする．

定義 3.7. 精密放物束 $(E, \{l_{i,\bullet}\}_i)$ が，E の任意の部分直線束 L に対して，$\mathrm{stab}_L^{\boldsymbol{w}}(E, \boldsymbol{l}) > 0$ (または $\mathrm{stab}_L^{\boldsymbol{w}}(E, \boldsymbol{l}) \ge 0$) が成り立つとき，$(E, \{l_{i,\bullet}\}_i)$ は **$\boldsymbol{w}$-安定** (または **$\boldsymbol{w}$-半安定**) であるという． □

注意 3.8. この精密放物構造は [24] において，接続のモジュライ空間のコンパクト化の構成においても用いられた．このことについて簡単に振り返る．

$\boldsymbol{\alpha}$-安定 Λ-放物接続のモジュライ空間 (特に D は被約) のコンパクト化は，[16, Proposition 5.6] において，$\boldsymbol{\alpha}$-安定 Λ-ϕ-接続のモジュライ空間として構成された．$\deg(D) = 4$ でかつ $\mathrm{rank}(E) = 2$ の場合，このコンパクト化とその境界因子の組みは，パンルヴェ VI 型方程式の岡本–パンルヴェ対と同型になることが知られている [17]．ここで岡本–パンルヴェ対とは，[26] において導入されたパンルヴェ方程式の岡本初期値空間の自然なコンパクト化とその境界因子の組みのことである．

D が被約でなく，また $\deg(D) = 4$ でかつ $\mathrm{rank}(E) = 2$ の場合は，他のパンルヴェ方程式に対応するが，この場合の $\boldsymbol{\alpha}$-安定 Λ-不分岐型不確定放物接続のモジュライ空間のコンパクト化は [24] において研究された．安直に D が被約の場合に倣って $\boldsymbol{\alpha}$-安定 Λ-ϕ-不分岐型不確定放物接続なるものを導入し，そのモジュライ空間を構成しても，このモジュライ空間は射影的では

あるが, 特異点を持ってしまうことがわかっている. そこで宮崎氏は [24] において (上で定義したのと同じ) 精密放物構造を導入し, スムースなコンパクト化を構成し, このコンパクト化と境界因子の組みが, 他のいくつかのパンルヴェ方程式の岡本–パンルヴェ対と同型であることを示したのであった. □

注意 3.9. この精密放物束の概念は横川氏による [27], [28] における放物束の概念に完全に含まれる. □

放物束の場合と同様に精密放物束に対しても直既約性, 許容性を自然に定義することができる.

注意 3.10. 通常の放物束 (つまり各 l_i が自由) に対して Λ-平坦性を定義したが, 一方で一般の精密放物束に対しては Λ-平坦性を定義することはしない. これは不分岐型不確定放物接続が, その定義において通常の放物構造を持つことを課しているからである. また, この条件を課すことは不分岐型不確定特異点の理論から自然である. □

(2) の対応物を得るためには, 直既約性, 許容性のみを考えるだけでは不十分であることがわかる. つまり, 精密放物束が直既約でかつ許容であるが, 任意の重み $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{w}$-安定にならないような例が存在する.

注意 3.11. さらに, Λ-平坦な放物束で, 任意の重み $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{w}$-不安定になってしまう例も存在する. □

直既約性, 許容性のみを考えるだけでは不十分であるため, 次のように従順性を導入する:

定義 3.12.
- E の部分直線束 L と $i \in I := \{1, 2, \ldots, \nu\}$ に対して, 非負整数 $N_i(L)$ を次で定義する:

$$N_i(L) = \max_{k' \in \{1,2,\ldots,n_i\}} \left\{ \sum_{k=1}^{k'} \epsilon_{i,k}(L) \right\}.$$

  さらに $I_L^+ := \{i \in I \mid N_i(L) > 0\}$ とおく.
- $(E, \{l_{i,\bullet}\}_{i \in I})$ について, E の任意の部分直線束 L に対して,
  (i) I_L^+ は空でない,
  (ii) $-\deg(E) + 2\deg(L) + 1 \leq \sum_{i \in I_L^+} N_i(L)$
  が成り立つときに, $(E, \{l_{i,\bullet}\}_{i \in I})$ は**従順**であるという. □

次を示すことができる:

$$(E, \mathbf{l}) \text{ は直既約で従順である} \implies (E, \mathbf{l}) \text{ は許容である.}$$

(2) の対応物にあたるのが次の定理である:

定理 3.13 ([20, Theorem A])**.** $(E, \mathbf{l})$ を $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の次数 d の精密放物束とする. 次の同値関係が成り立つ:

$$(E, \mathbf{l}) \text{ は直既約でかつ従順である} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ が } \boldsymbol{w}\text{-安定となるような重み } \boldsymbol{w} \text{ が存在.}$$

$(E, \mathbf{l})$ が $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の次数 d の放物束 (つまり任意の i に対して, l_{i,n_i} が自由) の場合, 次の同値関係が成り立つ:

$$(E, \mathbf{l}) \text{ は単純} \iff (E, \mathbf{l}) \text{ が } \boldsymbol{w}\text{-安定となるような重み } \boldsymbol{w} \text{ が存在.}$$

□

3.3 初等変換について

次に精密放物束 $(E, \mathbf{l} = \{l_{i,\bullet}\}_i)$ の初等変換について考察する. まず $i_0 \in I$ をとる. フィルトレーション $l_{i_0,\bullet} \colon E|_{n_{i_0}[t_{i_0}]} \supset l_{i_0,n_{i_0}} \supset l_{i_0,n_{i_0}-1} \supset \cdots \supset l_{i_0,1} \supset 0$ に対して,

$$E_{i_0}^{(k)} := \ker(E \longrightarrow E|_{n_{i_0}[t_{i_0}]}/l_{i_0,k})$$

$(k=0,1,2,\dots,n_{i_0})$ とおくと, このフィルトレーションは次のような層のフィルトレーションと読み替えることができる:

$$E \supset E_{i_0}^{(n_{i_0})} \supset E_{i_0}^{(n_{i_0}-1)} \supset \cdots \supset E_{i_0}^{(1)} \supset E_{i_0}^{(0)} = E(-n_{i_0}[t_{i_0}]).$$

このフィルトレーションから, 次のように新しいフォルトレーションを定義する:

$$\begin{aligned} E'_{i_0} = E_{i_0}^{(n_{i_0})} \supset E_{i_0}^{(0)} \supset E_{i_0}^{(1)}(-[t_{i_0}]) \supset E_{i_0}^{(2)}(-2[t_{i_0}]) \supset \cdots \\ \cdots \supset E_{i_0}^{(n_{i_0}-1)}(-(n_{i_0}-1)[t_{i_0}]) \supset E_{i_0}^{(n_{i_0})}(-n_{i_0}[t_{i_0}]). \end{aligned}$$

この新しいフィルトレーションに対応する精密放物構造を $\mathrm{elm}(l_{i_0,\bullet})$ と書くことにする.

定義 3.14. $(E,\{l_{i,\bullet}\}_{i\in I})$ の t_{i_0} における初等変換を次で定義する

$$\mathrm{elm}_{i_0}(E,\{l_{i,\bullet}\}_{i\in I}) = (E'_{i_0},\{l_{i,\bullet}\}_{i\in I\setminus\{i_0\}} \cup \{\mathrm{elm}(l_{i_0,\bullet})\}).$$

E'_{i_0} の次数は $d-n_{i_0}$ となる. □

次にこの初等変換と安定性条件の関係について議論する. $(E'_{i_0},\mathbf{l}'_{i_0}) = \mathrm{elm}_{i_0}(E,\{l_{i,\bullet}\}_{i\in I})$ とおく. L は E の部分直線束とし, L' を, L と $E'_{i_0} \subset E$ が引き起こす E'_{i_0} の部分直線束とする. 新しい重みを

$$w'_{i,k} = \begin{cases} 1-w_{i,n_{i_0}-k+1} & i=i_0 \text{ かつ } k=1,\dots,n_{i_0} \text{ の場合} \\ w_{i,k} & i\neq i_0 \text{ かつ } k=1,\dots,n_i \text{ の場合} \end{cases}$$

によって定義する.

命題 3.15 ([20, Proposition 43])**.** $\mathrm{Stab}_{\boldsymbol{w}'}(L')$ を L' の $(E'_{i_0},\mathbf{l}'_{i_0})$ と重み $\boldsymbol{w}'=\{w'_{i,k}\}$ に関する安定性指数とする. すると次が成り立つ:

$$\mathrm{Stab}_L^{\boldsymbol{w}}(E,\mathbf{l}) = \mathrm{Stab}_{L'}^{\boldsymbol{w}'}(E'_{i_0},\mathbf{l}'_{i_0}).$$

3.4 モジュライ空間の具体的描像について

$\deg(D)=5$, $\deg(E)=1$, そして重み $\boldsymbol{w}$ が一般の均一重みの場合に, $\boldsymbol{w}$-安定精密放物束のモジュライ空間の具体的描像について議論する. $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ を次数 d の $\boldsymbol{w}$-安定精密放物束のモジュライ空間とする. ここで $\boldsymbol{w}$ が一般であるため, $\boldsymbol{w}$-半安定と $\boldsymbol{w}$-安定が同値になることに注意する. このモジュライ空間 $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ の次元は 2 となる. $\deg(D)=5$ であることから, 有効因子 D は次のうちのどれかになる:

$$\begin{aligned} &D_{2111} := 2[t_1]+[t_2]+[t_3]+[t_4], \quad D_{221} := 2[t_1]+2[t_2]+[t_3], \quad D_{311} := 3[t_1]+[t_2]+[t_3], \\ &D_{32} := 3[t_1]+2[t_2], \qquad D_{41} := 4[t_1]+[t_2], \qquad D_5 := 5[t_1]. \end{aligned}$$

まず $\frac{1}{5}<w<\frac{1}{3}$ の場合, 精密放物束 $(E,\mathbf{l})$ が $\boldsymbol{w}$-安定であることと,

- $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$;
- $(E,\mathbf{l})$ が放物束で直既約; さらに
- 任意の i に対して $l_{i,n_i}^{\mathrm{red}} \not\in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \subset \mathbb{P}(E)$

をみたすことが同値であることが知られている ([20, Proposition 46]). これ用いると次がわかる:

命題 3.16 ([20, Proposition 47])**.** $\frac{1}{5}<w<\frac{1}{3}$ の場合, $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)=\mathbb{P}^2$. □

この命題を用い, 重みを動かしたときの安定性指数の変化を観察することで次の定理を得る:

定理 3.17 ([20, Theorem B])**.** $\deg(D)=5$, $\deg(E)=1$, さらに重み $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{w}_i)_i$ が任意の i に対し $w_{i,1}=w_{i,2}=\cdots=w_{i,n_i}=w$ $(0<w<1)$ をみたしていると仮定する. つまり重み $\boldsymbol{w}$ は均一である.

(i) $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ は次のような具体的描像をもつ:
   - $0<w<\frac{1}{5}$ の場合, $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ は空;

– $\frac{1}{5} < w < \frac{1}{3}$ の場合, $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1) = \mathbb{P}^2$;
– $\frac{1}{3} < w < \frac{3}{5}$ の場合, $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ は次数 4 の弱デルペッゾ曲面となり;
– $\frac{3}{5} < w < 1$ の場合, $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ は次数 5 の弱デルペッゾ曲面となる.

$\frac{1}{3} < w < \frac{3}{5}$ のときの $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ 上の全ての (-2)-曲線からなる有効因子を $\Pi_{-2}(D)$ とおき, $\frac{3}{5} < w < 1$ のときの $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ 上の全ての (-2)-曲線からなる有効因子を $\Pi'_{-2}(D)$ とおく．すると $\Pi_{-2}(D)$ の $\Pi'_{-2}(D)$ のコンフィギュレーションは一致し, そのコンフィギュレーションは $D = D_{2111}$, D_{221}, D_{311}, D_{32}, D_{41}, D_5 の場合, それぞれ A_1, $2A_1$, A_2, $A_2 + A_1$, A_3, A_4 となる.

(ii) もし $(E, \{l_{i,\bullet}\}_i)$ が $\Pi_{-2}(D)$ または $\Pi'_{-2}(D)$ 上の点に対応する精密放物束であるならば, l_{i,n_i} が自由でないような i $(1 \le i \le \nu)$ が存在する．つまり, そのような i では $l_{i,\bullet}$ は (通常の) 放物構造ではない.

(iii) もし $(E, \{l_{i,\bullet}\}_i)$ が
– $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1)$ $(\frac{1}{5} < w < \frac{1}{3})$,
– $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1) \setminus \Pi_{-2}(D)$ $(\frac{1}{3} < w < \frac{3}{5})$, または
– $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,1) \setminus \Pi'_{-2}(D)$ $(\frac{3}{5} < w < 1)$

上の点に対応する精密放物束であるならば, 任意の i に対して l_{i,n_i} は自由となり, さらに $(E, \{l_{i,n_i}\}_i)$ は単純となる．特に, $(E, \{l_{i,n_i}\}_i)$ は, 一般の Λ に対して Λ-平坦となる．□

[12, Section 8.6.3] にはこれらの弱デルペッゾ曲面のリストがある．対応するモノドロミー保存変形は木村氏によって記述は得られている [19]．実際に対応するモノドロミー保存変形は次のようになる:

因子 D	Π_{-2}	モノドロミー保存変形
D_{2111}	A_1	$H(1,1,1,2)$
D_{221}	$2A_1$	$H(1,2,2)$
D_{311}	A_2	$H(1,1,3)$
D_{32}	$A_2 + A_1$	$H(2,3)$
D_{41}	A_3	$H(1,4)$
D_5	A_4	$H(5)$

ここで最後の列の記号は木村氏の [19, pp.39–40] による.

精密放物束のモジュライ空間という視点から, 次数 4 の弱デルペッゾ曲面の幾何学を復元することもできる．重み $\boldsymbol{w}$ が均一で全て $\frac{1}{2}$ の場合, 精密放物束のモジュライ空間は次数 4 の弱デルペッゾ曲面となる．このような視点から, この次数 4 の弱デルペッゾ曲面上の自己交点数が負の数となるような曲線は, ある特殊な精密放物束の軌跡であるという解釈を得る．また, 命題 3.15 から, 重みは均一で全て $\frac{1}{2}$ であることから, この場合の精密放物束の安定性は初等変換によって保たれることがわかる．よって幾つかの初等変換はモジュライ空間 $\overline{\mathfrak{Bun}}_{\boldsymbol{w}}(D,d)$ $(w = \frac{1}{2})$ 上の自己同型を引き起こす．そしてこの初等変換によって, 次数 4 の弱デルペッゾ曲面の全ての自己同型を再構成することができる ([20, Section 6.3]).

謝辞

この度は貴重な講演の機会を与えていただきまして, 世話人の皆様に深く御礼申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 17H06127, 19K14506, 22H00094 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] C. Araujo, T. Fassarella, I. Kaur, A. Massarenti, *On automorphisms of moduli spaces of parabolic vector bundles.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. **3**, 2261–2283.

[2] D. Arinkin, S. Lysenko. *Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$-bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$*. Math. Res. Lett., **4** (2-3):181–190, 1997.

[3] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of $SL(2)$-bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus$*

$\{x_1, \ldots, x_4\}$, Internat. Math. Res. Notices (1997), no. **19**, 983–999.

[4] D. Arinkin, R. Fedorov, *An example of the Langlands correspondance for irregular rank two connections on* $\mathbb{P}^1$. Advances in Math. **230** (2012) 1078–1123.

[5] S. Bauer, *Parabolic bundles, elliptic surfaces and* SU(2)*-representation spaces of genus zero Fuchsian groups*. Math. Ann. **290** (1991), no. 3, 509–526.

[6] U. N. Bhosle. *Parabolic vector bundles on curves*. Ark. Mat., **27** (1): 15–22, 1989.

[7] U. N. Bhosle. *Generalised parabolic bundles and applications to torsionfree sheaves on nodal curves.* Ark. Mat. **30** (1992), no. 2, 187–215.

[8] U. N. Bhosle. *Generalized parabolic bundles and applications. II.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **106** (1996), no. 4, 403–420.

[9] U. N. Bhosle, I. Biswas, *Moduli space of parabolic vector bundles on a curve.* Beitr. Algebra Geom. **53** (2012), no. 2, 437–449.

[10] I. Biswas, Y. I. Holla, C. Kumar. *On moduli spaces of parabolic vector bundles of rank* 2 *over* $\mathbb{CP}^1$. Michigan Math. J., **59** (2): 467–475, 2010.

[11] H. U. Boden, Y. Hu. *Variations of moduli of parabolic bundles.* Math. Ann., **301**(3): 539–559, 1995.

[12] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view.* Cambridge University Press, Cambridge, 2012. xii+639 pp. ISBN: 978-1-107-01765-8

[13] R. Donagi, T. Pantev *Parabolic Hecke eigensheaves* arXiv:1910.02357.

[14] H.-B. Moon, S.-B. Yoo, *Birational geometry of the moduli space of rank 2 parabolic vector bundles on a rational curve.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. **3**, 827–859.

[15] M.-A. Inaba, *Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence.* J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 3, 407–480.

[16] M.-A. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), no. 4, 987–1089.

[17] M.-A. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. II.* Moduli spaces and arithmetic geometry, 387-432, Adv. Stud. Pure Math., **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[18] M.-A. Inaba, M.-H. Saito, *Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve.* Kyoto J. Math. **53** (2013) 433–482.

[19] H. Kimura, *The degeneration of the two-dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **155** (1989), 25–74.

[20] A. Komyo, F. Loray, M.-H. Saito, *Moduli space of irregular rank two parabolic bundles over the Riemann sphere and its compactification*, Advances in Mathematics **412**, part B(3).

[21] F. Loray, M.-H. Saito, *Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line.* Internat. Math. Res. Notices (2015), no. **4**, 995–1043.

[22] F. Loray, M.-H. Saito, C. Simpson. *Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points.* In Geometric and differential Galois theories, volume **27** of Sémin. Congr., pages 115–168. Soc. Math. France, Paris, 2012.

[23] V. B. Mehta, C. S. Seshadri. *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures.* Math. Ann., **248** (3): 205–239, 1980.

[24] K. Miyazaki *On compactifications of moduli of unramified irregular singular connections and Okamoto-Painlevé pairs.* Doctoral thesis, Kobe university (2013).

[25] S. Mukai, *Finite generation of the nagata invariant rings in A-D-E cases*, RIMS Preprint, 1502, 2005.

[26] M.-H. Saito, T. Takebe, H. Terajima, *Deformation of Okamoto-Painlevé pairs and Painlevé equations,* J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 2, 311–362. 220 (2001), 165–229.

[27] K. Yokogawa, *Compactification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves*. Journal of Mathematics of Kyoto University **33**, no. 2 (1993): 451–504.

[28] K. Yokogawa, *Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves*. Internat. J. Math. **6** (1995), no. 1, 125–148.