安定∞圏の族に付随した HODGE 構造の変動族

岩成　勇

1. はじめに

$f : Y \to X$ を複素代数多様体間のスムースで固有な射とする．$Rf_*\Omega^\bullet_{Y/X}$ を考える．この時 $R^q f_*\Omega^\bullet_{Y/X}$ には, Gauss-Manin 接続と Hodge フィルトレーションが入った．さらに, それらが整合的であった．すなわち Griffiths 横断性を満たすように構造が入る．

これは, 城崎代数幾何学シンポジュームで行った私の講演に関する報告書である．代数多様体の族を安定∞圏の族にかえた設定で上記の理論を拡張する私の研究を説明した．ここではそれに関連したことをややリラックスした形で簡略に説明したい．詳しくは [7], [8], [9], [10], [11], [12] を参照していただきたい．

2. 安定∞圏の族

三角圏 T を考える．T が変形していって族をなしているという状況設定を考えたい．これを代数多様体の族に対応する数学的対象と思いたい．ところが三角圏の族をというのは一般に意味のない概念となる．例えば $Y \to X$ を上記のように複素代数多様体間の滑らかで固有な射とする．$D(X)$ と $D(Y)$ をそれぞれ準連接層の導来圏とする．このとき, 感覚的には $D(Y)$ は X 上の三角圏の族を思いたい．実際引き戻し関手 $Lf^* : D(X) \to D(Y)$ を考えると, 対称モノイダル関手になっており, $D(Y)$ をモノイダル三角圏 $D(X)$ 上の加群と思うことができる．ところが X 上の点 $x : \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to X$ に対して基底変換 (base change)$D(Y) \otimes_{D(X)} D(\mathbb{C})$ は（大抵の場合定義できるかも怪しいのであるが定義できたとしても）$D(f^{-1}(x))$ とは一般に一致しない．これは三角圏 $D(Y)$ がホモトピー連接性のデータを失いすぎているということに起因にしている．そこで, 無限圏の状況において数学的な対象を考える必要がある．無限圏（いわゆる $(\infty, 1)$-圏というもの）における三角圏の対応物は安定∞圏 (stable ∞-category) である．無限圏があれば, そのホモトピー圏として普通の圏を得ることができる．安定∞圏はいくつかの条件をみたす無限圏として定義され, そのホモトピー圏として三角圏が現れる．安定∞圏は無限圏で実現された, 三角圏の理想的な形であるといえる．この概念に関しては [14], [15] を参照していただきたい．

スキーム X 上の安定∞圏 $\mathcal{C}$ の定義を次のように与える．$\mathcal{D}(X)$ を X 上の準連接層の導来∞圏（ホモトピー圏として $D(X)$ が現れる）とする．$\mathcal{D}(X)$ には複体の（導来）テンソルによって対称モノイダル構造が入るので対称モノイダル安定∞圏となる．テンソル積関手

$$\otimes : \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(X)$$

を考えると対称モノイダル構造は $\mathcal{D}(X)$ に無限圏のなす圏において可換代数の構造を与えることと等価であることに注意しよう．正確には, 表現可能（presentable）∞圏のなす対称モノイダル∞圏における可換代数（E_∞-代数）とみなせるということである．X 上の安定∞圏とは, $\mathcal{D}(X)$ 上の加群の構造を持つ安定∞圏 $\mathcal{C}$ のことである．たとえば, 代数の作用（の一部）として

$$\mathcal{D}(X) \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

などのデータがついたものと考えてよい．$Lf^* : D(X) \to D(Y)$ の例であれば，これを導来∞圏の引き戻し関手 $Lf^* : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$ に取り換える．するとこれは対称モノイダル関手になるので $\mathcal{D}(Y)$ は自然に $\mathcal{D}(X)$ 上の加群になる．

また，$\mathcal{C}$ が（対象に有限性などを課して得られるような）小さな安定∞圏の場合には $\mathrm{Perf}(X)$ を perfect 複体のなす $\mathcal{D}(X)$ の忠実充満対称モノイダル部分圏として，$\mathcal{C}$ が $\mathrm{Perf}(X)$ 上の加群の構造をもつときその構造込みで $\mathcal{C}$ を X 上の安定∞圏ということにする．

いくつか安定∞圏の族の例を考えよう．

例 2.1. $f : Y \to X$ をスキーム間の射とする．$\mathcal{D}(X)$ と $\mathcal{D}(Y)$ を導来∞圏とする（安定∞圏になる）．$f^* : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$ を引き戻し関手とする．この引き戻しモノイダル関手から，$\mathcal{D}(Y)$ は $\mathcal{D}(X)$ 上の加群になるので X 上の安定∞圏である．$\mathrm{Perf}(Y) \subset \mathcal{D}(Y)$ と $\mathrm{Perf}(X) \subset \mathcal{D}(X)$ をそれぞれの perfect 複体のなす忠実充満圏とする．このとき $\mathrm{Perf}(X)$ も対称モノイダル∞圏となり $\mathrm{Perf}(Y)$ は $\mathrm{Perf}(X)$ 上の加群となる．

例 2.2. X 上の安定∞圏 $\mathcal{C}$ の相対的な局所化で X 上の安定∞圏を得ることができる．幾何学的な例を１つ考えよう．$Y \subset \mathbb{P}^5 \times X$ を X 上の 3 次 4-fold の族とする．$\mathrm{Perf}(Y) \subset \mathcal{D}(Y)$ を perfect 複体のなす圏とする．

$$A_Y = \{F \in \mathrm{Perf}(Y) |\ \mathrm{RHom}_{\mathrm{Perf}(Y)}(O_Y(i), F) = 0 \text{ for } i = 0, 1, 2\}$$

とおくと A_Y は X 上スムースかつ固有な 2 次元 Calabi-Yau 圏になる．

例 2.3. G を標数 0 の体上の簡約代数群とする．　量子群は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ のある種の代数としての q-変形である．これは $\mathfrak{g}$ の表現の圏の導来∞圏 $\mathcal{D}(U(\mathfrak{g})-\mathrm{mod})$ の q をパラメーターとするブレイドモノイダル圏としての変形族とみなすことができる．

例 2.4. k を標数 0 の体，$Y = V \times_k X$ を第二射影で X 上スムースなスキーム，$F : Y \to \mathbb{A}^1 \times_k X$ を X 上の射とする．後者 F は V 上の正則関数の X 上の族とみなすことができる．ここで (Y, F) を X 上の Landau-Ginzberg 模型（の族）とみなそう．Landau-Ginzberg 模型 (V, f) に対しては行列因子化の∞圏（matrix factorization)$MF(V, f)$ を考えることができる．(V, f) が変形し族 (Y, F) をなせば，自然に $\mathrm{MF}(V, f)$ も一見変形しそうである．しかし変形しない．行列因子化の∞圏の族は Landau-Ginzberg 模型の族の圏化のインプットとしては不十分であることがわかる．そこで Preygel の仕事 [17] にヒントを得て次のように考える．(V, f) から $\mathrm{Perf}(Y)$ とそこへの S^1-作用（円周作用）が得られる．(正確には S^1 の代数的モデル formal group stack の作用であるが簡単に S^1 と書く.) この S^1-作用がちょうど f に対応するデータである．$\mathrm{MF}(V, f)$ はこの作用のホモトピー不変部分 $\mathrm{Perf}(Y)^{S^1}$ として得られることが Preygel によって示されている．簡単に考察できることであるが重要なのは，f が変形すればそれに応じて S^1-作用も変形するということである，つまり Landau-Ginzberg 模型の族 (Y, F) から S^1 同変安定∞圏の族が得られる．この同変安定∞圏の族は斎藤恭司氏の理論の観点から見ても興味深い族である．

3. Hochschild 不変量と Hodge 構造

$\mathcal{C}$ を安定∞圏とする．$\mathcal{C}$ に対して Hochschild ホモロジーとそれから派生する不変量を考えると Hodge 構造の類似を得られることを復習しよう．一般に基礎環を置かなくても位相的 Hochschild ホモロジーを考えることができるが，ここでは k を標数 0 の基礎体とする．k 上の安定∞圏 $\mathcal{C}$ に対して Hochschild チェイン複体

$$\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)$$

とよばれる k 線形空間の複体を定義することができる．これのコホモロジーをとるとHochschild ホモロジーが現れる．以後, Hochschild チェイン複体のことを Hochschild ホモロジーと呼ぶことにする．一般に可換とは限らない dg k-代数 B を考えよう．dg B-左加群（即ち複体で B の左作用をもつもの）の圏を擬同型で局所化して得られる安定∞圏を Mod_B と書くことにしよう．この時 Mod_B の（コンパクト対象のなす部分圏 Perf_B でもよい）Hochchild ホモロジーは

$$\mathcal{HH}_\bullet(\mathrm{Mod}_B\,/k) \simeq B \otimes^L_{B\otimes_k B} B$$

で与えられる．右辺は derived な意味でのテンソルであり, 標準的には B を B-B 両側加群として自由分解して計算する．これがよくホモロジー代数の本によくみかけるHochschild 複体になる．一般の安定∞圏に対してもこの右辺を拡張したような方法で Hochschild ホモロジー $\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ を定義することができる．

$\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ は, S^1-作用をもつ．これは, Connes 作用素と呼ばれるデータとみなすことができ, Hochschild ホモロジーの持つ最も重要な構造である．上述の B の B-B 両側加群として自由分解から得られる複体の構造をよく考察すると, 円周上の乗っている（複数の）直線

$$(0,1)^{\sqcup n} \hookrightarrow S^1$$

たちのなす関手性と同じ関手性を Hochschild 複体が持つことがわかる．その構造を用いると $\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ に S^1-作用が入ることがわかる．

さて, S^1-作用に対してホモトピー固定点

$$\mathcal{HN}_\bullet(\mathcal{C}/k) = \mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)^{S^1}$$

をとろう．これを negative cyclic complex(負巡回的複体) と呼ぶ．$\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ は, dg k-加群であったから, $k^{S^1} \simeq H^*(BS^1,k) = k[t]$ 上の加群の構造を持つ．但し t はコホモロジカルに次数 2 の元で $k[t]$ は t で生成された自由可換 dg 代数である．

$k[t^{\pm 1}] = k[t][\frac{1}{t}]$ とおく．

$$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k) = \mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/k)^{S^1} \otimes_{k[t]} k[t^{\pm 1}]$$

を periodic cyclic complex（周期的巡回複体）と呼ぶ．$k[t^{\pm 1}]$ 上の複体であり,
$k[t^{\pm 1}]$ 上であるから次数 2 で周期性をもつ．これはドラームコホモロジーの類似とみなすことができる．$HP_n(\mathcal{C}/k)$ を $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ の n 次のホモロジーとする．Hochschild-Kostant-Rosenberg の定理によれば, X を k 上スムースな代数多様体としたとき同型

$$HP_n(\mathcal{D}(X)/k) \simeq \oplus_{i\in\mathbf{Z}} H^{2i-n}_{dR}(X)$$

が成立する．右辺は代数的ドラームコホモロジーである．また, $HN_n(\mathcal{C}/k)$ を $\mathcal{HN}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ の n 次のホモロジーとする．このとき

$$HN_n(\mathcal{D}(X)/k) \simeq \oplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathbb{H}^{2i-n}(X, \Omega^{\geq i}_{X/k})$$

が成立する．これを見ると $HN_n(\mathcal{D}(X)/k) \to HP_n(\mathcal{D}(X)/k)$ が Hodge フィルトレーションを与えていることがわかる．この比較をもとに $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ に複体レベルのフィルトレーションを $\mathcal{HN}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ を用いて次のように定義する．

定義 3.1. $F := \mathcal{HN}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ とおく．次の列として $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ のフィルトレーションを定義する．

$$\cdots \to tF \to F \to \frac{1}{t}F \to \cdots \to \frac{1}{t^n}F \to \cdots \to \mathrm{colim}_n \frac{1}{t^n}F \simeq \mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$$

これを $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ の Hodge フィルトレーションと呼ぶ．

4. 変動

$\mathcal{C}$ を族にすると前節の $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ と Hodge フィルトレーションが変形して Hodge 構造の変動が得られることを示したい．重要な先行研究として Getzler [5] がある．これは可換代数 R 上の dg 代数 B に対して $\mathcal{HP}_\bullet(B/R)$ に接続を入れるものである．Getzler の方法はある意味代数多様体の場合の Cartan calculus による Gauss-Manin 接続の構成の延長とみなせる．明示的な式による構成であるために，逆に安定∞圏に対して通用するものではない．特に構成された接続が代数の導来森田同値に対して不変であるかどうかさえも不明である．

$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ に二つの方法で D-加群の構造を構成する．二つの方法は異なるが関係している．また，古典的な代数多様体の場合と方法が大きく異なり，この設定ならではの新しい世界への広がりが見える．二つの方法はともに導来代数幾何におけるループ空間を使うので，ループ空間と D 加群の関係についてまず説明する．

X を体上の有限型分離的スキームとする．M を有限 CW 複体のホモトピー型をもつ位相空間とする．このとき，導来代数幾何 [16] では，「写像スタック・スキーム」（mapping stack）$\mathrm{Map}(M,X)$ を導来スキームとして定義できる．$\mathrm{CAlg}_k^{\geq 0}$ を connective 可換 dg 代数のなす無限圏，$\mathcal{S}$ を ∞-亜群のなす無限圏とする．導来スキームは，関手としてみると関手 $\mathrm{CAlg}_k^{\geq 0} \to \mathcal{S}$ であり，ある種の幾何学性をもつものとして定義される．$\mathrm{Map}(M,X)$ は関手として

$$R \mapsto \mathrm{Map}(M, X(R))$$

で与えられる（$X(R)$ は R-値点の空間で写像空間のホモトピー型を ∞-亜群とみなしている）．M を S^1 としよう．この場合 $LX = \mathrm{Map}(S^1, X)$ と置き，（自由）ループ空間と呼ぶ．導来スキームの定義は復習していないが，この場合

$$LX \simeq X \times_{X \times_k X} X$$

が成立する．右辺はスキームの圏でのファイバー積ではなく導来スキーム圏でのファイバー積をとる．これは局所的には導来テンソル積の Zariski スペクトラム

$$\mathrm{Spec}\, A \otimes^L_{A \otimes_k A} A$$

になっている．普通のテンソル積 $A \otimes_{A \otimes_k A} A$ は A と同型である．一方，$A \otimes^L_{A \otimes_k A} A$ はどれくらい違うかというと，A が k 上スムースで k が標数 0 の場合

$$A \otimes^L_{A \otimes_k A} A \simeq \mathrm{Sym}^\bullet_A(\Omega^1_A[1]) \simeq \oplus_{i \geq 0} \Omega^i[i]$$

が成り立つ．ここで真ん中は（微分のない）自由可換 dg 代数とみなしてよい．また $LX = \mathrm{Map}(S^1, X)$ であるから，LX には S^1 が作用する．さらに $S^1 \to *$ を合成することで S^1-同変射

$$\iota : X = \mathrm{Map}(*, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(S^1, X) = LX$$

が定義される．

$\mathrm{DCoh}(LX)$ を LX 上の導来∞圏 (ただし cohomologically bounded and cohorent cohomology) とする．LX への S^1-作用から $\mathrm{DCoh}(LX)$ に作用が入るので，それに関してホモトピー固定点 $\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}$ をとる．雑に言えば，これは LX への作用と整合的な S^1-作用をもつ $\mathrm{DCoh}(LX)$ の対象たちのなす∞圏である．$\mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1})$ を Ind-対象のなす無限圏とする．

$\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}$ には対称モノイダル∞圏 $\mathrm{DCoh}(BS^1)$ の加群作用が自然に入る．$\mathrm{DCoh}(BS^1)$ は $V \mapsto V^{S^1}$ の対応により自然に perfect dg $k[t](=k^{S^1})$-加群のなす∞圏 $\mathrm{Perf}_{k[t]}$ と圏同値になる。つまり $\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}$ は $k[t]$ 上の安定∞圏となる．これを用いて $k[t^{\pm 1}]$

への base change を

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}) \otimes_{k[t]} k[t^{\pm 1}]$$

と書く．この圏が X 上の D-加群の圏と関係づけられる．

定理 4.1 ([3], [18])**.** X を標数 0 の体上スムースとする．D_X-mod を X 上の（左または右）D-加群の導来∞圏とする．このとき圏同値

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}) \otimes_{k[t]} k[t^{\pm 1}] \simeq D_X\text{-mod} \otimes_k k[t^{\pm 1}]$$

がある．ただし, 右辺は次数 2 で周期的な D-加群の複体の圏をみなす.

この圏同値の背景に Kapranov や Beilinson-Drinfeld の仕事がある [13], [2]．そこでは, D_X-加群と de Rham 代数 $\Omega_X^\bullet$ の加群の間の Koszul 双対性が示されている．それによって, D_X-加群を $\Omega_X^\bullet$-加群として扱えるようになる．[3] では, Ω^i や上記の $t \in k[t]$ が自然なトーラス作用から派生した重さ（weight）を持っているという考察を用いることで, $\Omega_X^\bullet$-加群をループ空間と関係づけて上述の圏同値を示している．さらに [18] では, 圏同値は X が滑らかとは限らない場合にまで拡張されている．

X を k 上有限型分離的スキーム, $\mathcal{C}$ を X 上の安定∞圏としよう．二つの構成はいずれも X 上相対的な Hochschild ホモロジー $\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/X) \in \mathcal{D}(X)$ を LX 上に $\iota : X \to LX$ に沿って S^1 同変的に持ち上げることで達成される。LX 上に S^1-作用を持つようにもちあげたものを $\widetilde{\mathcal{HH}_\bullet}(\mathcal{C}/X)$ とおくと, ホモトピー S^1-固定点

$$\widetilde{\mathcal{HH}_\bullet}(\mathcal{C}/X)^{S^1} \in \mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1})$$

をとって上記の圏同値を適用することで得られる．

$\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/X)$ を $\iota : X \to LX$ に沿って S^1 同変的に持ち上げる構成法をふたつ紹介したい．

- 第一の方法は, factorization ホモロジーが自然な変形をもつという考察を用いる．
- 第二の方法は、Hochschild コホモロジーと Hochschild ホモロジーのペア（正確には複体）に入る代数的構造——オペラッドで記述される——（の新しい構成）やその代数的構造のモジュライ理論的な解釈などを用いる．

城崎の講演では第二の方法を説明したが, ここでは第二の方法が使う理論だけを挙げるにとどめておく．第二の方法は次を応用する．

- Hochschild コホモロジーと Hochschild ホモロジーのペア（正確には複体）に入る代数的構造——オペラッドで記述される——の拡張された新しい構成 ([7]),
- その代数的構造のモジュライ理論的な解釈 ([8])．そこでは cyclic deformation (巡回変形) という新しい概念で解釈を与えている,
- 基点付き形式導来スタック (pointed formal derived stack) と dg Lie 代数の圏同値 [4], [16], [6],
- 様々なタイプの代数の間にある Koszul 双対性.

dg Lie 代数を用いるので構成はかなり「Lie 代数的」である．第二の方法は第一の方法と比べて構成が長くまた構成に関手が乏しいといった点がある．しかし，　この方法と関連するアイデアを用いることで例えば Calabi-Yau 圏に対する Bogomolov-Tian-Todorov の定理が証明できる [12]．具体的な圏への応用に利点が出てくると考えている．

ここでは第一の方法の構成のあらましを書く．Factorization ホモロジーは可換代数 R 上の E_n-代数 B と（接束に枠をいれた）n-次元位相多様体 M に対して定義さ

れる複体（設定によってスペクトラなどになる）

$$\int_M B/R$$

である．E_n-代数について少し書いておく．E_n-代数とは, 多重ループ空間の研究の過程で生まれた概念で, n-重ループ空間 $\Omega^n S$（の特異チェイン複体）は, E_n-代数になっている．直感的には, 例えば E_2-代数は 2 重ループ空間が持っているような代数構造ということになる．2 重ループ空間 $\Omega^2 S$ をみると, 2 回ループを取っているので,「最初のループ」による結合的積構造と「2 個目のループ」による結合的積構造の二つがあり, その二つの演算が互いに整合性を持っていることが分かる．E_n-代数とは, 直観的には n 個の結合的積構造が入っていてそれらの積構造が $\Omega^n S$ のもつ積構造の整合性のような整合データを持っている状態といってよい．一般の対称モノイダル∞圏に対しても E_n-代数が定義できる．例えば Hochschild コチェイン複体 $\mathcal{HH}^\bullet(\mathcal{C}/X)$ は $\mathcal{D}(X)$ で E_2-代数である（いわゆる Deligne 予想）．

$\int_M B/R$ の定義を雑に説明する．有限個の n-次元開円盤の非交和と同相であるような M の開集合 U に対して $B^{\otimes_R \pi_0(U)}$ を対応させ、そのような開集合の間の開埋め込み $U_1 \to U_2$ に対して E_n-代数構造を使って写像 $B^{\otimes_R \pi_0(U_1)} \to B^{\otimes_R \pi_0(U_2)}$ を作ったうえで、そのような全ての U のダイアグラム上で無限圏的な余極限（つまりホモトピー余極限）をとって定まるものが $\int_M B/R$ である．E_1 代数はいわゆる非可換な dg R-代数 B のことであるが, このとき 1 次元多様体 M を S^1 とすると, $\int_{S^1} B/R = \mathcal{HH}_\bullet(B/R)$ となる．つまり Hochschild ホモロジーの一般化となっている．Factorizarion ホモロジーは位相的場の理論などの文脈などから導入され [1], [15], ここ 10 年ほどで急速に研究が進んだ．Beilinson-Drinfeld の Chiral 代数の位相的類似概念とも思え、トポロジーや数理物理の研究者などによって研究が進められている．

$\mathrm{Spec}\, R$ 上 E_n-代数を大域化してスキーム X 上の E_n-代数 B を考えよう．$\mathcal{D}(X)$ の E_n-代数とみなしてよい．この場合も同様に $\int_M B/X \in \mathcal{D}(X)$ が定義できる．

次の考察が基本的である．

定理 4.2 ([9])**.** $\int_M B/X \in \mathcal{D}(X)$ は

$$\int_M \widetilde{B/X}$$

in $\mathcal{D}(\mathrm{Map}(M, X))$ に持ち上げられる．つまり定値写像による自然な閉埋め込み $\iota : X \to \mathrm{Map}(M, X)$ に対して

$$\iota^* \int_M \widetilde{B/X} \simeq \int_M B/X.$$

この持ち上げは M についても B についても関手的である．

つまり factorization ホモロジーは X 上から mapping stack 上に自然に変形してしまう．これを factorization ホモロジーの canonical extension と呼ぶことにする．証明は factorization ホモロジーの定義・原理に立ち返ることで容易に示すことができる．factorization ホモロジーの研究者たちに聞いてみたところ, 比較的容易に示せるこの事実に気が付いていなかったようである．勝手な憶測ではあるが, factorization ホモロジーの研究者は $\int_M B/R$ を M の不変量とみなす立場で研究していて, あまり B の不変量という見方をしていなかったのではないかと思われる．

factorization ホモロジーは代数の Hochschild ホモロジーを含む概念であったから, 代数を安定∞圏に拡張すると、次を——やや技術的に煩雑にはなるが——同じアイデアで示すことができる．

定理 4.3 ([9])**.** $\mathcal{C}$ を分離的スキーム X 上の安定∞圏とする．$\mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/X)$ を $\mathcal{D}(X)$ に定まる S^1-作用付き *Hochschild* ホモロジー *(Hochschild* チェイン複体*)* とする．これは

$$\widetilde{\mathcal{HH}}_\bullet(\mathcal{C}/X)$$

in $\mathcal{D}(LX)^{S^1}$ にもちあがる（すなわち，S^1-同変的に LX に持ち上がる）．この持ち上げは $\mathcal{C}$ について関手的である．

第二の方法でも定理 4.2 に対応するような持ち上げを構成することができる．ただし X がスムースなアファインスキームの時．その持ち上げを $\overline{\mathcal{HH}}_\bullet(\mathcal{C}/X)$ とおく．二つの異なる方法で構成したものが同じかどうかが問題になるが、実は同じである．

定理 4.4 ([10])**.** X がスムースかつアファインのときふたつの持ち上げの間に同型がある：

$$\widetilde{\mathcal{HH}}_\bullet(\mathcal{C}/X) \simeq \overline{\mathcal{HH}}_\bullet(\mathcal{C}/X).$$

この比較により，二つの方法双方の利点を取り込むことができる．証明のポイントは可換代数と Lie 代数の間にある Koszul 双対性と [8] で得られた Hochschild コホモロジーと Hochschild ホモロジーの代数構造のモジュライ理論的解釈である．

$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/k)$ の定義を相対化することで一般のスキーム X とその上の安定∞圏 $\mathcal{C}$ に対して periodic cyclic complex

$$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/X) \in \mathcal{D}(X) \otimes_k k[t^{\pm 1}]$$

が定まる．定理 4.1 と定理 4.3 を組み合わせると次が得られる．

定理 4.5 ([9])**.** X をスムースで分離的スキームとし，$\mathcal{C}$ を X 上の安定∞圏とする．このとき

$$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/X)$$

に次数 2 で周期的な D-加群の複体の構造が入る．この D-加群は $\mathcal{C}$ について関手的である．

5. フィルトレーションと D-加群

X をスムースで分離的なスキームとし，$\mathcal{C}$ を X 上の安定∞圏とする．定義 3.1 の Hodge フィルトレーションを相対化することで (すなわち $F = \mathcal{HN}_\bullet(\mathcal{C}/X) = \mathcal{HH}_\bullet(\mathcal{C}/X)^{S^1}$ と置いて）$\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/X)$ に Hodge フィルトレーション

$$\cdots \to tF \to F \to \frac{1}{t}F \to \cdots \to \frac{1}{t^n}F \to \cdots \to \operatorname{colim}_n \frac{1}{t^n}F \simeq \mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/X)$$

を定める．このフィルトレーションと D-加群の構造の整合性，つまり Griffiths 横断性を示すにはどうすればいいのだろうか。代数多様体の族から得られる Gauss-Manin 接続と Hodge フィルトレーションの場合は，Cartan ホモトピー公式などを適用することで証明できた．

我々の状況では、新しい固有現象が起きる: $\mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1}) \otimes_{k[t]} k[t^{\pm 1}]$ の対象が

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{DCoh}(LX)^{S^1})$$

の対象から $k[t] \to k[t^{\pm 1}]$ による base change で得られるということが，Griffiths 横断性に本質的なのである．定理 4.1 の現れるループ空間の関数環，de Rham 代数とその Koszul 双対，微分作用素環を考察することにより，次が分かる．

定理 5.1 ([11])**.** 定理 *4.5* の $\mathcal{HP}_\bullet(\mathcal{C}/X)$ の D-加群の構造は，*Hodge* フィルトレーションに対して *Griffiths* 横断性を満たす．

References

[1] D. Ayala and J. Francis, Factorization homology of topological manifolds, J. Topol. Vol. 8 (2015) 1045–1084.

[2] A. Beilinson and V. Drinfeld, Quantization of Hitchin ' s integrable system and Hecke eigensheaves, draft available on web

[3] D. Ben-Zvi and D. Nadler, Loop spaces and connections, J. Topol.Volume 5, (2012), 377—430.

[4] D. Gaitsgory and N. Rozenblyum, A study in Derived Algebraic Geometry Volume I, II, Mathematical Survey and Monographs, 22, American Math. Soc. 2017

[5] E. Getzler, Cartan homotopy formulas and the Gauss-Manin connection in cyclic homology, In Quantum deformations of algebras and their representations (Ramat-Gan, 1991/1992; Rehovot,1991/1992) volume 7 of Israel Math. Conf. Proc., pages 65–78. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[6] B. Hennion, Tangent Lie algebras of derived Artin stacks, J. Reine Angew. Math. 741 (2018), 1435-5345.

[7] I. Iwanari, Differnetial calculus of Hochschild pairs for infinity-categories, SIGMA **16** (2020), 97 (57 pages), Special Issue on Primitive Forms and Related Topics in honor of Kyoji Saito for his 77th birthday.

[8] I. Iwanari, Moduli theory associated to Hochschild pairs, preprint

[9] I. Iwanari, On D-modules of categories I, preprint

[10] I. Iwanari, On D-modules of categories II, preprint

[11] I. Iwanari, On D-modules of categories III, preprint

[12] I. Iwanari, Bogomolov-Tian-Todorov Theorem for Calabi-Yau categories, preprint

[13] M. Kapranov, On DG-modules over the de Rham complex and the vanishing cycles functor. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1479, 57–86. Springer 1991.

[14] J. Lurie, Higher Topos Theory, Annals Math. Studies, 170 2009.

[15] J. Lurie, Higher Algebra, draft 2017

[16] J. Lurie, Spectral algebraic geometry, draft

[17] A. Preygel, Thom-Sebastiani and Duality for Matrix Factorizations, and Results on the Higher Structures of the Hochschild Invariants, Thesis MIT

[18] A. Preygel, Ind-coherent complexes on loop spaces and connections, in "Stacks and categories in geometry, topology, and algebra" 643, 289-323, 2014.