

On a gluing construction of K3 surfaces

上原崇人*

概要

本稿では、「城崎代数幾何学シンポジウム 2022」において講演した内容を、小池貴之氏 (大阪公立大学) との共同研究 (論文 [KU1, KU2]) をもとに概説する。目的は、K3 曲面の「貼り合わせ構成」を紹介するとともに、本構成による K3 曲面の族が射影的曲面の族を含むことを示すことである。

1 はじめに

本稿では、「城崎代数幾何学シンポジウム 2022」において講演した内容を、小池貴之氏 (大阪公立大学) との共同研究 (論文 [KU1, KU2]) をもとに概説する。

論文 [KU1] において、K3 曲面の族を構成するため、いわゆる「貼り合わせ構成」の方法を展開した。すなわち、複素射影平面の 9 点ブローアップに埋め込まれた楕円曲線の正則管状近傍の補集合で与えられる開複素曲面を 2 つ用意して、この 2 つの複素曲面を正則に貼り合わせることで 19 次元の K3 曲面の族が構成されることを論文 [KU1] で示した。さらに、2021 年 Lequien 氏 [L] によって、Lebesgue 測度に関してほとんど全ての周期に対応する K3 曲面は、この貼り合わせ構成により得られることも示されている。この K3 曲面の族における一般の曲面は非射影的であるが、論文 [KU2] において、K3 曲面の族において 18 次元の射影的曲面の部分族が存在することを示している。本稿では、K3 曲面の「貼り合わせ構成」を紹介するとともに、本構成による K3 曲面の族が射影的曲面の族を含むことを示す。

2 K3 曲面の構成と主結果

本節では、K3 曲面の貼り合わせ構成について紹介する。詳しくは、[KU1, KU2] を参照せよ。まず、パラメータを準備する。

- (0) $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ は Diophantine 条件をみたす、つまり、 $\alpha > 0$ と $A > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、次の不等式をみたすとする:

$$\min_{(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}^2} \|n(p, q) - (\mu, \nu)\| \geq \frac{A}{n^\alpha}.$$

*岡山大学大学院自然科学系, E-mail address: takaue@okayama-u.ac.jp

(a) $(\tau, \mathbf{p}) = (\tau, p_1^+, \dots, p_9^+, p_1^-, \dots, p_9^-) \in \{\text{Im } \tau > 0\} \times \mathbb{C}^{18}$ は次の等式をみたすとする:

$$\sum_{k=1}^9 p_k^\pm = \pm(p\tau - q). \quad (1)$$

(b) $(\xi, s) \in \mathbb{C} \times \{0 < |s| < 1\}$ とする.

まず, (0) と (a) で定まるパラメータから, 射影平面 \mathbb{P}^2 に埋め込まれた楕円曲線 $C_0 := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) \subset \mathbb{P}^2$ を考えて, 9点 $\{p_1^\pm, \dots, p_9^\pm\} \subset C_0$ のブローアップを $S^\pm \rightarrow \mathbb{P}^2$ として, C_0 の狭義変換を $C^\pm \subset S^\pm$ とする. このとき, $\text{Pic}^0(C^\pm) \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ と同一視すると, C^\pm の S^\pm における法束 N_{C^\pm/S^\pm} は $N_{C^\pm/S^\pm} = \pm(p\tau - q)$ となる. ここで, (p, q) は Diophantine 条件をみたすことに注意すると, Arnol'd の定理 [A] により, C^\pm の S^\pm における正則な環状近傍 $W^\pm \subset S^\pm$ が存在する. つまり, W^\pm は N_{C^\pm/S^\pm} のゼロ切断の近傍と双正則な C^\pm の近傍であるが, 今回の設定では, 適当な定数 $R > 1$ を用いて,

$$W^\pm \cong \{(z^\pm, w^\pm) \in \mathbb{C}^2 \mid |w^\pm| < R\} / \sim_\pm$$

かつ, $C^\pm \cong \mathbb{C}_{z^\pm} \times \{w^\pm = 0\} / \sim^\pm$ と表される. ただし, \sim_\pm は次で定まる同値関係である:

$$(z^\pm, w^\pm) \sim_\pm (z^\pm + 1, \exp(\pm p \cdot 2\pi\sqrt{-1}) \cdot w^\pm) \sim_\pm (z^\pm + \tau, \exp(\pm q \cdot 2\pi\sqrt{-1}) \cdot w^\pm).$$

また, (b) で定まるパラメータを用いて, S^\pm の開部分多様体 M^\pm を

$$M^\pm := S^\pm \setminus \{(z^\pm, w^\pm) \in W^\pm \mid |w^\pm| \leq \sqrt{|s|}/R\}$$

で定義して, M^\pm の境界の近傍を

$$V^\pm := \{(z^\pm, w^\pm) \in W^\pm \mid \sqrt{|s|}/R < |w^\pm| < \sqrt{|s|}R\} \subset M^\pm$$

で定める. さらに, $g_\xi: C^+ \rightarrow C^-$ を $g_\xi([z^+]) := [z^+ + \xi]$ で定義して, 双正則写像 $f: V^+ \rightarrow V^-$ を

$$f([(z^+, w^+)]) = [(z^-, w^-)] = [(g_\xi(z^+), s/w^+)]$$

で定める. このとき, f によって V^+ と V^- を同一視して, M^+ と M^- を貼り合わせることで, コンパクト複素曲面 $X = X_b := M^+ \cup_f M^-$ が定まる. ただし, $b = (\tau, \mathbf{p}, \xi, s)$ である (図1 参照). (a) と (b) で定まるパラメータ $b = (\tau, \mathbf{p}, \xi, s)$ の空間を B とおく. 条件式 (1) を加味すると, B は 19次元の複素多様体となることに注意する. 論文 [KU1] において次の結果を示している.

定理 2.1 ([KU1]) 各 X_b は K3 曲面であり, $\{X_b\}_{b \in B}$ は 19次元の有効なパラメータ空間 B をもつ複素解析族をなす. また, 一般の $b \in B$ に対して, X_b は非射影的な K3 曲面である.

ここで, コンパクト複素曲面 X が K3 曲面であるとは, X の基本群が自明, かつ, X 上で至るところ消えない正則 2 次形式が存在することである. 本構成における曲面 $X = X_b$ 上の正則 2 次形式 σ は,

$$\sigma|_V = c \cdot \frac{dz \wedge dw}{w}$$

をみたすことが示される. ただし, $c \in \mathbb{C}^*$ は定数で, $V \subset X$ は $V_s^+ \cong V_s^-$ に対応する開部分多様体, (z, w) は (z^+, w^+) から誘導される座標である. この関係式を用いて周期を計算することが, 定理 2.1 における複素解析族の有効性を示すための要である.

実は, ほとんど全ての K3 曲面は本構成により実現されることが, 2021 年に Lequen 氏によって示されている.

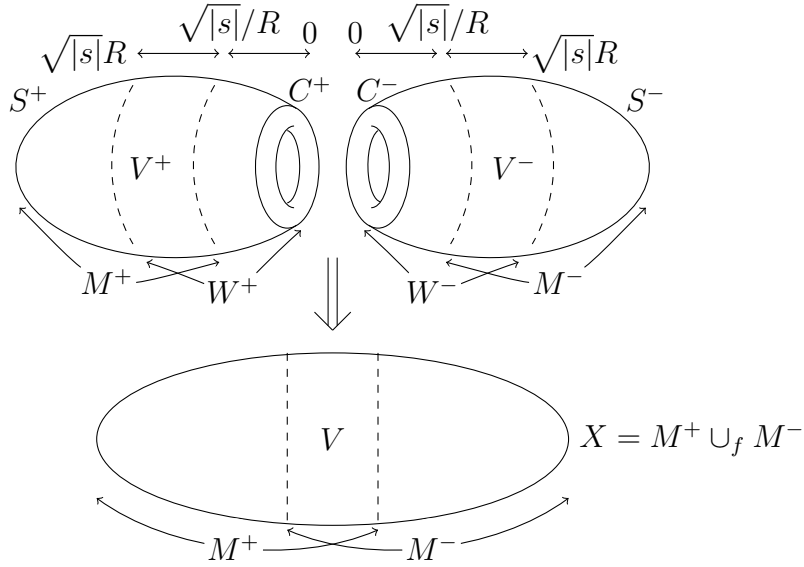


図 1: K3 曲面の構成

定理 2.2 ([L]) *Lebesgue* 測度に関してほとんど全ての周期 ξ と, 周期が ξ となる任意の $K3$ 曲面 Y に対して, $Y \cong X$ となる $K3$ 曲面 $X = X_b$ が存在する.

さて, 定理 2.1 によれば一般のパラメータ $b \in B$ に対して, X_b は非射影的な $K3$ 曲面であったが, 族 $\{X_b\}_{b \in B}$ に射影的な $K3$ 曲面も含まれるか否かは自然な疑問である. この問題を解決することが本原稿の目的である. パラメータ空間 B において, $\xi = \xi_0 \in \mathbb{C}$ と固定した 18 次元の部分空間を $B_{\xi_0} \subset B$ とおく.

定理 2.3 ([KU2]) ある $\xi_0 \in \mathbb{C}$ が存在して, $\{X_b\}_{b \in B_{\xi_0}}$ は 18 次元の有効なパラメータ空間をもつ射影的 $K3$ 曲面からなる複素解析族をなす.

次節以降, 定理 2.3 を示していく.

3 直線束の構成

本節では 2 節と同じ記号を用いる. L^\pm を S^\pm の正則直線束として, $(L^+.C^+) = (L^-.C^-)$ を仮定する. さらに, $g_{\xi_0}^*(L^-|_{C^-}) \cong L^+|_{C^+}$ となる $\xi_0 \in \mathbb{C}$ が存在することを仮定する. ここで, $(L^+.C^+) = (L^-.C^-) \neq 0$ ならば, $\xi_0 \in \mathbb{C}$ は必ず存在することに注意する. この $\xi_0 \in \mathbb{C}$ を固定して次の命題を示すことが本節の目的である.

命題 3.1 任意の $b \in B_{\xi_0}$ に対して, 直線束 $L^+|_{M^+}$ と $L^-|_{M^-}$ は貼り合わさり, $X = X_b$ 上の正則直線束 $L = L^+ \vee L^-$ を定義する.

記号を簡単にするため, $R > 1$ に対して,

$$W := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |w| < R\} / \sim$$

とおく. ただし, \sim は次で定まる同値関係である:

$$(z, w) \sim (z + 1, \exp(p \cdot 2\pi\sqrt{-1}) \cdot w) \sim (z + \tau, \exp(q \cdot 2\pi\sqrt{-1}) \cdot w).$$

また, $C = \{(z, w) \in W \mid w = 0\} \subset W$ を楕円曲線として, $\pi: W \rightarrow C$ を $\pi((z, w)) = [z]$ で与えられる自然な射影とする. 次の補題を準備する.

補題 3.2 $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ は *Diophantine* 条件をみたすとする. このとき, 任意の $L \in \text{Pic}^0(W)$ に対して, $L = \pi^*(L|_C)$ が成り立つ.

証明. 任意の $L \in \text{Pic}^0(W)$ に対して, $H^1(W, \mathcal{O}_W) \rightarrow \text{Pic}(W) \xrightarrow{c_1} H^2(W, \mathbb{Z})$ の完全性と $c_1(L) = 0$ により, L はある $\alpha \in H^1(W, \mathcal{O}_W)$ の像と一致する. よって, $\alpha \in H^1(W, \mathcal{O}_W)$ に対して $\pi^*(\alpha|_C) = \alpha$ となることを示せば十分である.

$\alpha = \{(W_{jk}, f_{jk})\}$ とおく. ただし, C の Stein 被覆 $\{U_j\}$ を用いて, $W_j = \pi^{-1}(U_j) \cong U_j \times \{|w| < R\}$ とおき, $W_{jk} = W_j \cap W_k$ とおいた. また, f_{jk} は W_{jk} 上の正則関数で, W_j において収束べき級数

$$f_{jk}(z_j, w_j) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jk,n}(z_j) \cdot w_j^n$$

で表される. ただし, (z_j, w_j) は (z, w) に対応する W_j における座標である. このとき,

$$\{(W_{jk}, \widehat{f}_{jk})\} = \delta\{(W_j, g_j)\}$$

となる W_j 上の正則関数 $g_j: W_j \rightarrow \mathbb{C}$ が存在することを示せばよい. ただし,

$$\widehat{f}_{jk}(z_j, w_j) := f(z_j, w_j) - f(z_j, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jk,n}(z_j) \cdot w_j^n.$$

まず, 任意の j, k に対して $w_k = t_{kj} \cdot w_j$ をみたす乗法的 1-コサイクル $\{t_{jk} \in U(1)\}$ が存在する. この 1-コサイクル $\{t_{jk}\}$ は $N_{C/W}$ を実現する. また, $\{(U_{jk}, f_{jk,n})\} \in H^1(\{U_j\}, N_{C/W}^{-n})$ かつ (p, q) は *Diophantine* 条件をみたすため, 各 $n > 0$ に対して δ -方程式

$$-g_{j,n} + t_{jk}^{-n} \cdot g_{k,n} = f_{jk,n}$$

は唯一の解 $g_{j,n}: U_j \rightarrow \mathbb{C}$ をもつ. あとは, べき級数

$$g_j(z_j, w_j) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{j,n}(z_j) \cdot w_j^n \quad (2)$$

が収束することを示せばよい. 実際, Ueda の補題 ([U], Lemma 4 参照) により, C と $\{U_j\}$ のみに依存する $K > 0$ が存在して, C 上の任意の直線束 $E \in \text{Pic}^0(C)$ と任意の 0-コチェイン $\{h_j\} \in C^0(\{U_j\}, \mathcal{O}(E))$ に対して, 不等式

$$d(\mathbb{I}_C, E) \cdot \|\{h_j\}\| \leq K \cdot \|\delta\{h_j\}\|$$

が成立する. ただし,

$$\|\{h_j\}\| := \max_j \sup_{z \in U_j} |h_j(z)|, \quad \|\delta\{h_j\}\| := \max_{j,k} \sup_{z \in U_j \cap U_k} |h_{jk}(z)| \quad (\{h_{jk}\} := \delta\{h_j\})$$

とおいた. また, $\mathbb{I}_C \in \text{Pic}^0(C)$ は自明な直線束で,

$$d(\mathbb{I}_C, E) := \inf \max_{j,k} |1 - s_{jk}|$$

である. ここで, 下限は E を実現する全ての乗法的 1-コサイクル $\{s_{jk} \in U(1)\}$ にわたってとるものとする. 仮定により, (p, q) が Diophantine 条件をみたすため, $A > 0$ と $\alpha > 0$ が存在して, 全ての $n \geq 1$ に対して $d(\mathbb{I}_C, N_{C/W}^n) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ をみたす. Cauchy の不等式を用いると, 任意の $\ell \in (0, R)$ に対して, $M > 0$ が存在して, 全ての $n \geq 1$ と $z_j \in U_j \cap U_k$ に対して $|f_{jk,n}(z_j)| \leq M/\ell^n$ をみたす. よって,

$$|g_{j,n}(z_j)| \leq \frac{K}{d(\mathbb{I}_C, N_{C/W}^n)} \cdot \max_{j,k} \sup_{z_j \in U_j \cap U_k} |f_{jk,n}(z_j)| \leq \frac{K}{A \cdot n^{-\alpha}} \cdot \frac{M}{\ell^n} = \frac{KM}{A} \cdot \frac{n^\alpha}{\ell^n},$$

で $\ell \in (0, R)$ は任意であるため, ベキ級数 (2) は収束する. 以上により, $H^1(W, \mathcal{O}_W)$ において $\pi^*(\alpha|_C) = \alpha$ が示された. \square

命題 3.3 $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ は Diophantine 条件をみたすとする. このとき, 任意の $L \in \text{Pic}(W)$ に対して, $L = \pi^*(L|_C)$ が成り立つ. 特に, 制限写像 $\text{Pic}(W) \rightarrow \text{Pic}(C)$ は同型である.

証明. C は W の変位レトラクトなので, 制限写像 $H^2(W, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(C, \mathbb{Z})$ は同型である. よって, $c_1(L \otimes \pi^*(L^{-1}|_C)) = 0$ で $L \otimes \pi^*(L^{-1}|_C) \in \text{Pic}^0(W)$ となる. $(L \otimes \pi^*(L^{-1}|_C))|_C$ は C 上の自明束なので, 補題 3.2 より, $L = \pi^*(L|_C)$ となる. \square

命題 3.1 の証明. 命題 3.3 と仮定 $g_\xi^*(L^-|_{C^-}) \cong L^+|_{C^+}$ により, 双正則写像 $f: V^+ \rightarrow V^-$ を介して制限 $L^\pm|_{V^\pm}$ は同型である. よって, $(M^+, L^+|_{M^+})$ と $(M^-, L^-|_{M^-})$ は貼り合わさり, X 上の正則直線束 $L = L^+ \vee L^-$ を定義する. \square

4 計量の構成

前節同様, L^\pm を S^\pm の正則直線束として, $(L^+, C^+) = (L^-, C^-)$ を仮定し, $g_{\xi_0}^*(L^-|_{C^-}) \cong L^+|_{C^+}$ となる $\xi_0 \in \mathbb{C}$ が存在することを仮定する. このとき, 命題 3.1 より, 直線束 $L^+|_{M^+}$ と $L^-|_{M^-}$ は貼り合わさり, X 上の正則直線束 $L = L^+ \vee L^-$ を定義する. まず, 次の命題を示す.

命題 4.1 もし L^\pm がアンプルならば, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $0 < |s| < \varepsilon_0$ なる任意の s に対して, L はアンプルとなる.

証明. 正の Chern 曲率 $\sqrt{-1}\Theta_{h \cdot e^{-c\psi}} = \sqrt{-1}\Theta_h + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi > 0$ をもつ C^∞ -Hermite 計量 $h \cdot e^{-c\psi}$ を $L^+ \vee L^-$ 上に構成すればよい. ここで,

- h は L^\pm 上の計量 h_\pm を貼り合わせでえられる計量.
- ψ は $S^\pm \setminus C^\pm$ 上の関数 ψ_\pm を貼り合わせでえられる関数.

楕円曲線 C^\pm の近傍では, h_\pm や ψ_\pm は貼り合わせ可能な形状をしている必要がある. そのため, $0 < R_1 < R_2 < R$ を準備する. ただし, R_2 は固定して, R_1 は Step 1 において決定する. $0 < |s| < \varepsilon_0 := (R_1/R)^2$ ならば貼り合わせ可能な計量と関数を構成する.

Step 1. 計量 h_\pm の構成 (この Step では, "±" は省略する).

$L \in \text{Pic}(S)$ をアンブルな直線束とする. すると, 自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $S \ni x \mapsto [g_1(x) : \dots : g_N(x)] \in \mathbb{P}^{N-1}$ が埋め込みとなる基底 $g_1, g_2, \dots, g_N \in H^0(S, L^n \otimes [-C])$ が存在する. ただし, 各 g_i は C 上で極をもつ L^n 上の切断とみなす. このとき, L 上の特異 Hermite 計量 h_s を

$$\langle \xi, \eta \rangle_{h_s, x} := \frac{\xi \cdot \bar{\eta}}{(|g_1(x)|^2 + |g_2(x)|^2 + \dots + |g_N(x)|^2)^{\frac{1}{n}}}, \quad (\xi, \eta \in L|_x)$$

で定める. h_s は C 上で極をもち, 制限 $h_s|_{S \setminus C}$ は C^∞ -計量かつ正の曲率形式 $\sqrt{-1}\Theta_{h_s}|_{S \setminus C} > 0$ をもつ. この計量を貼り合わせるため,

$$\sqrt{-1}\Theta_{h_C} = \frac{\pi(L \cdot C)}{\text{Im } \tau} \cdot \sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}$$

なる $L|_W$ 上の C^∞ -計量 h_C を用意する (ここで, π は円周率であり, 射影 $\pi : W \rightarrow C$ ではない). h_C は貼り合わせ可能な計量であり, $\sqrt{-1}\Theta_{h_C} \geq 0$ かつ $\sqrt{-1}\Theta_{h_C}(\partial/\partial z, \partial/\partial z) > 0$ をみたく. そして, L 上の計量 h を

$$h^{-1} := \begin{cases} \text{RegularizedMax}(h_s^{-1}, \varepsilon \cdot h_C^{-1}) & \text{on } W \\ h_s^{-1} & \text{on } S \setminus \bar{W} \end{cases}$$

で定める. ただし, $\varepsilon > 0$ で, $\text{RegularizedMax} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は Demailly[D] を参照せよ. 通常の最大関数 \max は滑らかではないため, \max 関数を平滑化した RegularizedMax を用いる. より厳密には, h_s と h_C の局所ポテンシャル関数 φ_s と φ_C に対して, h の局所ポテンシャル関数 φ を

$$\varphi = \text{RegularizedMax}(\varphi_s, \varphi_C - \log \varepsilon)$$

で定めることで h を定義する. そのため, h は C^∞ 級の計量であり, $\sqrt{-1}\Theta_h(\partial/\partial z, \partial/\partial z) > 0$ かつ $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$ をみたく ([D], Lemma (5.18) (e) 参照). ここで, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると, $S \setminus \{|w| < R_2\}$ において $h = h_s$ となる. また, h_s が C において極をもつことから, $R_1 > 0$ を十分小さくとると, $\{|w| < R_1\}$ において $h = \varepsilon^{-1} \cdot h_C$ となる. 以後, この $R_1 > 0$ と h を固定する.

Step 2. 関数 ψ_\pm の構成 (この Step では, "±" は省略する).

$\varepsilon_0 := (R_1/R)^2$ とする. $0 < |s| < \varepsilon_0$ なる s に対して, $\lambda = \lambda_s : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ を条件

$$\lambda(t) = (\log(t^2/|s|))^2 \quad \text{if } 0 < t < R_2, \quad \lambda(t) \equiv \text{constant} \quad \text{if } t \geq R.$$

をみたく C^∞ -関数として, $\psi = \psi_s : S \setminus C \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定まる C^∞ -関数とする:

$$\psi(p) := \begin{cases} \lambda(|w|) & (p = (z, w) \in W \setminus C) \\ \lambda(R) & (p \notin W). \end{cases}$$

ψ は w のみに依存する関数であり, $S \setminus \{|w| \leq R\}$ において $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi = 0$ である. また, $\{0 < |w| < R_2\}$ において $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi = 2\sqrt{-1} \cdot dw \wedge d\bar{w}/|w|^2$, つまり, $\{0 < |w| < R_2\}$ において $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$

で $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi(\partial/\partial w, \partial/\partial w) > 0$ となる. 最後に, $c > 0$ をコンパクト集合 $\{R_2 \leq |w| \leq R\}$ において

$$\sqrt{-1}\Theta_{h_s} + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi > 0$$

となるよう選ぶ. $\{R_2 \leq |w| \leq R\}$ において $\sqrt{-1}\Theta_{h_s}$ は正であるため, 条件をみたま $c > 0$ が存在することに注意する.

Step 3. $h_{\pm} \cdot e^{-c\psi_{\pm}}$ の曲率 (この Step では, "±" は省略する).

$S \setminus C$ において $h \cdot e^{-c\psi}$ を考える. まず, $c > 0$ の選び方により, $S \setminus \{|w| < R_2\}$ において, $\sqrt{-1}\Theta_{h \cdot e^{-c\psi}} = \sqrt{-1}\Theta_{h_s} + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi > 0$ となる. また, $\{0 < |w| < R_2\}$ においても $h \cdot e^{-c\psi}$ は正の曲率をもつ. 実際, $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$, $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$, かつ $\sqrt{-1}\Theta_h(\partial/\partial z, \partial/\partial z) > 0$, $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi(\partial/\partial w, \partial/\partial w) > 0$ より, $\sqrt{-1}\Theta_{h \cdot e^{-c\psi}} = \sqrt{-1}\Theta_h + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi > 0$ となる. よって, $h \cdot e^{-c\psi}$ は $S \setminus C$ において正となる (表 1 参照). なお, $\omega := \sqrt{-1}\Theta_h + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \in c_1(L|_{S \setminus C})$ は $S \setminus C$ における Kähler 計量であり, C の近傍 $\{|w| < R_1\}$ において

$$\omega|_{\{|w| < R_1\}} = \frac{\pi(L \cdot C)}{\text{Im } \tau} \cdot \sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z} + 2c \cdot \frac{\sqrt{-1}dw \wedge d\bar{w}}{|w|^2}$$

と表される.

Step 4. $L^+ \vee L^-$ における計量の構成.

上記の議論から, $S^{\pm} \setminus C^{\pm}$ における C^{∞} -計量 $h_{\pm} \cdot e^{-c\psi_{\pm}}$ が存在して, $S^{\pm} \setminus C^{\pm}$ において $\sqrt{-1}\Theta_{h_{\pm} \cdot e^{-c\psi_{\pm}}} > 0$ であり, $\{0 < |w^{\pm}| < R_1\}$ において

$$h_{\pm} = \varepsilon^{-1} \cdot h_{C_{\pm}}, \quad \psi^{\pm}(z^{\pm}, w^{\pm}) = \left(\log \frac{|w^{\pm}|^2}{|s|} \right)^2$$

をみたま. 今回の K3 曲面 X は, 2 つの曲面 $M^{\pm} = S^{\pm} \setminus \{|w^{\pm}| \leq \sqrt{|s|}/R\}$ を双正則写像 $(z^+, w^+) \mapsto (z^-, w^-) = (g(z^+), s/w^+)$ を介して貼り合わせることで構成された. $|s| < (R_1/R)^2$, つまり, $\sqrt{|s|R} < R_1$ とすると, 命題 3.3 により, h_{\pm} は貼り合わさり $L_s = L^+ \vee L^-$ 上の C^{∞} -Hermite 計量を定める. さらに, $\{\sqrt{|s|}/R < |w^+| < \sqrt{|s|R}\}$ において, $\psi^+(z^+, w^+) = (\log |w^+|^2/|s|)^2$ であり,

$$\psi^-\left(g(z^+), \frac{s}{w^+}\right) = \left(\log \frac{|s/w^+|^2}{|s|} \right)^2 = \left(-\log \frac{|w^+|^2}{|s|} \right)^2 = \psi^+(z^+, w^+),$$

つまり, ψ^{\pm} は貼り合わさり X 上の C^{∞} -関数 ψ を定める. よって, $h \cdot e^{-c\psi}$ は X 上で正の曲率形式をもつ C^{∞} -計量となる. \square

定理 2.3 の証明. まず, $\{X_b\}_{b \in B}$ は 19 次元の有効なパラメータ空間 $b = (\tau, \mathbf{p}, \xi, s) \in B$ をもつ複素解析族をなしていた. また, $(L^+ \cdot C^+) = (L^- \cdot C^-) (> 0)$ となるアンプルな正則直線束 $L^{\pm} \rightarrow S^{\pm}$ が存在することに注意する. この直線束 L^{\pm} を固定すると, 条件 $g_{\xi}^*(L^-|_{C^-}) \cong L^+|_{C^+}$ から $\xi = \xi_0$ は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\tau}$ を法として唯一存在して, パラメータ (τ, \mathbf{p}) に正則に依存することが示される. さらに命題 4.1 より, $0 < |s| \ll 1$ なる s に対して, K3 曲面 $X = X_b$ はアンプルな正則直線束 $L = L^+ \vee L^-$ を許容する. よって, $\{X_b\}_{b \in B_{\xi_0}}$ は 18 次元の有効なパラメータ空間をもつ射影的 K3 曲面からなる複素解析族をなす. \square

謝辞. 城崎代数幾何学シンポジウム 2022 で講演の機会を与您てくださった世話人の方々に心より感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 19K03544 の助成を受けたものです.

	$0 < w^\pm < R_1$	$R_1 < w^\pm < R_2$	$R_2 < w^\pm < R$	$S^\pm \setminus \{ w^\pm < R\}$
h_\pm	$\varepsilon^{-1} h_{C^\pm}$ · $\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} \geq 0$ · $\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} > 0$ in z -direction	[”max” $\{(h_s^\pm)^{-1}, \varepsilon h_{C^\pm}^{-1}\}]^{-1}$ · $\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} \geq 0$ · $\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} > 0$ in z -direction	h_s^\pm · $\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} > 0$	
ψ_\pm	$\{\log(w^\pm ^2/ s)\}^2$ · $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_\pm \geq 0$ · $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_\pm > 0$ in w -direction		?	const. · $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_\pm = 0$
曲率	$\sqrt{-1}\Theta_{h_\pm} + c\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_\pm > 0$		positive if $0 < c \ll 1$	positive

表 1: Hermite 計量の構成

参考文献

- [A] V. I. Arnol’d, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Priložen., 10-4 (1976), 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249–257).
- [D] J.-P. Demailly, Complex analytic and algebraic geometry, (2012), available online.
- [KU1] T. Koike, T. Uehara, A gluing construction of K3 surfaces, arXiv:1903.01444.
- [KU2] T. Koike, T. Uehara, A gluing construction of projective K3 surfaces, to appear in Épijournal de Géométrie Algébrique (arXiv:2108.07168).
- [L] F. Lequen, Presque toute surface K3 contient une infinité d’hypersurfaces Levi-plates linéaires, arXiv:2109.08097.
- [U] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.