L^2-complexes and twistor complexes of tame harmonic bundles

京都大学 数理解析研究所 ・望月拓郎 *

1 はじめに

1980 年代に偏極付 Hodge 構造の変動の L^2 理論が詳しく研究されました. 特に, X をコンパクト Kähler 多様体, H を正規交叉超曲面として, $X \setminus H$ 上の偏極付 Hodge 構造の変動に関して, 交叉複体と L^2 複体が自然に同型であることが示され, その帰結として交叉コホモロジー上の Hodge 分解, Hard Lefschetz 性, Hodge-Riemann 双線型関係などが, Cattani-Kaplan-Schmid [7] と Kashiwara-Kawai [10] によって示されました. さらに, Kashiwara-Kawai は [9] において Hodge フィルトレーションが代数的に構成できるという定理を発表しました. その後, Hodge 加群の理論 [18] の発展もあって, この方面の研究はあまり活発ではありませんでしたが, 近年になって関連する研究がなされるようになったことに刺激を受けて, [15] において Kashiwara-Kawai の定理を従順調和束の場合に一般化しました. また, その結果を用いて正則な偏極付純ツイスター D 加群の Hard Lefschetz 定理の精密化を行いました.

以下では, Kashiwara-Kawai の定理と従順調和束について復習した後に, [15] の結果について概説します. 詳細は [15] をご覧ください.

謝辞 本稿は, 2022 年度城崎代数幾何学シンポジウムにおける講演とスライドをもとにしています. 講演の機会を与えてくださった世話人の方々に感謝します. また, 文献 [12] についてご指摘くださった社本陽太氏に感謝します.

2 Kashiwara-Kawai の定理

まず, Hodge 構造の変動に関する Kashiwara-Kawai の定理 [9] について復習します.

コンパクト Kähler 多様体の Hodge 構造 X を n 次元コンパクト Kähler 多様体とし, ω を Kähler 形式とします. この時, Kähler 恒等式と調和理論により, $H^*(X,\mathbb{R})$ は次のような良い性質を持つことが古典的によく知られています.

(Hodge 分解) $H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ と分解する. また, $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$.

* 本研究を行うにあたり, 日本学術振興会からの科学研究費補助金基盤 (S) 課題番号 17H06127, 基盤 (A) 課題番号 21H04429, 基盤 (A) 課題番号 22H00094, 基盤 (C) 課題番号 20K03609 を受けました.

(Hard Lefschetz 性) $\omega^j\colon H^{n-j}(X,\mathbb{C}) \simeq H^{n+j}(X,\mathbb{C})$.

(Hodge-Riemann 双線型関係) $H^{n-j}(X,\mathbb{C})$ 上の二次形式を,

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = (-1)^{(n-j)(n-j-1)/2} \int_X \eta_1 \wedge \overline{\eta}_2 \wedge \omega^j$$

によって定めると, Hodge 分解は直交する. さらに, 0 でない $\eta \in H^{p,q}$ が $\omega^{j+1}\eta = 0$ をみたすならば $(\sqrt{-1})^{p-q}\langle \eta, \eta \rangle > 0$.

(Hodge-de Rham スペクトル列の E_1-退化) de Rham 複体 $\Omega_X^\bullet$ において $p-1$ 次以下を 0 に置き換えたものとして定まる部分複体を $F^p(\Omega_X^\bullet)$ であらわす.

$$F^p(\Omega_X^\bullet) = \bigl(0 \to \cdots \to \Omega_X^p \to \cdots \to \Omega_X^n\bigr)$$

このとき, $H^k(X, F^p(\Omega_X^\bullet)) \to H^k(X,\mathbb{C})$ は単射であり, その像は $\bigoplus_{r\geq p} H^{r,s}$ に等しい. 特に, $H^{p,q} \simeq H^q(X, \Omega_X^p)$.

これらは古典的な調和理論と Kähler 恒等式の帰結として得られます.

偏極付 Hodge 構造の変動　Deligne は Kähler 恒等式が Hodge 構造の変動の場合に一般化されることを見抜き, $H^*(X,\mathbb{R})$ に関する上のような結果が X 上の重み w の偏極付 Hodge 構造の変動の場合にも成り立つことを示しました.

[23] に従って少し一般化したものを考えると, 重み w の偏極付複素 Hodge 構造の変動とは, 次数つきベクトル束 $V = \bigoplus_{p+q=w} V^{p,q}$ と, V の平坦接続 ∇ と, ∇ に関して平坦な V の半双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の組で, 次のような条件をみたすものです.

- $\nabla(V^{p,q}) \subset (V^{p+1,q-1} \oplus V^{p,q}) \otimes \Omega^{0,1} \oplus (V^{p-1,q+1} \oplus V^{p,q}) \otimes \Omega^{1,0}$ (Griffiths 横断性).
- w が偶数ならばエルミート積, w が奇数ならば交代エルミート積.
- $(p,q) \neq (p',q')$ ならば $V^{p,q}$ と $V^{p',q'}$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して直交.
- $h = \bigoplus_{p+q=w} (\sqrt{-1})^{p-q} \langle \cdot, \cdot \rangle_{|V^{p,q}}$ は正定値. (Hodge 計量という.)

コンパクト Kähler 多様体 X 上に重み w の偏極付複素 Hodge 構造の変動 $(V = \bigoplus V^{p,q}, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が与えられている時, (V, ∇) の平坦切断のなす層として得られる局所自由 $\mathbb{C}_X$ 加群 $\mathbb{V}$ を係数とするコホモロジー $H^k(X, \mathbb{V})$ は重み $w+k$ の複素 Hodge 構造をもち, Hard Lefschetz 性や Hodge-Riemann 双線型関係も成り立ちます. また, (V, ∇) の de Rham 複体上の Hodge フィルトレーションが定まり, そのスペクトル列が E_1 で退化します.

Cattani-Kaplan-Schmid と Kashiwara-Kawai の定理　偏極付 Hodge 構造の変動は, 射影多様体の滑らかな族の Gauss-Manin 接続が持つ良い構造として抽出されたものでした. コンパクトなパラメータ空間上の射影多様体の族は特異ファイバーを含むことが多いので, 特異性を持つような Hodge 構造の変動にも関心が持たれました.

H を X の正規交叉超曲面とし, $X \setminus H$ 上の重み w の偏極付複素 Hodge 構造の変動 $(V = \bigoplus V^{p,q}, \nabla, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ と, 付随して得られる局所系 $\mathbb{V}$ を考えます. 簡単のため, H の各点のまわりにお

けるモノドロミーの固有値は1の冪根であることを仮定します. $X \backslash H$ の X への包含写像を j とすると, $Rj_!\mathbb{V}$ と $Rj_*\mathbb{V}$ という $\mathbb{C}_X$ 加群の導来圏 $D^b(\mathbb{C}_X)$ の対象が得られます. これらの次数を $\dim X$ だけずらすと偏屈層になりますので, 自然な射 $Rj_!\mathbb{V} \to Rj_*\mathbb{V}$ の像 ${}^pj_{!*}\mathbb{V}$ が偏屈層の次数をずらしたものとして定まります. これを $\mathbb{V}$ の交叉複体といい, コホモロジ $IH^*(X, \mathbb{V}) = H^*(X, {}^pj_{!*}\mathbb{V})$ を交叉コホモロジーといいます. 次の定理は Cattani-Kaplan-Schmid [7] と Kashiwara-Kawai [10] によって独立に証明されたもので, 1次元の場合は Zucker [28] による結果です.

定理 2.1 (Cattani-Kaplan-Schmid, Kashiwara-Kawai, Zucker) *$IH^k(X, \mathbb{V})$ は重み $w+k$ の複素 Hodge 構造を持つ. さらに, Hard Lefschetz 性と Hodge-Riemann 双線型関係が成り立つ.*

これは, 偏極付複素 Hodge 構造の変動に付随する L^2-複体と交叉複体の同型を得ることによって証明されました. X の各開集合 U について, 次の条件をみたす $U \setminus H$ 上の V に値をもつ k-形式 τ 全体を $\mathcal{C}^k_{L^2}(V, \nabla, h)(U)$ であらわします.

- τ と $\nabla\tau$ は Hodge 計量 h と $X \setminus H$ の Poincaré 的計量 $g_{X\setminus H}$ に関して U 上局所的に L^2.

ここで, Poincaré 的計量とは, $X \setminus H$ の完備な Kähler 計量で, H の各点のまわりで, 穴開き円板上の Poincaré 計量を高次元化したものと漸近的には類似の挙動を示すものです. こうして得られる X 上の層の複体 $\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)$ を L^2 複体といいます. また, コホモロジー $H^*(X, \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h))$ を L^2 コホモロジーといいます. [7] と [10] では (1次元の場合は [28]) 次のことが示されています.

定理 2.2 (Cattani-Kaplan-Schmid, Kashiwara-Kawai, Zucker)
自然な擬同型 $\mathbb{V} \to \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)_{|X\setminus H}$ は $D^b(\mathbb{C}_X)$ における同型 ${}^pj_{!*}\mathbb{V} \simeq \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)$ に拡張される.

定理 2.2 より, $H^*(X, \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)) \simeq IH^*(X, \mathbb{V})$ が得られます. L^2-コホモロジーはエルミート計量をもつ平坦束について考えられますが, 一般には有限次元ではありませんし, 仮に有限次元であっても, それを示すのは一般には簡単ではありません. しかし, 上の同型があると, 交叉コホモロジーが有限であることは容易にわかりますので, L^2 コホモロジーも有限であることがわかります. すると, 調和理論がうまく機能して, Deligne の議論を用いることで定理 2.1 が得られます.

Hodge 構造の変動に付随するコホモロジー上に Hodge 構造が自然に誘導されるか, ということが盛んに研究された時期がありましたが, 定理 2.1 と定理 2.2 はそのような研究の流れにおける金字塔的な結果です. 定理 2.2 を示すために, 各特異点から得られる偏極付混合 Hodge 構造というデータによって偏極付 Hodge 構造の変動の特異点の周辺における漸近挙動がよく制御されているということが示されました. 偏極付 Hodge 構造の漸近挙動に関しては Schmid [21] の冪零軌道定理や1変数の $SL(2)$ 軌道定理が知られていましたが, その精密化が定理 2.1 や定理 2.2 の研究の過程でなされました [4, 6, 8]. そのような意味でも重要な定理です.

Kashiwara-Kawai の定理 定理 2.1 ではスペクトル列の E_1-退化は触れられていません. また, 定理 2.1 の Hodge 分解

$$IH^k(X, \mathbb{V}) = \bigoplus_{p+q=k+w} H^{p,q}$$

より定まる Hodge フィルトレーション

$$F^p IH^k(X, \mathbb{V}) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,s}$$

は定理 2.2 を経由しているので, L^2 理論という超越的な方法で構成されていることになります. これに対して, 次に述べる Kashiwara-Kawai の定理 (定理 2.3) は, より代数的に (D 加群的に) 構成されるフィルトレーション付複体のスペクトル列が E_1 で退化し, Hodge フィルトレーション $F^p IH^k(X, \mathbb{V})$ を誘導するということを述べています.

Riemann-Hilbert 対応により, ${}^p j_{!*}\mathbb{V}$ に対応する X 上の正則ホロノミック $\mathcal{D}$ 加群 $V_{\min}$ が同型を除いて一意的に存在します. つまり, $D^b(\mathbb{C}_X)$ において $\mathrm{DR}(V_{\min}) = V_{\min} \otimes \Omega_X^\bullet \simeq {}^p j_{!*}\mathbb{V}$ であるような $V_{\min}$ が定まります. さらに, D 加群 $V_{\min}$ 上に Hodge フィルトレーション F が定まり, $(V, \nabla, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ が適切な $\mathbb{R}$-構造を持つ時には, $V_{\min}$ の自然なベッチ構造とあわせて, 重みが $w + \dim X$ であるような偏極付 Hodge 加群が得られます. この D 加群上の Hodge フィルトレーション F が, $\mathrm{DR}(V_{\min})$ 上のフィルトレーション $F(\mathrm{DR}(V_{\min}))$ を誘導します. 次の定理は [9] で発表されました. (1 次元の場合は Zucker [28] の結果.)

定理 2.3 (Kashiwara-Kawai, Zucker) 自然な射

$$H^k(X, F^p(\mathrm{DR}(V_{\min}))) \to H^k(X, \mathrm{DR}(V_{\min})) = IH^k(X, \mathbb{V})$$

は単射であり, その像は $F^p IH^k(X, \mathbb{V})$ に等しい. 特に, フィルトレーション付複体 $F(\mathrm{DR}(V_{\min}))$ に付随するスペクトル列は E_1 で退化する.

定理 2.1–定理 2.2 で得られた Hodge 構造を, より大きな枠組み (Hodge 加群の理論で実現されるような D 加群の Hodge 構造の関手性) に結びつけるには, 定理 2.3 のような主張が必要になります. また, フィルトレーション付 de Rham 複体のスペクトル列の退化が応用されることもありますので, そういった点でも定理 2.3 は意義があると思われます. ただ, 定理 2.1 の主張や定理 2.3 におけるスペクトル列の E_1-退化の主張は, X が射影的であれば, Saito による Hodge 加群の理論 [18] の帰結として得られます. Hodge 加群の理論でも L^2-理論が必要になりますが, 代数的な話をする分には, 1 次元の場合の Zucker [28] による結果で十分です. (ただし, [7, 10] の L^2 理論によって得られる Hodge 構造と, Hodge 加群の理論によって得られる Hodge 構造が一致することを示すには, 定理 2.3 が必要になります.) そういったこともあったためか, 定理 2.3 の証明に関しては, 定理をアナウンスした [9] や講義録 [12][1] においてアイディアが説明され, 論文 [11] で関連するある種の "1 の分割" が説明されていますが, 証明全体の詳細は (筆者が知っている範囲では) 公開されませんでした.

3 調和束

$(E, \overline{\partial}_E)$ を複素多様体 Y 上の正則ベクトル束とします. θ をこの正則ベクトル束の Higgs 場とします. つまり, θ は $\mathrm{End}(E)$ 係数の正則 1 形式であって, $\theta^2 = 0$ をみたすものです. h を E のエルミート計量とすると, Chern 接続 $\nabla_h = \overline{\partial}_E + \partial_{E,h}$ と, θ の随伴として $\theta_h^\dagger \in C^\infty(Y, \mathrm{End}(E) \otimes \Omega^{0,1})$ が得られます. 接続 $\mathbb{D}^1 = \nabla_h + \theta + \theta_h^\dagger$ が平坦の時, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を調和束といいます.

Hodge 構造の変動との関係 $(V = \bigoplus V^{p,q}, \nabla, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を重み w の偏極付複素 Hodge 構造の変動とします. すると, V には Hodge 計量 h が定まります. また, Griffiths 横断性より $\nabla = \nabla_h + \theta + \theta_h^\dagger$ のように分解します. ただし, ∇_h は次数づけ $V = \bigoplus V^{p,q}$ を保ち, θ と $\theta_h^\dagger$ はそれぞ

[1] [12] において定理 2.3 も触れられていることは, 講演後に社本陽太氏にご教示いただきました.

れ $\theta(V^{p,q}) \subset V^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0}$ と $\theta_h^\dagger(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q-1} \otimes \Omega^{0,1}$ をみたすものとして定まります. さらに, $\nabla_h = \partial_V + \overline{\partial}_V$ のように $(1,0)$-部分と $(0,1)$-部分に分解します. この時, $(V, \overline{\partial}_V, \theta, h)$ が調和束になります.

従順調和束 H を Y の正規交叉超曲面とします. $Y \setminus H$ 上に調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が与えられると, $(E, \overline{\partial}_E, \theta)$ は $T^*(Y \setminus H)$ 上の連接層を定めます. その台 $\Sigma_{E,\theta} \subset T^*(Y \setminus H)$ を $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ のスペクトル多様体といいます. $\Sigma_{E,\theta}$ の $T^*Y(\log H)$ における閉包が複素解析的で Y 上固有の時, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を (Y, H) 上の従順調和束といいます ([24, 13]). 例えば, Hodge 構造の変動のスペクトル多様体は 0 切断なので, 誘導される調和束は常に従順です.

Simpson のメタ定理 Simpson [26] はツイスター構造を導入して, “Hodge 構造に関する概念や定理はツイスター構造に関する概念や定理に一般化されるはず” という指導原理 (Simpson のメタ定理) を提唱しました. また, 調和束を “重み w の偏極付ツイスター構造の変動” とみなせることを示しました. これより, Hodge 構造の変動についての定理を調和束の場合に拡張できることが期待されます. (Hodge 構造の変動の場合には起きない現象が調和束の場合には起きることもありますので, 必ずしも単純に拡張できるわけではありません.)

4 主結果

調和束に同伴する複体 複素多様体 Y に対して $\mathbb{C}_\lambda \times Y$ を $\mathcal{Y}$ であらわし, p_λ を $\mathcal{Y}$ から Y への射影とします. (変数 λ を強調するために, $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}_\lambda$ とあらわしています.) $\mathbb{C}_\lambda$ 上の構造層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda}$ の射影 $\mathcal{Y} \to \mathbb{C}_\lambda$ による引き戻しとして得られる層を $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda})_{\mathcal{Y}}$ であらわします.

Y 上の調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が与えられると, $\mathcal{Y}$ 上の正則ベクトル束 $\mathcal{E} = (p_\lambda^{-1}(E), p_\lambda^*(\overline{\partial}_E) + \lambda\theta^\dagger)$ が得られます. Y 方向の微分作用素

$$\mathbb{D} = \lambda\partial_{E,h} + \theta + \overline{\partial}_E + \lambda\theta_h^\dagger \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes p_\lambda^{-1}\bigl(\Omega_Y^{1,0} \oplus \Omega_Y^{0,1}\bigr)$$

は Leibniz 則 $\mathbb{D}(fs) = (\lambda\partial_Y + \overline{\partial}_Y)f \cdot s + f\mathbb{D}(s)$ $(f \in C^\infty(\mathcal{Y}), s \in C^\infty(\mathcal{Y}, \mathcal{E}))$ と可積分条件 $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} = 0$ をみたし, 平坦 λ 接続の族とよばれます. これより, $(\mathcal{E}, \mathbb{D})$ の de Rham 複体 $\mathcal{E} \otimes p_\lambda^*(\Omega_Y^\bullet)$ と, その Y 方向の Dolbeault resolution $\mathcal{E} \otimes p_\lambda^{-1}(\mathrm{Tot}\,\Omega_Y^{\bullet,\bullet})$ として $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda})_{\mathcal{Y}}$-加群の複体が得られます.

ツイスター複体と L^2 複体の比較 X を複素多様体, H を正規交叉超曲面とします. (X, H) 上に従順調和束 $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ が与えられると, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ 上に $\mathcal{E} \otimes p_\lambda^* \Omega_{X \setminus H}^\bullet$ が得られます. これが二つの方法で $\mathcal{X}$ 上の $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda})_{\mathcal{X}}$-複体に拡張されます.

一つは, ツイスター D 加群の理論 ([13, 16]) から得られるもので, 交叉複体の類似です. $\mathcal{R}_X$ を $\mathcal{X}$ 上の正則線型微分作用素全体のなす層の部分代数層で, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 上 $\lambda p_\lambda^* \Theta_X$ によって生成されるものとします. ただし, Θ_X は正則ベクトル場のなす層です. $\mathcal{E}$ の “極小拡大” として, $\mathcal{R}_X$ 加群 $\mathfrak{E}$ が得られます [13]. その de Rham 複体 $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega_X^\bullet$ が得られます. 調和束が偏極付 Hodge 構造の変動から得られている場合には, この $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda})_{\mathcal{X}}$-複体は Hodge 加群から得られるフィルトレーション付 de Rham 複体に Rees 構成を適用して得られるものと一致します.

もう一つは L^2 複体として得られるものです. $\mathcal{X}$ の開集合 U にたいして, $\mathcal{E} \otimes p_\lambda^{-1}\,\mathrm{Tot}^k(\Omega_{X \setminus H}^{\bullet,\bullet})$ の $U \setminus \mathcal{H}$ 上の切断 τ で (i) $\partial_{\overline{\lambda}}\tau = 0$, (ii) τ と $\mathbb{D}\tau$ が h と $g_{X \setminus H} + d\lambda\, d\overline{\lambda}$ に関して U 上局所的に

L^2, という条件をみたすもの全体を $\mathcal{C}^k_{L^2}(\mathcal{E},\mathbb{D},h)(U)$ であらわします．これより，$(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda})_{\mathcal{X}}$-複体 $\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E},\mathbb{D},h)$ が得られます．

$\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}$ 上では自然な包含射

$$\mathfrak{E}\otimes p_\lambda^{-1}(\Omega_X^\bullet)_{|\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E},\mathbb{D},h)_{|\mathcal{X}\setminus\mathcal{H}} \tag{1}$$

が擬同型です．

定理 4.1 擬同型 (1) が $D^b((\mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{\mathcal{X}})$ における同型 $\mathfrak{E}\otimes p_\lambda^{-1}(\Omega_X^\bullet)\simeq\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E},\mathbb{D},h)$ に拡張される．

各 $\lambda\in\mathbb{C}$ について，$\mathcal{E}$ を $\{\lambda\}\times(X\setminus H)$ に制限して得られる正則ベクトル則を $\mathcal{E}^\lambda$ であらわします．これは，$\mathbb{D}^\lambda=\overline{\partial}_E+\lambda\theta^\dagger+\lambda\partial_E+\theta$ という微分作用素をもち，de Rham 複体 $\mathcal{E}^\lambda\otimes\Omega^\bullet_{X\setminus H}$ が得られます．この複体が二つの $\mathbb{C}_X$-複体 $\mathcal{C}^\bullet_{\mathrm{tw}}(\mathfrak{E},\lambda)$ と $\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}^\lambda,\mathbb{D}^\lambda,h)$ に拡張されます．ここで，$\mathcal{C}^\bullet_{\mathrm{tw}}(\mathfrak{E},\lambda)$ は $\mathfrak{E}\otimes p_\lambda^*\Omega_X^\bullet$ と関連づけられるものであり，特殊な λ を除くと $(\mathcal{E}^\lambda,\mathbb{D}^\lambda)$ の交叉複体と一致します．また，$\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}^\lambda,\mathbb{D}^\lambda,h)$ は L^2 複体です．$X\setminus H$ 上では自然な包含写像

$$\mathcal{C}^\bullet_{\mathrm{tw}}(\mathfrak{E},\lambda)_{|X\setminus H}\longrightarrow\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}^\lambda,\mathbb{D}^\lambda,h)_{|X\setminus H} \tag{2}$$

が擬同型です．

定理 4.2 擬同型 (2) が $D^b(\mathbb{C}_X)$ における同型 $\mathcal{C}^\bullet_{\mathrm{tw}}(\mathfrak{E},\lambda)_{|X\setminus H}\simeq\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}^\lambda,\mathbb{D}^\lambda,h)_{|X\setminus H}$ に拡張される．

注意 4.3 従順調和束が偏極付複素 *Hodge* 構造の変動から得られているとき，定理 4.1 は定理 2.3 を含んでいます．また，定理 4.2 の $\lambda=1$ の場合が定理 2.2 です．

純ツイスター D 加群の Hard Lefschetz 定理の精密化　定理 4.1 と定理 4.2 を用いると，純ツイスター D 加群の Hard Lefschetz 定理を精密化することができます．

定理 4.4 f を X から Y への複素多様体の射とし，$(\mathcal{T},\mathcal{S})$ を X 上の重み w の偏極付正則純ツイスター D 加群とする．X は *Kähler* で，$\mathcal{T}$ の台が Y 上固有とする．このとき，次が成り立つ．

- $\mathcal{R}$-三つ組としての $\mathcal{T}$ の j 番目の順像 $f_\dagger^j(\mathcal{T})$ は Y 上の重みが $w+j$ の純ツイスター D 加群になる．*(Hodge* の場合，これは *Hodge* 分解とスペクトル列の E_1-退化に対応する主張.*)*
- *(Hard Lefschetz* 性*)* X の *Kähler* 形式 ω が誘導する $\omega^j\colon f_\dagger^{-j}(\mathcal{T})\to f_\dagger^j(\mathcal{T})\otimes\boldsymbol{T}(j)$ は同型．
- *(Hodge-Riemann* 双線型関係*)* $\mathcal{S}$ と ω が $\mathrm{Ker}\bigl(\omega^{j+1}\colon f_\dagger^{-j}(\mathcal{T})\to f_\dagger^{j+2}(\mathcal{T})\otimes\boldsymbol{T}(j+1)\bigr)$ 上に偏極を誘導する．

もともと，f が滑らかで固有の時に偏極付 Hodge 構造の変動の場合に Deligne がこのような定理を証明しました．特異性がない状況では，Simpson [25] が調和束の場合に拡張しました．特異性がある状況では，X が射影的な場合に geometric origin とよばれるようなクラスの正則ホロノミック D 加群に対して，Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [1] が Hard Lefschetz 定理を証明しました．後に de Cataldo-Migliorini [2, 3] が Hodge 理論に基づく別証明を与えました．f が射影的な場合に，偏極付純 Hodge 加群に対して Saito [18] がこのような定理を確立していて，Sabbah [16] は正則純ツイスター D 加群の場合に拡張しました．(ワイルドの場合は [14].) 特異性があるような状況で，f が射影的でなくても X が Kähler であれば良い，という点が定理 4.4 の新しいところです．(射影的でない場合に関しては [19, 20] も参照.)

定理 4.1 と定理 4.2 がどのように使われるかを説明するために，Hard Lefschetz 定理の証明の概略を述べます．整数の組 (n,m) で $n\geq m$ であるものについて，次の主張を考えます．

HLT(n, m) $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{T}) \leq n$, $\dim f(\mathrm{Supp}(\mathcal{T})) \geq m$ ならば定理 4.4 の主張が成り立つ.

次のような流れで証明します.

Step 0 $HLT(0,0)$ を示す. 両方 0 次元ならば簡単です.

Step 1 $HLT(1,0)$ を示す. X がコンパクトリーマン面で, Y が 1 点の場合が本質的で, Zucker の L^2 コホモロジーの結果や, その調和束への一般化に帰着します.

Step 2 $HLT(n,m)$ を仮定して $HLT(n+1,m+1)$ を示す. ここでは説明しませんが, Saito による議論 [18] やそのツイスター版によってなされます.

Step 3 $HLT(n-1,0)$ を仮定して $HLT(n,0)$ を示す.

Step 3 は, X が射影的の時には, Lefschetz ペンシルを用いて議論されました. 定理 4.1 と定理 4.2 を用いると, この部分を一般化することができます. つまり, $\mathrm{Supp}(\mathcal{T})$ の特異点解消 $\widetilde{Z} \to \mathrm{Supp}(\mathcal{T})$ を適当にとると, $\widetilde{Z}$ 上に従順調和束から得られる正則偏極付純ツイスター D 加群 $(\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{S}})$ が得られます. $\widetilde{Z}$ から 1 点への射を $a_{\widetilde{Z}}$ であらわし, 定理 4.1 と定理 4.2 を用いると, $a^j_{\widetilde{Z}\dagger}(\widetilde{\mathcal{T}})$ に関して定理 4.4 の主張が成り立ちます. これを用いることで, $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ についての主張が示されます. 詳しくは [15] を御参照ください.

関連する仕事 代数的な場合であれば以前から知られていた結果で十分でしたが, 一方で, 最近このような方向の研究がなされるようになってきたので, 定理 2.3 についての理解を深めておきたいと思い, 定理 4.1, 定理 4.2, 定理 4.4 について調べました. 個人的には次の二つの仕事に触発されました.

まず一つは, Shentu-Zhao による仕事 [22] です. 彼等は, 正規交叉超曲面とは限らない特異性を持つ偏極付 Hodge 構造の変動の L^2-理論を研究しました. X を Kähler 多様体とし, $Z_1 \subset Z_0$ を X のコンパクトな複素解析的部分集合で $Z_0 \setminus Z_1$ は複素部分多様体になっているとします. $Z_0 \setminus Z_1$ 上の偏極付 Hodge 構造の変動を考えます. この時, $Z_0 \setminus Z_1$ に "distinguished metric" と呼ばれるクラスの完備ケーラー計量 $g_{Z_1 \setminus Z_0}$ が存在して, これと Hodge 計量を用いて得られる L^2 複体が交叉複体と同型であるということを彼等は示しています. そして, 交叉コホモロジーが Hodge 構造を持ち, Hard Lefschetz 性や Hodge-Riemann 双線型関係が成り立つことを示しました. 定理 2.1, 定理 2.2 の一般化なのですが, Z_0 が滑らかで Z_1 が normal crossing の時にも Poincaré 的計量を考えているわけではないので, 少し違う方向への一般化のようです. この講演の主結果 (定理 4.1, 定理 4.2, 定理 4.4) も上のような状況において偏極付 Hodge 構造の変動の交叉コホモロジーがホッジ構造を持ち, Hard Lefschetz 性や Hodge-Riemann 双線型関係が成り立つことを含んでいます. [22] の意義は, L^2-理論をより広範囲に直接適用できるようにしていることにあるのではないかと思います. 一方, この講演の主結果は定理 2.3 を拡張することで純ツイスター D 加群の理論を精密化して, 相対的な場合にも Hard Lefschetz 性や Hodge-Riemann 双線型関係を示しているところです. ですから, コホモロジー上の結果に関しては重なるところもありますが, 異なる方向への一般化を研究しています.

もう一つ, 個人的に刺激を受けた最近の関連する研究は, Wei-Yang [27] によるものです. X, Y を滑らかな射影多様体として, $f\colon X \to Y$ という射が与えられているとします. X 上に半単純平坦束 (V, ∇) が与えられた時, これを D_X-加群とみなすと, その順像と $c_1(\mathcal{O}_X(1))$ の作用について Hard Lefschetz 性が成り立ちます. これは, 偏極付純ツイスター D 加群の理論を用いて

Sabbah によって示されていましたが, Wei-Yang は別証明を与えました. 構造層 $\mathcal{O}_X$ を D 加群とみなした時の順像に関する Hard Lefschetz 定理が Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber によって示され, 後に de Cataldo-Migliorini [2, 3] が別証明を与えていますが, Wei-Yang の仕事は de Cataldo-Migliorini の方法を調和束の場合に適用したものです.

5 証明の一部の方針

どのようなことが問題になるかを説明します. また, 2 次元の場合に証明の一部 (線形化された問題) の方針を説明します.

何が問題になるか？ $\mathcal{X} \setminus \mathcal{H}$ 上では, 自然な包含射 $(\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet)_{|X\setminus H} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}, \mathbb{D}, h)_{|X \setminus H}$ が存在して擬同型なのですが, 調和束が H において特異性を持つならば, $\mathcal{X}$ 上の層の複体の射 $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}, \mathbb{D}, h)$ としては延長されません. ですから,

$$\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet \longleftarrow \mathcal{C}^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}, \mathbb{D}, h) \tag{3}$$

という層の複体の擬同型の図式を構成するか, あるいはそのようなものの存在を示す必要があります.

1 次元の場合 1 次元の場合は, 本質的には Zucker による仕事なのですが, (3) のような図式の候補が容易に得られます. つまり, 開集合 U にたいして, $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet_X$ の U 上の正則切断 τ で, U 上局所的に L^2 であるようなもののなす空間を $\mathcal{C}^\bullet_{L^2,\mathrm{hol}}(U)$ とすると, 層の複体 $\mathcal{C}^\bullet_{L^2,\mathrm{hol}}$ が得られます. これは, 構成から $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet$ の部分複体ですが, Hodge 構造の変動や従順調和束のノルム評価を用いることで $\mathcal{C}^\bullet_{L^2,\mathrm{hol}}$ の具体的な記述が得られ, 包含射 $\mathcal{C}^\bullet_{L^2,\mathrm{hol}} \to \mathfrak{E} \otimes p_\lambda^{-1}(\Omega^\bullet_X)$ が擬同型であることは容易にわかります. 一方, L^2-複体にも含まれていて, ノルム評価や Zucker の L^2-Dolbeault 定理を用いると, 包含射 $\mathcal{C}^\bullet_{L^2,\mathrm{hol}} \to \mathcal{C}^\bullet_{L^2}$ が擬同型であることがわかります.

しかし, 2 次元の場合にはそのような議論ができなくなります. つまり, 正則かつ L^2 というような切断のなす層の複体を考えても, 一般には, $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet_X$ と $\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}, \mathbb{D}, h)$ のいずれとも擬同型ではありません. そのような簡単な例が Cattani と Kaplan によって与えられています [5].

Cattani-Kaplan-Schmid-Kashiwara-Kawai の場合 [7, 10] における交叉複体と L^2 複体の比較では, (3) のような図式を具体的に構成しているわけではなくて, $D^b(\mathbb{C}_X)$ における交叉複体の特徴づけを用いています. つまり, 彼等は L^2-複体が次の二つの条件をみたすことを証明して, $D^b(\mathbb{C}_X)$ における同型の存在を示しています.

- $\Delta^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ から Δ^n への包含写像によって誘導される L^2 コホモロジーの間の射

  $$H^\ell(\Delta^n, \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)) \longrightarrow H^\ell(\Delta^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h))$$

  が, $\ell < n$ の時には同型.

- $\ell \geq n$ では, $H^\ell(\Delta^n, \mathcal{C}^\bullet_{L^2}(V, \nabla, h)) = 0$.

このような特徴付けが $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet_X$ の場合にはないので, $\mathfrak{E} \otimes p_\lambda^* \Omega^\bullet_X$ と $\mathcal{C}^\bullet_{L^2}(\mathcal{E}, \mathbb{D}, h)$ の比較に用いることはできません. 仮に Hodge の場合に限定しても, $\lambda = 0$ への制限や, $\lambda = 0$ のまわりについて考えると, このような議論を適用することはできなくなります.

Kashiwara-Kawaiが示唆したこと [9] には面白いアイディアがいろいろと含まれているのですが, 論文の最後の段落に書かれていることが, Hodgeだけでなくツイスターの場合にも有効です. それは, 交叉複体と L^2 複体の比較を, もっと単純化して線形化した話です. ここで, Hodge構造やツイスター構造の線型代数的に良い性質が本質的に使われています. [9] に説明を補いながら紹介します.[2]

V を有限次元複素ベクトル空間とし, N_1 と N_2 を互いに可換な冪零自己準同型とします. $\mathcal{C}_1^\bullet$ という複体を N_1 と N_2 から定まるKoszul複体とします. つまり, $N_1e_1 + N_2e_2$ と外積から定まる微分をもつ次のような複体を考えます.

$$\mathcal{C}_1^\bullet\colon V \longrightarrow V\cdot e_1 \oplus V\cdot e_2 \longrightarrow V\cdot e_1\wedge e_2.$$

ただし, 最後の項の次数を0としています. $\mathcal{C}_1^\bullet$ の部分複体 $\mathcal{C}_0^\bullet$ が次のように定まります.

$$\mathcal{C}_0^\bullet\colon V \longrightarrow \mathrm{Im}(N_1)\cdot e_1 \oplus \mathrm{Im}(N_2)\cdot e_2 \longrightarrow \mathrm{Im}(N_1N_2)\cdot e_1\wedge e_2.$$

$\mathcal{C}_0^\bullet$ や $\mathcal{C}_1^\bullet$ の意味ですが, $\mathcal{V} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(*z_1z_2)\otimes V$ とおき, 平坦接続 ∇ を $d + N_1\,dz_1/z_1 + N_2dz_2/z_2$ によって定めると, $\mathcal{V}$ のde Rham複体の0における茎と $\mathcal{V}$ の極小拡大のde Rham複体の0における茎は, それぞれ $\mathcal{C}_1^\bullet$, $\mathcal{C}_0^\bullet$ と自然に擬同型です.

次に, L^2 複体を単純化したものを考えます. そのために, $W(N_i)$ を N_i のモノドロミーフィルトレーションとします. つまり, (i) $N_iW_k(N_i)\subset W_{k-2}(N_i)$, (ii) $N_i^k : \mathrm{Gr}_k^{W(N_i)} \simeq \mathrm{Gr}_{-k}^{W(N_i)}$ $(k\geq 0)$ 成り立つようなフィルトレーションとします. N_1 と N_2 が可換なので, $N_1W_k(N_2)\subset W_k(N_2)$, $N_2W_k(N_1)\subset W_k(N_1)$ が成り立ちます. また, N_1+N_2 のモノドロミーフィルトレーション $W(N_1+N_2)$ も定まります.

ここで (V, N_1, N_2) が偏極付混合ツイスター構造から得られる場合を考えます. すると, $W(N_1+N_2)$ は $(V, W(N_1), N_2)$ の相対モノドロミーフィルトレーションであり, $(V, W(N_2), N_1)$ の相対モノドロミーフィルトレーションなので, 特に, $N_iW_k(N_1+N_2)\subset W_{k-2}(N_1+N_2)$ です.

以下では, 記号を簡単にするために, $W' = W(N_1)$, $W'' = W(N_2)$, $W = W(N_1+N_2)$ とします.

$\mathcal{C}_1$ のsubcomplex $W_1\mathcal{C}_1$, $(W_1\cap W_0')\mathcal{C}_1$, $(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_1$ を次のように定めます.

$$W_1\mathcal{C}_1\colon W_1(V)\longrightarrow W_{-1}(V)e_1\oplus W_{-1}(V)e_2\longrightarrow W_{-3}(V)\,e_1\wedge e_2$$

$$(W_1\cap W_0')\mathcal{C}_1\colon \big(W_1\cap W_0'\big)(V)\longrightarrow \big(W_{-1}\cap W_{-2}'\big)(V)e_1\oplus\big(W_{-1}\cap W_0'\big)(V)e_2\longrightarrow\big(W_{-3}\cap W_{-2}'\big)(V)e_1\wedge e_2$$

$$(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_1\colon \big(W_1\cap W_0''\big)(V)\longrightarrow \big(W_{-1}\cap W_0''\big)(V)e_1\oplus\big(W_{-1}\cap W_{-2}''\big)(V)e_2\longrightarrow\big(W_{-3}\cap W_{-2}''\big)(V)e_1\wedge e_2$$

構成から明らかに, 包含写像 $(W_1\cap W_0')\mathcal{C}_1\to W_1\mathcal{C}_1$ と $(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_1\to W_1\mathcal{C}_1$ が得られます. そこで, 写像錐をとり次数を一つずらすことで,

$$\mathrm{Cone}\Big((W_1\cap W_0')\mathcal{C}_1\oplus(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_1\longrightarrow W_1\mathcal{C}_1\Big)[1] \tag{4}$$

という複体が得られます. この複体は L^2 複体と関連します. ノルム評価より, 次のことが成り立ちます.

[2] [15] を準備している時には気付いていませんでしたが, ここで述べる議論は [12, §9] で述べられていることと本質的には同じです.

- $s \in V$ を $\mathcal{V}$ の正則切断とみなすとき,
  $s \in W_1 \iff s$ が $\{-C_1 \log|z_1| < -\log|z_2| < -C_2 \log|z_1|\}$ 上で L^2
  $s \in W_1 \cap W_0' \iff s$ が $\{-\log|z_2| < -C \log|z_1|\}$ 上で L^2.
  類似の評価が, 1-形式 $s\, dz_i/z_i$ や 2-形式 $s\, dz_1\, dz_2/(z_1 z_2)$ についても得られる.

これより, 雑な説明をすると, L^2 複体に関して, 領域

$$\{-C_1 \log|z_1| < -\log|z_2| < -C_2 \log|z_1|\}$$

において本質的に考えるべき部分は $W_1\mathcal{C}_1$, 領域

$$\{-\log|z_2| < -C \log|z_1|\}$$

において本質的に考えるべき部分は $(W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_1$, 領域

$$\{-\log|z_1| < -C \log|z_2|\}$$

において 本質的に考えるべき部分は $(W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_1$ ということになり, $(0,0)$ のまわりにおける L^2 複体の本質的な部分はこれらをはりあわせたものである (4) になります.

そして, [9] の最後の段落ではこれらが本質的には同型であるということが述べられています.

Suggestion(Kashiwara-Kawai) $\mathbb{C}$-複体の導来圏における自然な同型

$$\mathcal{C}_0 \simeq \mathrm{Cone}\Big((W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_1 \oplus (W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_1 \longrightarrow W_1\mathcal{C}_1\Big)[1] \tag{5}$$

が存在する.

擬同型　同型 (5) を構成するために, まず, 次のような $\mathcal{C}_0^\bullet$ の部分複体を考えます.

$$W_1\mathcal{C}_0^\bullet\colon \quad W_1(V) \longrightarrow W_0(\mathrm{Im}\, N_1)e_1 \oplus W_0(\mathrm{Im}\, N_2)e_2 \longrightarrow W_{-1}(\mathrm{Im}\, N_1 N_2)e_1 \wedge e_2$$

$$(W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet\colon (W_1 \cap W_0')(V) \longrightarrow (W_0 \cap W'_{-1})(\mathrm{Im}\, N_1)e_1 \oplus (W_0 \cap W_0')(\mathrm{Im}\, N_2)e_2 \longrightarrow (W_{-1} \cap W'_{-1})(\mathrm{Im}\, N_1 N_2)e_1 \wedge e_2$$

$$(W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_0^\bullet\colon (W_1 \cap W_0'')(V) \longrightarrow (W_0 \cap W_0'')(\mathrm{Im}\, N_1)e_1 \oplus (W_0 \cap W''_{-1})(\mathrm{Im}\, N_2)e_2 \longrightarrow (W_{-1} \cap W''_{-1})(\mathrm{Im}\, N_1 N_2)e_1 \wedge e_2$$

フィルトレーションの添字が先程と少しずれていますが, 対応する部分になるように作ってあります.

補題 5.1 次の包含写像が擬同型:

$$(W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet \xrightarrow{a_1} \mathcal{C}_0^\bullet, \quad (W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_0^\bullet \xrightarrow{a_2} \mathcal{C}_0^\bullet, \quad W_1\mathcal{C}_0^\bullet \xrightarrow{a_3} \mathcal{C}_0^\bullet.$$

a_3 が擬同型という主張は, 純性定理 [15, Proposition 3.12] から得られます. 純性定理は, Cattani-Kaplan-Schmid [7] と Kashiwara-Kawai [10] によって偏極付混合 Hodge 構造から得られる複体について証明されました. こういったタイプの主張は, Hodge の場合に証明されれば, ツイスターの場合にただちに拡張されます.

a_1 についてみてみます. まず,

$$\big(W_0'(V) \to W'_{-1}(\mathrm{Im}\, N_1)\big) \to \big(V \to \mathrm{Im}\, N_1\big),$$

$$\bigl(W_0'(\operatorname{Im} N_2) \to W_{-1}'(\operatorname{Im} N_2 N_1)\bigr) \to \bigl(\operatorname{Im} N_2 \to \operatorname{Im} N_2 N_1\bigr)$$

が擬同型なので, 自然な射

$$\Bigl(W_0'(V) \to W_{-1}'(\operatorname{Im} N_1)\oplus W_0'(\operatorname{Im} N_2) \to W_{-1}'(\operatorname{Im} N_1 N_2)\Bigr) \longrightarrow \Bigl(V \to \operatorname{Im} N_1 \oplus \operatorname{Im} N_2 \to \operatorname{Im} N_1 N_2\Bigr) \quad (6)$$

は擬同型です. (6) を自然に混合ツイスター構造の複体に持ち上げた時, その重みが 1 以下の部分は消滅サイクル定理 [13, Proposition 3.126] によって次のようになります.

$$(W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet \quad (7)$$

(ここで, "消滅サイクル定理 (または descent theorem)" はもともと偏極付混合 Hodge 構造について [7], [10] で証明された定理です. ツイスター版は Hodge の場合の主張より容易に得られます.) したがって, (7) も擬同型になります. a_3 が擬同型であることとあわせると, a_1 が擬同型であることがわかります. 同様の議論で a_2 が擬同型であることもわかります.

上の補題より, 次の擬同型が得られます.

$$\mathcal{C}_0^\bullet \xrightarrow{qis} \operatorname{Cone}\Bigl(\mathcal{C}_0^\bullet \oplus \mathcal{C}_0^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}_0^\bullet\Bigr)[1] \xleftarrow{qis} \operatorname{Cone}\Bigl((W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet \oplus (W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_0^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet\Bigr)[1].$$

したがって, 次の命題を示すと, Kashiwara-Kawai によって示唆された同型が得られたことになります.

命題 5.2 次の自然な射が擬同型*:*

$$\operatorname{Cone}\Bigl((W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet \oplus (W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_0^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet\Bigr)[1] \longrightarrow \operatorname{Cone}\Bigl((W_1 \cap W_0')\mathcal{C}_1^\bullet \oplus (W_1 \cap W_0'')\mathcal{C}_1^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Bigr)[1]. \quad (8)$$

次のような $\mathcal{C}_1$ の部分複体を考えます.

$$\mathcal{C}_2^\bullet \colon V \longrightarrow \operatorname{Im}(N_1)e_1 \oplus V \cdot e_2 \longrightarrow \operatorname{Im}(N_1)e_1 \wedge e_2$$

$$\mathcal{C}_3^\bullet \colon V \longrightarrow V \cdot e_1 \oplus \operatorname{Im}(N_2) \cdot e_2 \longrightarrow \operatorname{Im}(N_2)e_1 \wedge e_2.$$

$\mathcal{V}_{\min}$ を $\mathcal{V}$ の極小拡大とすると, $\mathcal{C}_2^\bullet$ は $\bigl(\Omega^\bullet \otimes \mathcal{V}_{\min}(*H_2)\bigr)[2]$ の $(0,0)$ における茎と擬同型で, $\mathcal{C}_3^\bullet$ は $\bigl(\Omega^\bullet \otimes \mathcal{V}_{\min}(*H_1)\bigr)[2]$ の $(0,0)$ における茎と擬同型です.

さらに, 次の部分複体を考えます.

$$W_1\mathcal{C}_2^\bullet \colon W_1(V) \longrightarrow W_0(\operatorname{Im} N_1)e_1 \oplus W_{-1}(V) \cdot e_2 \longrightarrow W_{-2}(\operatorname{Im}(N_1))e_1 \wedge e_2$$

$$W_1\mathcal{C}_3^\bullet \colon W_1(V) \longrightarrow W_{-1}(V)e_1 \oplus W_0(\operatorname{Im} N_2) \cdot e_2 \longrightarrow W_{-2}(\operatorname{Im}(N_2))e_1 \wedge e_2.$$

純性定理とその双対を用いると, 次の補題が得られます.

補題 5.3 次の射が擬同型.

$$\operatorname{Cone}\Bigl(W_1\mathcal{C}_0^\bullet \oplus W_1\mathcal{C}_0^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet\Bigr)[1] \longrightarrow \operatorname{Cone}\Bigl(W_1\mathcal{C}_2^\bullet \oplus W_1\mathcal{C}_3^\bullet \longrightarrow W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Bigr)[1].$$

さらに, 次の複体を考えます.

$$(W_1\cap W_0')\mathcal{C}_2^\bullet\colon (W_1\cap W_0')(V)\longrightarrow (W_0\cap W_{-1}')(\operatorname{Im}N_1)e_1\oplus (W_{-1}\cap W_0')(V)e_2\longrightarrow (W_{-2}\cap W_{-1}')(\operatorname{Im}N_1)e_1\wedge e_2$$

$$(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_3^\bullet\colon (W_1\cap W_0'')(V)\longrightarrow (W_{-1}\cap W_0'')(V)e_1\oplus (W_0\cap W_{-1}'')(\operatorname{Im}N_2)e_2\longrightarrow (W_{-2}\cap W_{-1}'')(\operatorname{Im}N_2)e_1\wedge e_2$$

次のような自然な射が得られます.

$$(W_1\cap W_0')\mathcal{C}_2^\bullet\longrightarrow W_1\mathcal{C}_2^\bullet,\quad (W_1\cap W_0')\mathcal{C}_0^\bullet\longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet,$$

$$(W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_3^\bullet\longrightarrow W_1\mathcal{C}_3^\bullet,\quad (W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_0^\bullet\longrightarrow W_1\mathcal{C}_0^\bullet$$

W_1 部分をとりだす前の射が擬同型であることを簡単に確認できて, 混合ツイスター構造の複体の W_1 部分をとりだすことになるので, 上の射も擬同型であることがわかります.

したがって, 包含写像から誘導される次の図式において, a が擬同型であることがわかります.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cone}\Big((W_1\cap W_0')\mathcal{C}_0\oplus (W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_0\to W_1\mathcal{C}_0\Big)[1] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "qis"'] & \mathrm{Cone}\Big((W_1\cap W_0')\mathcal{C}_2^\bullet\oplus (W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_3^\bullet\to W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Big)[1] \arrow[d, "qis"'] \\
\mathrm{Cone}\Big(W_1\mathcal{C}_0\oplus W_1\mathcal{C}_0\to W_1\mathcal{C}_0\Big)[1] \arrow[r, "qis"] & \mathrm{Cone}\Big(W_1\mathcal{C}_2^\bullet\oplus W_1\mathcal{C}_3^\bullet\to W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Big)[1]
\end{tikzcd}$$

そして, $W'_{-1}(\operatorname{Im}N_1)\simeq W'_{-2}(V)$, $W''_{-1}(\operatorname{Im}N_2)\simeq W''_{-2}(V)$ なので,

$$\mathrm{Cone}\Big((W_1\cap W_0')\mathcal{C}_2^\bullet\oplus (W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_3^\bullet\to W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Big)[1]=\mathrm{Cone}\Big((W_1\cap W_0')\mathcal{C}_1^\bullet\oplus (W_1\cap W_0'')\mathcal{C}_1^\bullet\to W_1\mathcal{C}_1^\bullet\Big)[1].$$

これらをあわせることで, (8) が擬同型であることがわかります.

2 次元であることから簡単になっている部分もありますが, 本質的にはこのような議論が高次元の場合にも拡張されます. そして, 角領域上の漸近解析や従順調和束の漸近挙動の研究 [13] と組み合わせることで, 定理 4.1 や定理 4.2 が得られます. 詳細は [15] をご覧ください.

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, **100**, (1982), 5–171.

[2] M. A. A. de Cataldo, L. Migliorini, *The hard Lefschetz theorem and the topology of semismall maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **35** (2002), 759–772.

[3] M. A. A. de Cataldo, L. Migliorini, *The perverse filtration and the Lefschetz hyperplane theorem*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), 2089–2113.

[4] E. Cattani, and A. Kaplan, *Polarized mixed Hodge structures and the local monodromy of variation of Hodge structure*, Invent. Math. **67** (1982), 101–115.

[5] E. Cattani, A. Kaplan, *Sur la cohomologie L^2 et la cohomologie d'intersection á coefficients dans une variation de structure de Hodge.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300** (1985), 351–353.

[6] E. Cattani, A. Kaplan and W. Schmid, *Degeneration of Hodge structures*, Ann. of Math. **123** (1986), 457–535.

[7] E. Cattani, A. Kaplan and W. Schmid, *L^2 and intersection cohomologies for a polarized variation of Hodge structure,* Invent. Math. **87** (1987), 217–252.

[8] M. Kashiwara, *The asymptotic behavior of a variation of polarized Hodge str.* Publ. Res. Inst. Math. Sci **21** (1985), 853–875.

[9] M. Kashiwara, T. Kawai, *Hodge structure and holonomic systems*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), 1–4.

[10] M. Kashiwara and T. Kawai, *The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), 345–407.

[11] M. Kashiwara, T. Kawai, *A particular partition of unity: an auxiliary tool in Hodge theory*, in *Theta functions–Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987)*, 19–26, Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[12] 柏原正樹 述, 清水勇二 記, Hodge 構造と Holonomic 系, 東大数学教室セミナリー・ノート **42** 1986

[13] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules I, II*, Mem. AMS. **185**, (2007).

[14] T. Mochizuki, *Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules*, Astérisque **340**, (2011)

[15] T. Mochizuki, *L^2-complexes and twistor complexes of tame harmonic bundles*, arXiv:2204.10443.

[16] C. Sabbah, *Polarizable twistor D-modules* Astérisque, **300**, Société Mathématique de France, Paris, (2005).

[17] C. Sabbah, *Wild twistor D-modules*, in *Algebraic analysis and around*, Adv. Stud. Pure Math., **54**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2009), 293–353.

[18] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS., **24** (1988), 849–995.

[19] M. Saito, *Decomposition theorem for proper Kähler morphisms*, Tohoku Math. J. (2) **42** (1990), 127–147.

[20] M. Saito, *Some remarks on decomposition theorem for proper Kähler morphisms*, arXiv:2204.09026

[21] W. Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319.

[22] J. Shentu, C. Zhao, *L^2-representation of Hodge modules*, arXiv:2103.04030

[23] C. Simpson, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and application to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[24] C. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770.

[25] C. Simpson, *Some families of local systems over smooth projective varieties*, Ann. of Math. (2) **138** (1993), 337–425

[26] C. Simpson, *Mixed twistor structures*, math.AG/9705006.

[27] C. Wei, R. Yang, *Cohomology of semisimple local systems and the Decomposition theorem*, arXiv:2109.11578

[28] S. Zucker, *Hodge theory with degenerating coefficients: L^2 cohomology in the Poincaré metric*, Ann of Math. (2) **109** (1979), 415–476.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
takuro@kurims.kyoto-u.ac.jp