Inversion of adjunction for quotient singularities

柴田康介

概要

本稿では双有理幾何学の不変量である極小対数的食い違い係数について扱う。特に論文 [NS22] の内容である商特異点の場合の PIA (precise inversion of adjunction) 予想とその応用である klt 特異点である完全交叉特異点の有限群による商の場合の LSC (lower semi-continuity) 予想について紹介する。また最後に [NS] の内容である商特異点の Gorenstein 指数についての性質を紹介する。

1　はじめに

特に断らない限り本稿で扱う代数多様体は標数 0 の代数閉体 k 上のものを扱う。極小対数的食い違い係数は双有理幾何学の特異点の不変量である。極小対数的食い違い係数に関する予想には 2 つの重要な予想がある。それは LSC (lower semi-continuity) 予想と ACC (ascending chain condition) 予想と呼ばれるもので次のようなものである。

予想 1.1 (LSC (lower semi-continuity) 予想, (Ambro))**.** $(X, \mathfrak{a})$ をログペアとし、$|X|$ は Zariski 位相を入れた X の閉点全体とする。このとき

$$|X| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \quad x \mapsto \mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a})$$

は下半連続である。

予想 1.2 (ACC (ascending chain condition) 予想, (Shokurov))**.** $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ と DCC を満たす集合 $I \subset [0, 1]$ を固定する。このとき

$$\Big\{ \mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}) \mid (X, \mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}) : \text{ログペア}, \dim X = d, x \in X, r_i \in I \Big\}$$

は ACC を満たす。

Shokurov は [Sho04] の中で極小対数的食い違い係数のこの 2 つの予想が正しいとする

と極小モデル理論の重要な問題であるフリップの停止予想が正しいことを示した。本稿ではLSC予想を重点的に扱う。

LSC予想は一般には解けていないが、次の場合はLSC予想が成り立つことが知られている。

(1.1.1) $\dim X \leq 3$ の場合 [Amb99].
(1.1.2) X が非特異多様体の場合 [EMY03].
(1.1.3) X が正規完全交叉多様体の場合 [EM04].
(1.1.4) X が商特異点の場合 [Nak16].
(1.1.5) X が任意の標数の代数閉体上の非特異代数多様体であり log canonical threshold が正である場合 [Shi].

本稿の主結果の一つは完全交叉特異点の有限群による商の場合のLSC予想についてである。

定理 1.3. *有限群 $G \subset \mathrm{GL}_N(k)$ が $\mathbb{A}_k^N$ に余次元 1 で自由に作用しているとする。$X := \mathbb{A}_k^N/G$ とする。Y を X の余次元 c の部分代数多様体であり klt 特異点であるとし、$\mathfrak{a}$ を Y 上の $\mathbb{R}$-イデアル層とする。さらに Y は X で局所的に c 個の式で定義されていると仮定する。このとき*

$$|Y| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \quad y \mapsto \mathrm{mld}_y(Y, \mathfrak{a})$$

は下半連続である。ただし $|Y|$ は Zariski 位相を入れた Y の閉点全体とする。

また本稿では PIA (precise inversion of adjunction) 予想も扱う。

予想 1.4 (PIA 予想, [92, 17.3.1])**.** $(X, \mathfrak{a})$ をログペアとし D を正規 Cartier 素因子とし $x \in D$ を閉点とする。D が $\mathbb{R}$-イデアル層 $\mathfrak{a}$ の余台に含まれていないとする。このとき

$$\mathrm{mld}_x\bigl(X, \mathfrak{a}\mathcal{O}_X(-D)\bigr) = \mathrm{mld}_x(D, \mathfrak{a}\mathcal{O}_D)$$

が成り立つ。

次の場合は PIA 予想が成り立つことが知られている。

(1.4.1) X が非特異代数多様体の場合 [EMY03].
(1.4.2) X が正規完全交叉代数多様体である場合 [EM04].

次は本稿の主結果の一つである。

定理 1.5. 有限群 $G \subset \mathrm{GL}_N(k)$ が $\mathbb{A}_k^N$ に余次元 *1* で自由に作用しているとする。$X := \mathbb{A}_k^N/G$ とし $x \in X$ を $\mathbb{A}_k^N$ の原点の像とする。Y を x を通る X の余次元 c の部分代数多様体とし $\mathfrak{a}$ を Y 上の $\mathbb{R}$-イデアル層とする。さらに Y は X で局所的に c 個の式で定義されていると仮定する。D を x を通る Y の正規 *Cartier* 素因子であり x で *klt* 特異点とする。さらに D が $\mathbb{R}$-イデアル層 $\mathfrak{a}$ の余台に含まれていないとする。このとき

$$\mathrm{mld}_x\big(Y, \mathfrak{a}\mathcal{O}_Y(-D)\big) = \mathrm{mld}_x(D, \mathfrak{a}\mathcal{O}_D).$$

が成り立つ。

定理 1.3 は定理 1.5 により商特異点の場合の LSC 予想に帰着することができる。したがって定理 1.5 が本稿の本質的な主定理である。

2　準備

正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X と X 上の $\mathbb{R}$-イデアル層 $\mathfrak{a}$ のペア $(X, \mathfrak{a})$ をログペアという。ただし X 上の $\mathbb{R}$-イデアル層 $\mathfrak{a}$ は X 上のイデアル層 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ と正の実数 $r_1, \ldots, r_s$ に対しての形式的な積 $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{a}_i^{r_i}$ である。射 $Y \to X$ と $\mathbb{R}$-イデアル層 $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{a}_i^{r_i}$ に対して $\mathfrak{a}\mathcal{O}_Y$ を Y 上の $\mathbb{R}$-イデアル層 $\prod_{i=1}^s (\mathfrak{a}_i\mathcal{O}_Y)^{r_i}$ と定義する。

定義 2.1. X を正規代数体とする。固有射 $f : X' \to X$ と正規代数多様体 X' が存在し、E が X' 上の素因子であるとき、E を X 上空の素因子という。

定義 2.2. $(X, \mathfrak{a} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{a}_i^{r_i})$ をログペアとする。

1. E を X 上空の素因子とする。すなわち、固有射 $f : X' \to X$ と正規代数多様体 X' が存在し、E は X' 上の素因子となっている。このとき E における $(X, \mathfrak{a})$ の対数的食い違い係数を

$$a_E(X, \mathfrak{a}) := 1 + \mathrm{ord}_E(K_{X'} - f^*K_X) - \mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}),$$

と定義する。ただし $\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^s r_i \,\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}_i)$ とする。
2. $f : X' \to X$ を固有射、X' を正規代数多様体、E を X' 上の素因子とする。このとき、像 $f(E)$ を X 上 E の *center* と呼び、$c_X(E)$ とかく。
3. X 上空の任意の素因子 E に対して $a_E(X, \mathfrak{a}) > 0$ (≥ 0) であるならばログペア $(X, \mathfrak{a})$ を klt 特異点 (対数的標準特異点) という。

4. $\dim X \geq 2$ のとき、閉点 $x \in X$ に対して x における極小対数的食い違い係数を

$$\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}) := \inf_{c_X(E)=\{x\}} a_E(X, \mathfrak{a})$$

と定義する。ただし X 上空の素因子 E で $c_X(E) = \{x\}$ である全てに対しての下限を考える。$\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}$ であることが知られている。また $\dim X = 1$ の場合は $\inf_{c_X(E)=\{x\}} a_E(X, \mathfrak{a})$ が非負であるとき $\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}) := \inf_{c_X(E)=\{x\}} a_E(X, \mathfrak{a})$ と定義し、$\inf_{c_X(E)=\{x\}} a_E(X, \mathfrak{a})$ が負のとき $\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{a}) = -\infty$ と定義する。

例 2.3. $X = \mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^m + \cdots + x_n^m)$ とし、$p \in X$ を原点とする。

1. もし $m < n$ ならば X は klt 特異点である。
2. もし $m = n$ ならば X は対数的標準特異点である。
3. もし $m > n$ ならば X は対数的標準特異点ではない。
4. もし $m \leq n$ ならば $\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) = n - m$ である。
5. もし $m > n$ ならば $\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) = -\infty$ である。

3 証明のアイディア

3.1 k 上のスキームの弧空間

この小節では完全交叉代数多様体の場合の極小対数的食い違い係数が孤空間により計算できることを紹介する。より詳しく知りたい場合は、[EM04] や [EM09] を参照してほしい。まずジェットスキームの定義を紹介する。

定義 3.1. X を k 上有限型のスキームとし、(Sch/k) を k-スキームの圏、(Sets) を集合の圏とする。関手 $F_m : (\mathsf{Sch}/k) \to (\mathsf{Sets})$ を次のように定義する。

$$F_m(Y) = \mathrm{Hom}_k \left(Y \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^{m+1}), X \right).$$

このとき F_m は k 上有限型のスキーム X_m で表現可能であり、この X_m を X の m 次ジェットスキームと呼ぶ。

$m \geq n \geq 0$ に対して、自然な射 $k[t]/(t^{m+1}) \to k[t]/(t^{n+1})$ から誘導される射 $\pi_{mn} : X_m \to X_n$ がある。

定義 3.2. X を k 上有限型のスキームとする。このとき射影極限 $X_\infty := \varprojlim_m X_m$ が存在し、X_∞ を X の弧空間という。また X_∞ から X_m への射影を $\psi_m : X_\infty \to X_m$ とかく。

孤空間 X_∞ は次の性質を持つ。任意の体の拡大 K/k に対して

$$\mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} K, X_\infty) \simeq \mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} K[[t]], X)$$

が成り立っている。

命題 3.3. X, Y を k 上有限型のスキームとする。このとき $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ と k 上有限型のスキームの射 $f : Y \to X$ に対して f から誘導されるジェットスキーム（孤空間）の間の射 $f_m : Y_m \to X_m$ が得られる。

例 3.4. $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$ に対しては m 次ジェットスキームは

$$(\mathbb{A}^2)_m = \operatorname{Spec} k[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m]$$

となる。また孤空間は

$$(\mathbb{A}^2)_\infty = \operatorname{Spec} k[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, \ldots]$$

である。

$f \in k[x, y]$ に対して $f_m \in k[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m]$ を次のように定義する。

$$f(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots, y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots$$

例 3.5. $X = \operatorname{Spec} k[x, y]/(f)$ の m 次ジェットスキームは

$$X_m = \operatorname{Spec} k[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m]/(f_0, f_1, \ldots, f_m)$$

となる。また孤空間は

$$X_\infty = \operatorname{Spec} k[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, \ldots]/(f_0, f_1, \ldots, f_m, \ldots)$$

である。

さらに一般の $\operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_c)$ に対しても同じようにジェットスキームや孤空間を求めることができる。

定義 3.6. X を k 上有限型のスキームとする。

1. $\gamma \in X_\infty$ とイデアル層 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ に対して γ による $\mathfrak{a}$ の位数を次のように定義する。
$$\mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a}) = \sup\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \gamma^*(\mathfrak{a}) \subset (t^r)\},$$
ただし $\gamma^* : \mathcal{O}_X \to K[[t]]$ は γ による環の準同型写像であり、K は k の体の拡大体である。
2. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して contact locus と呼ばれる X_∞ の部分集合 $\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a}), \mathrm{Cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}) \subset X_\infty$ を次のように定義する。
$$\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a}) = \{\gamma \in X_\infty \mid \mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a}) = m\},$$
$$\mathrm{Cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}) = \{\gamma \in X_\infty \mid \mathrm{ord}_\gamma(\mathfrak{a}) \geq m\}.$$

定義 3.7. X を k 上有限型のスキームとする。構成的部分集合 $S \subset X_m$ の逆像 $\psi_m^{-1}(S) \subset X_\infty$ をシリンダーと呼ぶ。

例 3.8. X を k 上有限型のスキームとし、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ をイデアル層とする。このとき $\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a}), \mathrm{Cont}^{\geq m}(\mathfrak{a}) \subset X_\infty$ はシリンダーである。

k 上の代数多様体 X の Jacobian イデアルを $\mathrm{Jac}_{X/k} := \mathrm{Fitt}^n(\Omega_{X/k})$ と書く。

定義 3.9. X を k 上の代数多様体とし、$C \subset X_\infty$ をシリンダーとする。ある $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $C \subset \mathrm{Cont}^e(\mathrm{Jac}_{X/k})$ と仮定する。このとき、C の X_∞ における余次元を十分大きい m に対して
$$\mathrm{codim}(C) := (m+1)\dim X - \dim \psi_m(C)$$
と定義する。

注意 3.10. 十分大きい m に対して $(m+1)\dim X - \dim \psi_m(C)$ は一定になることがわかっている。

完全交叉代数多様体の極小対数的食い違い係数は contact locus の余次元により計算することができる。

定理 3.11. $B = \mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_N]/(f_1, \ldots, f_c)$ を完全交叉代数多様体、$x = 0 \in B$ を原点、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_B$ をイデアル層、δ を非負の実数とする。このとき、
$$\mathrm{mld}_x(B, \mathfrak{a}^\delta) = \inf_{w, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left\{\mathrm{codim}(C_{w,b}) - b - \delta w\right\}$$
が成り立つ。ただし、$\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_B$ は閉点 $x \in B$ に対応する極大イデアル層であり、
$$C_{w,b} = \mathrm{Cont}^w(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x) \cap \mathrm{Cont}^b(\mathrm{Jac}_{B/k})$$

とする。

非特異代数多様体や完全交叉代数多様体の場合の PIA 予想は極小対数的食い違い係数が孤空間により計算できることを用いて証明をされている。

定理 3.12. $A = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]$ とし、$x = 0 \in A$ を原点、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_A$ をイデアル層、δ を非負の実数とする。$B = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]/(f_1, \ldots, f_c)$ を完全交叉代数多様体とし、$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]/(f_1, \ldots, f_c)$ とする。このとき、

$$\operatorname{mld}_x(A, (f_1 \cdots f_c)\mathfrak{a}^{\delta}) = \operatorname{mld}_x(B, \mathfrak{a}^{\delta})$$

が成り立つ。

この定理により完全交叉代数多様体の LSC 予想は非特異代数多様体の場合の LSC 予想に帰着される。

3.2 k[t] 上のスキームの弧空間

$k[t]$ 上のスキームの弧空間を考えることで完全交叉特異点の有限群による商の場合の極小対数的食い違い係数も孤空間により計算することができる。この小節では $k[t]$ 上のスキームの弧空間について紹介し、完全交叉特異点の有限群による商の場合の極小対数的食い違い係数の孤空間による計算方法を紹介する。

定義 3.13. X を $\operatorname{Spec} k[t]$ 上有限型のスキームとする。関手 $F_m : (\mathsf{Sch}/k) \to (\mathsf{Sets})$ を次のように定義する。

$$F_m(Y) = \operatorname{Hom}_{k[t]}\left(Y \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k[t]/(t^{m+1}), X\right).$$

このとき F_m は k 上有限型のスキーム X_m で表現可能であり、この X_m を X の m 次ジェットスキームと呼ぶ。

$m \geq n \geq 0$ に対して、自然な射 $k[t]/(t^{m+1}) \to k[t]/(t^{n+1})$ から誘導される射 $\pi_{mn} : X_m \to X_n$ があるため k 上有限型スキームの時と同じように孤空間 X_∞ を定義することができる。

定義 3.14. X を $k[t]$ 上有限型のスキームとする。このとき射影極限 $X_\infty := \varprojlim_m X_m$ が存在し、X_∞ を X の弧空間という。また X_∞ から X_m への射影を $\psi_m : X_\infty \to X_m$ とかく。

$\mathrm{Cont}^m(\mathfrak{a})$、$\mathrm{Cont}^{\geq m}(\mathfrak{a})$ についても k 上有限型スキームのときと同様に定義することができる。

例 3.15. $X = \mathrm{Spec}\, k[t][x]$ に対して $X_m = \mathrm{Spec}\, k[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ となる。一般に k 上有限型のスキーム X と $Y = X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k[t]$ に対して $X_m \simeq Y_m$ が成り立つ。

注意 3.16. k 上有限型のスキーム X に対しては $X_0 \simeq X$ が成り立つが、$k[t]$ 上有限型のスキームでは、一般的にはこの同型は成り立たない。

例 3.17. $X = \mathrm{Spec}\, k[t][x, y]/(tx + y^2)$ とするとき、$X_0 = \mathrm{Spec}\, k[x_0, y_0]/(y_0^2)$、$X_1 = \mathrm{Spec}\, k[x_0, y_0, x_1, y_1]/(y_0^2, x_0 + 2y_0y_1)$ となる。

ここからのこの小節では常に $G \subset \mathrm{GL}_N(k)$ を位数 d の有限群であり $\mathbb{A}_k^N = \mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_N]$ に線形に作用しているとする。さらに射 $\mathbb{A}_k^N \to \mathbb{A}_k^N/G$ が余次元 1 でエタールであると仮定する。

定義 3.18. $\xi \in k$ を原始 d 乗根とする。G は有限群であるので $\gamma \in G$ は対角化できる。そこで $x_1, \ldots, x_N$ をうまく取り替えることにより γ は対角行列であり対角成分は $\xi^{e_1}, \ldots, \xi^{e_N}$ $(0 \leq e_i \leq d-1)$ であるとする。

1. このとき、$\mathrm{age}(\gamma) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{d}$ と定義する。
2. $k[t]$-射 λ_γ を

$$\lambda_\gamma : k[t][x_1, \ldots, x_N]^G \to k[t][x_1, \ldots, x_N]; \quad x_i \mapsto t^{\frac{e_i}{d}} x_i$$

   と定義する。

この射は Denef と Loeser が [DL02] の中で商特異点を調べるために考えたものである。この λ_γ を考える利点としては複雑な孤空間である $(\mathbb{A}_k^N/G)_\infty$ の contact locus の余次元を、簡単な孤空間である $(\mathbb{A}_k^N)_\infty$ に λ_γ で contact locus を移すことで、この孤空間の contact locus の余次元で計算が可能になることである。完全交叉特異点の有限群による商の場合も次の λ_γ から誘導される射を考えることで完全交叉に近い場合の孤空間を考えることに帰着させる。

定義 3.19. 原点に対応する極大イデアルに含まれている元 $f_1, \ldots, f_c \in k[x_1, \ldots, x_N]^G$ を正則列とする。このとき、

$$\mu_\gamma : k[t][x_1, \ldots, x_N]^G/(f_1, \ldots, f_c) \to k[t][x_1, \ldots, x_N]/(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c))$$

を λ_γ から誘導される $k[t]$-射と定義する。

注意 3.20. 全ての i に対して $e_i > 0$ のとき、$(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c)) \subset (t)$ となるので、一般的には $k[t][x_1, \ldots, x_N]/(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c))$ は完全交叉ではない。しかし、代数多様体が完全交叉の場合の孤空間の性質の証明の多くの場合が $k[t][x_1, \ldots, x_N]/(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c))$ の孤空間の性質の証明についても適用できる。

$k[t]$ 上有限型のスキームに対してもシリンダーを k 上有限型のスキームの場合と同じように定義する。

定義 3.21. X を $k[t]$ 上有限型のスキームとする。構成的部分集合 $S \subset X_m$ の逆像 $\psi_m^{-1}(S) \subset X_\infty$ をシリンダーと呼ぶ。

$k[t]$ 上有限型スキーム X の Jacobian イデアルを $\mathrm{Jac}_{X/k[t]} := \mathrm{Fitt}^n(\Omega_{X/k[t]})$ と書く。

定義 3.22. 原点に対応する極大イデアルに含まれている元 $f_1, \ldots, f_c \in k[x_1, \ldots, x_N]^G$ を正則列とし、$B = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]^G/(f_1, \ldots, f_c)$ を代数多様体とする。$\gamma \in G$ に対して $\overline{B}^{(\gamma)} = \operatorname{Spec} k[t][x_1, \ldots, x_N]/(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c))$ とする。$C \subset (\overline{B}^{(\gamma)})_\infty$ をシリンダーとする。ある $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $C \subset \mathrm{Cont}^e(\mathrm{Jac}_{\overline{B}^{(\gamma)}/k[t]})$ と仮定する。このとき、C の $\overline{B}^{(\gamma)}_\infty$ における余次元を十分大きい m に対して

$$\mathrm{codim}(C) := (m+1)\dim B - \dim \psi_m(C)$$

と定義する。

完全交叉特異点の有限群による商の場合の極小対数的食い違い係数は次のように孤空間を用いて計算できる。

定理 3.23 (中村-柴田)**.** 原点に対応する極大イデアルに含まれている元 $f_1, \ldots, f_c \in k[x_1, \ldots, x_N]^G$ を正則列とし、$B = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]^G/(f_1, \ldots, f_c)$ を代数多様体とする。$x = 0 \in B$ を原点とし、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_B$ をイデアル層とし δ を非負の実数とする。このとき、

$$\mathrm{mld}_x(B, \mathfrak{a}^\delta) = \inf_{w, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \gamma \in G} \left\{ \mathrm{codim}(C_{w,\gamma,b}) + \mathrm{age}(\gamma) - b - \delta w \right\}$$

が成り立つ。ただし $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_B$ は閉点 $x \in B$ に対応する極大イデアルであり、$\overline{B}^{(\gamma)} = \operatorname{Spec} k[t][x_1, \ldots, x_N]/(\lambda_\gamma(f_1), \ldots, \lambda_\gamma(f_c))$ とし、

$$C_{w,\gamma,b} = \mathrm{Cont}^w(\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\overline{B}^{(\gamma)}}) \cap \mathrm{Cont}^{\geq 1}(\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\overline{B}^{(\gamma)}}) \cap \mathrm{Cont}^b(\mathrm{Jac}_{\overline{B}^{(\gamma)}/k[t]})$$

とする。

この定理により商特異点の極小対数的食い違い係数は巡回群の商特異点の極小対数的食い違い係数より計算できることがわかる。これは任意の商特異点の極小対数的食い違い係数はある巡回群による商特異点の極小対数的食い違い係数に等しいかという Borisov の問題に対して肯定的な解答を与えている。

系 3.24 (中村-柴田)**.** $\mathfrak{a} \subset k[x_1, \ldots, x_N]^G$ をイデアルとし、δ を非負の実数とする。$\gamma \in G$ に対して, $\langle\gamma\rangle$ を γ で生成された G の部分群とする。$x \in \mathbb{A}^N/G$ と $x_\gamma \in \mathbb{A}^N/\langle\gamma\rangle$ を $\mathbb{A}^N$ の原点の像とする。このとき、

$$\mathrm{mld}_x(\mathbb{A}^N/G, \mathfrak{a}^\delta) = \min_{\gamma \in G} \mathrm{mld}_{x_\gamma}\left(\mathbb{A}^N/\langle\gamma\rangle, (\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^N/\langle\gamma\rangle})^\delta\right).$$

が成り立つ。

定理 3.23 により完全交叉特異点の有限群による商の場合も極小対数的食い違い係数が孤空間により計算できることがわかったので、完全交叉代数多様体の場合の PIA 予想を証明する手法と同じような手法により、完全交叉特異点の有限群による商の場合の PIA 予想を証明することができる。

定理 3.25. $A = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]^G$ とし、$x = 0 \in A$ を原点、$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_A$ をイデアル層、δ を非負の実数とする。原点に対応する極大イデアルに含まれている元 $f_1, \ldots, f_c \in k[x_1, \ldots, x_N]^G$ を正則列とし、$B = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]^G/(f_1, \ldots, f_c)$ を代数多様体とし、$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_N]^G/(f_1, \ldots, f_c)$ とする。B が *klt* 特異点であると仮定する。このとき、

$$\mathrm{mld}_x(A, (f_1 \cdots f_c)\mathfrak{a}^\delta) = \mathrm{mld}_x(B, \mathfrak{a}^\delta)$$

が成り立つ。

注意 3.26. この定理で klt 特異点であることを仮定している理由としては、この定理の証明の中で A_∞ に含まれるあるシリンダーと B_∞ の共通部部分が thin でないという性質を示すところで klt 特異点であるという性質を使っている。完全交叉代数多様体の場合は特異点に対してこのような仮定がなくても、この性質を示せるが $k[t]$ 上有限型のスキームでは一般にこの性質は成り立たないことがわかっている。

この定理 3.25 により定理 1.5 を示すことができる。さらに定理 1.5 より完全交叉特異点の有限群による商の場合の LSC 予想は商特異点の場合の LSC 予想に帰着することができるので定理 1.3 が示される。

4　商特異点の場合の極小対数的食い違い係数の性質

最後にこの章では商特異点の極小対数的食い違い係数が簡単に計算できることを利用してわかった最近の結果を紹介する。この章の内容は論文 [NS] に書かれているものである。

定義 4.1. n を正の整数とし、$G \subset \mathrm{GL}_n(k)$ を有限群とする。d を G の位数とし、$\xi \in k$ を原始 d 乗根とする。このとき、G は有限群であるので $\gamma \in G$ は対角化できる。そこで $x_1, \ldots, x_N$ をうまく取り替えることにより γ は対角行列であり対角成分は $\xi^{e_1}, \ldots, \xi^{e_N}$ $(1 \leq e_i \leq d)$ であるとする。このとき、$\mathrm{age}'(g) := \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{d}$ と定義する。

注意 4.2. $\mathrm{age}(g) = \mathrm{age}'(g) - \#\{1 \leq i \leq n \mid e_i = d\}$ が成り立っている。

定理 3.23 により商特異点の極小対数的食い違い係数が次のように簡単に計算できることがわかる。

命題 4.3. $G \subset \mathrm{GL}_n(k)$ を有限群とし、$x_0 \in \mathbb{A}^n_k/G$ を $\mathbb{A}^n_k$ の原点の像とする。このとき

$$\mathrm{mld}_{x_0}\left(\mathbb{A}^n_k/G, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k/G}\right) = \min\{\mathrm{age}'(g) \mid g \in G\}.$$

が成り立つ。

定義 4.4. X を正規代数多様体とし、$p \in X$ を閉点とする。X を点 p で $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点であると仮定する。つまりある正の整数 r に対して rK_X が点 p で Cartier であると仮定する。このとき、X の p における Gorenstein 指数を rK_X が点 p で Cartier となる最小の正の整数 r とする。

極小対数的食い違い係数の定義より極小対数的食い違い係数の値は Gorenstein 指数に依存していることがわかるが、Shokurov は逆に Gorenstein 指数が極小対数的食い違い係数に依存していること予想している。

予想 4.5 (Shokurov's index conjecture)**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して次の条件を満たす正の整数 $r(n, a)$ が存在する。

- n 次元 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X と閉点 $p \in X$ が $\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) = a$ を満たしているとき X の p における Gorenstein 指数は $r(n, a)$ 以下である。

定理 4.3 を使い商特異点の場合の Shokurov's index conjecture を示した。

定理 4.6 (中村-柴田)**.** 商特異点に対して予想 *4.5* は正しい。

また Shokurov は極小対数的食い違い係数について次のことを予想している。

予想 4.7 (Shokurov)**.** X を n 次元 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体とし、$p \in X$ を閉点とする。このとき

1. $\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) \le n$ であり、等号が成り立つ必要十分条件は X が閉点 p で非特異であることである。
2. もし X が p で特異点であれば、$\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) \le n-1$ である。
3. $\mathrm{mld}_p(X, \mathcal{O}_X) = n-1$ ならば、X は点 p で Gorenstein である。

この予想についても商特異点の場合に定理 4.3 を使い証明することができた。

定理 4.8 (中村-柴田)**.** 商特異点に対して予想 *4.7* は正しい。

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2022 での講演の機会を与えて下さった世話人の皆様に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 19K14496 の助成を受けたものです。

参考文献

[92] *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Société Mathématique de France, Paris, 1992. Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991; Astérisque No. 211 (1992) (1992).

[Amb99] F. Ambro, *On minimal log discrepancies*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.

[DL02] J. Denef and F. Loeser, *Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence*, Compositio Math. **131** (2002), no. 3, 267–290.

[EM04] L. Ein and M. Mustaţă, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.

[EM09] L. Ein and M. Mustaţă, *Jet schemes and singularities*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 505–546.

[EMY03] L. Ein, M. Mustaţă, and T. Yasuda, *Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.

[Nak16] Y. Nakamura, *On semi-continuity problems for minimal log discrepancies*, J. Reine Angew. Math. **711** (2016), 167–187.

[NS22] Y. Nakamura and K. Shibata, *Inversion of adjunction for quotient singularities*, Algebr. Geom. **9** (2022), no. 2, 214–251.

[NS] ———, *Shokurov's index conjecture for quotient singularities*, available at `arXiv:2209.04845v1`.

[Shi] K. Shibata, *Minimal log discrepancies in positive characteristic*, available at `arXiv:1912.04665`.

[Sho04] V. V. Shokurov, *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips*, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351; English transl., Proc. Steklov Inst. Math. **3 (246)** (2004), 315–336.