On K-stability of Calabi-Yau fibrations

Masafumi Hattori*

概要

本稿では Calabi-Yau ファイブレーションのある種の K 安定性の判定方法についての部分的な結果 [Hat22] について述べる．またその応用である，Miranda[Mi83] の予想の部分的解決についても述べる．

1 Introduction

次は，Kähler 幾何において最も重要視されている問題の一つである．

問題 1.1. (X, L) を非特異偏極多様体とする．この時，$c_1(L)$ に**定スカラー曲率 Kähler 計量** (**cscK** metric) がいつ存在するか，その必要十分条件を与えよ．

Aubin[Aub76] と Yau[Yau78] によって，$L = K_X$ または $K_X \equiv 0$ の時 cscK 計量が存在することが知られていたが，Fano の場合では $\mathbb{P}^2$ の一点爆発についてこのような計量が存在しないと知られていた (cf. [Mat57])．この問題を解くために Tian[Tia87] と Donaldson[Don02] によって導入された純代数幾何学的概念が **K 安定性**であり (詳しい定義は §2)，次の予想が提唱されている．

予想 1.2 (Yau-Tian-Donaldson(YTD) 予想)**.** (X, L) が K-poly 安定であることと，cscK 計量の存在は同値である．特に K 安定なら cscK 計量が存在する．

つまり，解析的に記述される cscK 計量の存在条件が代数幾何学的に特徴づけられていると予想されたのである．この予想は実際に Fano の場合で，[CDS15] と [Tia15] によって解決された．そして近年では，YTD 予想は特別な K 安定多様体においても正しいことが [Zha21] によって示されるなど，この予想に関して現在も多くの研究が行われている．

一方で，具体的な多様体の K 安定性を判定するという課題も残っている．後述の K 安定性の定義では，全てのテスト配位の Donaldson-Futaki 不変量の正値性を調べなければならず，具体的な多様体の K 安定性の判定は困難である．現に $\mathbb{P}^2$ の K 半安定性についても，Fano 多様体の K 安定性の付値判定法 (cf. [Li17]，[Fuj19a]) が発見されるまで，困難であった (cf. [Li17], [Fuj19b])．しかし，いくつかのクラスでは，より明快な判定法が与えられている．

定理 1.3 ([Oda12], [Oda13b])**.** (X, L) を正規偏極多様体とする．この時，次が成り立つ．

1. *$L = K_X$ かつ X が lc 特異点しか持たないならば，(X, K_X) は K 安定．*
2. *$K_X \equiv 0$ かつ X が klt 特異点しか持たないならば，(X, L) は K 安定．*
3. *(X, L) が K 半安定ならば X は高々 lc 特異点しか持たない．*

* hattori.masafumi.47z@st.kyoto-u.ac.jp

この定理から，K 安定性は極小モデルプログラムと深い関わりがあることがわかる．また，Fano 多様体に関しても，テスト配位を用いない，より内在的な判定法が知られている．

定理 1.4 ([FO18], [BJ20])**.** $(X, -K_X)$ を *klt* 特異点しか持たない *Fano* 多様体とする．この時，次が成立．

$$(X, -K_X) \text{ が } K \text{ 半安定} \Leftrightarrow \delta(X) \geq 1.$$

ここで，$\delta(X)$ は**デルタ不変量**と呼ばれており，MMP で扱う食い違い係数に支配されるような不変量である．この発見によって，Fano の K 安定性の研究は飛躍的に発展した．もし，他の多様体のクラスにも，このような内在的な K 安定性判定法が確立されたならば，K 安定性の理解や moduli 問題 (cf. [尾高 20]) への応用が得られるはずであろう．しかし，テスト配位を用いずに，偏極多様体の K 安定性を判定する方法はほとんど見つかっていない．K_X と L が比例しない場合，定理 1.3，1.4 の証明に用いることのできた技術をそのまま適用できないのが難点である．

この問題は微分幾何側でも現れるのだが，微分幾何学では cscK 計量のある多様体の構造を組み合わせることによって，新しい多様体の cscK 計量の存在を示すというテクニックがあり，その点で K 安定性よりも多くのことがわかっている．例えば，全てのファイバーが唯一の cscK 計量を持ち，底空間にも cscK 計量が備わっている場合，全空間に cscK 計量が存在することが Dervan–Sektnan[DS21] により知られている．これには，幾何解析特有の技術が用いられており，証明の議論を純代数幾何学的になぞることはできない．そのため，[DS21] の主張を K 安定性に置き換えて，純代数幾何学的証明を与えられるかどうかわかっていない．しかし，全てのファイバーが数値的 Calabi-Yau(つまり，$K_X \equiv 0$ を満たす) 多様体であれば，定理 1.3，1.4 の手法を用いて，代数幾何学的にも全空間の K 安定性を論じることが可能かもしれないと予測される．そこで，本稿ではこのような Calabi-Yau ファイブレーションの K 安定性について，いくつかの結果を報告する．

本題に入る前に，Calabi-Yau ファイブレーションに関する，Kähler 幾何での二つの先行研究について述べる．一つ目は，good minimal model 上の cscK 計量の存在についてである．

定理 1.5 (Jian–Shi–Song[JSS19])**.** $f : (X, H) \to (B, L)$ を偏極ファイブレーションとし *(*つまり H と L はそれぞれ豊富*)*，$K_X \sim_{\mathbb{Q}} f^*L$ であるとする．この時，X が滑らかならば，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $(X, \epsilon H + L)$ は *cscK* 計量を持つ[*1]．

このような，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $(X, \epsilon H + L)$ の K 安定性を**断熱 K 安定性**と呼ぶ．この結果は，**満渕汎関数**と呼ばれる一つの Chern 類に属する Kähler 計量全体の空間上定義される汎関数を，J 汎関数と α 不変量によって下から評価し，cscK 計量の存在を示すというものである．この方法は X が klt 特異点を持つ場合，DF 不変量についても適用することができ，同様に K 安定性を示すことができる (詳しくは [Hat21])．もう一つは，Calabi-Yau ファイブレーションについて，断熱 K 安定性の必要条件を，底空間の K 安定性によって記述するというものである．次の Dervan-Ross の結果は Calabi-Yau とは限らないファイブレーションについても知られているが，ここでは Calabi-Yau ファイブレーションに対してのみ述べる．

定理 1.6 ([DR19])**.** $f : (X, H) \to (B, L)$ を偏極 *Calabi-Yau* ファイブレーションであり，十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $(X, \epsilon H + L)$ は *K* 半安定とする．M を $f^*M \sim_{\mathbb{Q}} K_X - f^*K_B$ となる直線束

[*1] 本稿では直線束のテンソル積を，Cartier 因子の足し算と考えて扱う．また，f^*L も単に L と表すことにする．

とすれば，$(B,0,M,L)$ は *twisted K* 半安定である *(cf.* 定義 *2.8)*.

ここで，B が曲線の時には全ての f に対して $(B,0,M,L)$ が K 安定であることに注意する．この場合，定理 1.6 は何も情報をあたえない．そこで，定理 1.5，1.6 の判定法だけでは K 安定性を判定できない Calabi-Yau ファイブレーション，例えば，有理楕円曲面などについて，断熱 K 安定性の判定方法を確立するのが本稿の目的となる．

2 Definition of K-stability

以下，K 安定性についての基礎概念を復習する．(X,Δ,L) は断らなければ n 次元偏極ログ対とする．詳しくは，[BHJ17] などを参照していただきたい．

定義 2.1 (Test configuration)**.** 次の三条件を満たすとき，$(\mathcal{X},\mathcal{L})$ が (X,L) の**テスト配位**であるという．

- $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ には $\mathbb{G}_m$ が作用しており，$\mathcal{X}$ は正規で $\mathcal{L}$ は (半) 豊富である．
- $\pi:\mathcal{X}\to\mathbb{A}^1$ は平坦かつ射影的な $\mathbb{G}_m$ 同変な射である．
- $(\pi^{-1}(1),\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(1)})\cong(X,L)$ である．

また，$(X_{\mathbb{A}^1},L_{\mathbb{A}^1})$ を自明なテスト配位と呼ぶ．これは，$\mathbb{G}_m$ が (X,L) に自明に作用しているような $(X\times\mathbb{A}^1,L\times\mathbb{A}^1)$ のことである．ここで，$\mathcal{X}\cong X_{\mathbb{A}^1}$ が $\mathbb{G}_m$ 作用つきで同型であり，この同型を通して $\mathcal{L}\sim_{\mathbb{A}^1}L_{\mathbb{A}^1}$ である時，$(\mathcal{X},\mathcal{L})$ は**自明**であるという．

$(\mathcal{X},\mathcal{L})$ は $\infty\in\mathbb{P}^1$ の周りで，自明テスト配位と貼り合わすことで $\mathbb{P}^1$ 上の固有な多様体にコンパクト化される．これを $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{L}})$ と表し，$\Delta_{\mathcal{X}}$ は $\Delta\times\mathbb{G}_m\subset\overline{\mathcal{X}}$ の閉包とする．ここで，K 安定性を導入するため次の不変量を定義する．

定義 2.2 (Donaldson-二木不変量)**.** $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ を (X,L) のテスト配位とする．この時，$(\mathcal{X},\mathcal{L})$ の**ログ Donaldson-二木不変量**を

$$\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{L})=\frac{1}{L^n}\left(K_{(\overline{\mathcal{X}},\Delta_{\mathcal{X}})/\mathbb{P}^1}\cdot\overline{\mathcal{L}}^n-\frac{n(K_X+\Delta)\cdot L^{n-1}}{(n+1)L^n}\overline{\mathcal{L}}^{n+1}\right)$$

として定める．簡単のため DF 不変量と書くことにする．

これは本来の定義とは異なるが，この公式が本来の定義と一致することが [Oda13a]，[Wan12] により証明されている．また，[LS15] が次の非アルキメデス的 J 汎関数を導入した．

定義 2.3 (非アルキメデス的 J 汎関数)**.** $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ を (X,L) のテスト配位とし，H を X 上の直線束する．ここで，$\mathcal{X}$ をその爆発と取り替えて，$X_{\mathbb{A}^1}$ への射が存在すると仮定して良い．この時，**非アルキメデス的 J 汎関数**を

$$(\mathcal{J}^H)^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{L})=\frac{1}{L^n}\left(H_{\mathbb{P}^1}\cdot\overline{\mathcal{L}}^n-\frac{nH\cdot L^{n-1}}{(n+1)L^n}\overline{\mathcal{L}}^{n+1}\right)$$

として定める．ただし，ここで $H_{\mathbb{P}^1}$ は $X_{\mathbb{A}^1}$ のコンパクト化上にある H から定まる標準的な直線束を $\overline{\mathcal{X}}$ に引き戻したものとする．

定義 2.4 (K 安定性)**.**
- $\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{L}) \geq 0$ が任意のテスト配位について成立するとき，(X,Δ,L) を **K 半安定**であるという．
- ある $\epsilon > 0$ が存在し，$\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{L}) \geq \epsilon(\mathcal{J}^L)^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{L})$ が成立するとき，(X,Δ,L) を**一様 K 安定**であるという．

J^H 安定性も，非アルキメデス的 J 汎関数 $(\mathcal{J}^H)^{\mathrm{NA}}$ を用いて同様に定義する．

注意 2.5. $(\mathcal{J}^L)^{\mathrm{NA}}$ は非負汎関数であり，$(\mathcal{J}^L)^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{L})=0$ であることと，正規テスト配位 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ が自明であることは同値である．これは [BHJ17] で導入された $I^{\mathrm{NA}}-J^{\mathrm{NA}}$-ノルム，[Der16] で導入された the minimum norm と一致する．ここでは $\|\mathcal{X},\mathcal{L}\|$ と表すことにする．

注意 2.6. ここで，DF_Δ は**非アルキメデス的エントロピー** H_Δ^{NA} と $(\mathcal{J}^{K_X+\Delta})^{\mathrm{NA}}$ に “分解” されることがわかっている．H_Δ^{NA} は MMP で現れるログ食い違い係数と深い関係があり，この定義と “分解” については [BHJ17] を参照していただきたい．

ここで断熱 K 安定性を導入する．

定義 2.7 (断熱 K 安定性)**.** $f:(X,\Delta,H)\to(B,L)$ を偏極代数的ファイバー空間対とする．つまり，H，L がそれぞれの豊富な直線束であり，(X,Δ) がログ対かつ $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_B$ であるとする．ここで，

- $(X,\Delta,\epsilon H+L)$ が $0<\epsilon\ll 1$ について K 半安定であれば，f を**断熱 K 半安定**と言い，
- ある $\delta>0$ が存在し，$0<\epsilon\ll 1$ について，$(X,\epsilon H+L)$ のすべてのテスト配位 $(\mathcal{X},\mathcal{M})$ に対し，$\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{M}) \geq \epsilon(\mathcal{J}^L)^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{M})$ が成立すれば，f を**一様断熱 K 安定**であるという．

これが我々の考察したい K 安定性であった．一方で，定空間の K 安定性も考察する．

定義 2.8. (X,B,M,L) が **log-twisted 対**であるとは (X,B,L) が偏極ログ対であり，T がその上の $\mathbb{Q}$-直線束であることを言う．そして，(X,L) のテスト配位 $(\mathcal{X},\mathcal{L})$ について **log-twisted Donaldson-Futaki 不変量**を

$$\mathrm{DF}_{(B,M)}(\mathcal{X},\mathcal{L}) = \mathrm{DF}_B(\mathcal{X},\mathcal{L}) + (\mathcal{J}^M)^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{L})$$

と定める．すると，**log-twisted K 安定性**が定義 2.4 と同様に定まる．

注意 2.9. $B=0$ の場合が [Der16] により導入された **twisted K 安定性**である．

我々はここで，定空間の log-twisted K 安定性と全空間の断熱 K 安定性を比較することを考えたい．そのために必要となるのが，次の標準束公式と呼ばれるものである．

定義 2.10 ([Amb04], [FG14])**.** $f:(X,\Delta)\to C$ を代数的ファイバー空間対とする．f は $K_X+\Delta\sim_{C,\mathbb{Q}}0$ かつ (X,Δ) が lc (resp., klt) である時，**lc** (resp. **klt**) **trivial ファイブレーション**と呼ぶ．この時，次の**標準束公式**が成立する．

$$K_X+\Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_C+M_{(X,\Delta)/C}+B_{(X,\Delta)/C}).$$

ここで，$M=M_{(X,\Delta)/C}$ (resp., $B=B_{(X,\Delta)/C}$) は **moduli** (resp., **discriminant**) 因子と呼ばれる．また，B は $\mathrm{mult}_P(B)=1-\mathrm{lct}(X,\Delta;f^*P)$ で定まる．

ここで，次の結果が [Amb04], [FG14] により知られている．

定理 2.11. C が滑らかな射影曲線ならば M は半豊富である．

この節の最後に，有理楕円曲面 $f: X \to \mathbb{P}^1$ について触れたい．f は重複ファイバー ${}_mI_n$ 型を持ったとしても，その個数は高々一個であり (この m を**指数**と呼ぶ)，もし f が重複ファイバー ${}_mI_n$ 型を持っていなければ，f は切断を持つことが知られている．この切断と交わらないファイバーの成分を潰した曲面を**有理 Weierstrass ファイブレーション**と呼ぶ．これらの有理 Weierstrass ファイブレーション W について，Miranda [Mi81] は，どのようなファイバーをもつかによって W の GIT 安定性が判定できるという結果を得た．例えば，W の GIT 不安定性は W の極小特異点解消が，II^*，III^* または IV^* 型ファイバーのうち，いずれか一つを持つことと同値である．

次は，Miranda の GIT と底空間 (C, B, M, L) の log-twisted K 安定性との関係性についての一例である．

例 2.12. 有理楕円曲面 $f: X \to \mathbb{P}^1$ について $j: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を小平の関数不変量とする．この時，上の標準束公式において moduli 因子は $M = \frac{1}{12}j^*\mathcal{O}(1)$ で表される．ここで，j が定数写像となり，II 型ファイバーと II^* 型ファイバーを一つずつ持っているような f が存在することが知られている．この時，底空間は $(\mathbb{P}^1, \frac{1}{6}\{0\} + \frac{5}{6}\{\infty\}, 0, \mathcal{O}(1))$ という log-twisted 対である．これはログ Fano 対だから，定理 1.4 より K 不安定であることもわかる．そして，Miranda の結果から X の Weierstrass ファイブレーションは GIT 不安定でもある．一方で，§1 でも述べたように，定理 1.6 を用いて X の断熱 K 不安定性を導くことができないことにも注意する．

GIT 安定性と K 安定性には深いつながりがあるため，底空間の log-twisted K 安定性と全空間の断熱 K 安定性が関係していると予想される．実際に，次の主定理がその関係性を表現している．

定理 2.13 ([Hat22, Theorem A])**.** *$f: (X, \Delta, H) \to (C, L)$ を偏極 lc trivial ファイブレーションとする．この時，f が断熱 K 半安定であり，さらに moduli 因子 M が $\mathbb{Q}$-Cartier であるならば，(C, B, M, L) は K 半安定である．*

定理 2.13 は定理 1.6 の拡張である．また，底空間が曲線であれば，部分的に逆も成立する．

定理 2.14 ([Hat22, Theorem B])**.** *$f: (X, \Delta, H) \to (C, L)$ を偏極 klt trivial ファイブレーションとし，C は曲線とする．この時，f が一様断熱 K 安定であることと，(C, B, M, L) が一様 K 安定であることは同値である．*

3 Proof of main theorems

前節で紹介した定理の証明の概略を解説する．

定理 2.13 の証明の概略. 対偶を示せば良いので，(C, L) のテスト配位 $(\mathscr{C}, \mathcal{L})$ で $\mathrm{DF}_{(B,M)}(\mathscr{C}, \mathcal{L}) < 0$ となるものを取る．うまく爆発して，$\rho_{\mathscr{C}}: \mathscr{C} \to C \times \mathbb{A}^1$ が存在すると仮定して良い．証明の基本アイデアは，[DR19] の $X \times_C \mathscr{C}$ を X のテスト配位と見なし，その DF 不変量の最高次係数を底空間の DF 不変量と比較するというものに由来する．しかし，このままでは例 2.12 で見たような有理楕円曲面の断熱 K 不安定性まで示すことができない．一般に $X \times_C \mathscr{C}$ が $\mathscr{C}$ 上の極小モデルでないから，全空間の DF 不変量が大きくなってしまっているのである．

そこで MMP を用いることで，次のような $\Pi_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \to \mathscr{C}$ に関する標準束公式を満たすテスト配

位 $(\mathcal{X},\mathcal{H})$ を構成する．ただし，簡単のため，$\overline{\mathcal{X}}$ を $\mathcal{X}$ と表すことにする．

$$K_{(\mathcal{X},\Delta_{\mathcal{X}})/\mathbb{P}^1} = \Pi_{\mathcal{X}}^*(K_{\mathscr{C}/\mathbb{P}^1} + \rho_{\mathscr{C}}^* M_{\mathbb{P}^1} - \mathrm{Eff} + (\rho_{\mathscr{C}})_*^{-1} B_{\mathbb{P}^1}) + \mathcal{D}.$$

ここで，Eff は有効な因子であり，$\mathcal{D}$ は $\mathscr{C}$ への像の余次元が 2 以上になっているものである．このことから，DF 不変量に対して次のような計算を行うと，

$$\begin{aligned}
&(H+mL)^n \mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{H}+m\Pi^*\mathcal{L}) \\
&= K_{(\mathcal{X},\Delta_{\mathcal{X}})/\mathbb{P}^1}\cdot(\mathcal{H}+m\Pi^*\mathcal{L})^n \\
&- \frac{n}{n+1}\left(\frac{b(K_C+M_{(X,\Delta)/C}+B_{(X,\Delta)/C})\cdot L^{b-1}}{nL^b}m^{-1}+O(m^{-2})\right)(\mathcal{H}+m\Pi^*\mathcal{L})^{n+1},
\end{aligned}$$

ただし，$n=\dim X$ かつ $b=\dim B$ とする．

このことから，$(H+mL)^n\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{H}+m\Pi^*\mathcal{L})$ の最高次係数は

$$m^b\binom{n}{b}(H^{n-b}\cdot L^b)\mathrm{DF}_{(B,M)}(\mathscr{C},\mathcal{L})<0$$

以下となる．m を十分大きくすると $\epsilon H+L$ の ϵ は十分小さくなるので証明が完了する． □

定理 2.14 を証明するため，δ 不変量について復習する．

定義 3.1. (X,Δ,L) を偏極 klt 対とする．ある基底 $\{D_i\}\subset H^0(X,mL)$ が存在し $D=\frac{1}{mh^0(X,mL)}\sum_{i=1}^{h^0(X,mL)}D_i$ と表せる時，D が m-**基底型因子**であるという．この時，

$$\delta(X,\Delta,L)=\limsup_{m\to\infty}\inf_{D:m\text{-基底型}}\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$$

を δ **不変量**と呼ぶ．[BJ20] により，右辺は $\lim_{m\to\infty}\inf_{D:m\text{-基底型}}\mathrm{lct}(X,\Delta;D)$ と一致する．

log-twisted 対にも次のようなことが成立する．

命題 3.2. (C,B,M,L) を偏極 *log-twisted* 対とする．この時，

1. $H_B^{\mathrm{NA}}\geq\delta(C,B,L)\|\cdot\|$.
2. $L=-(K_C+B+M)$ かつ M が半豊富であるならば，$\delta(C,B,L)\geq 1$ と (C,B,M,L) が K 半安定であることは同値.

この命題により，δ 不変量により H_Δ^{NA} をノルムで評価することができる．そのため，$\mathrm{J}^{K_X+\Delta+\delta(X,\Delta,L)L}$ 安定性を示すことができれば，(X,Δ,L) は K 安定でもあることがわかる．まずは，$\lim_{\epsilon\to0}\delta(X,\Delta,\epsilon H+L)$ を評価したい．

定理 3.3 ([Hat22, Theorem D])**.** $f:(X,\Delta,H)\to(C,L)$ を偏極 *lc trivial* ファイブレーションとする．C が曲線であれば，

$$\lim_{\epsilon\to0}\delta(X,\Delta,\epsilon H+L)=\delta(C,B,L)$$

が成立する．

証明の詳細は省くが，$\epsilon H+L$ に付随する m-基底型因子を C からみて水平な部分と，垂直な部分に分けると，水平な部分の各点での重複度は無視できるほど小さく，逆に垂直な部分は (C,L) の m-基底型因子の挙動に近似できることがわかる．

定理 *2.14* の証明の概略. 他の場合は [JSS19]，[Oda12] により解決しているので，底空間が log-twisted Fano 対である場合のみを扱う．$\deg(B+M)=s\geq 0$ として $\deg L=1$ と仮定する．この時，定理 2.11 と命題 3.2 より (C,B,M,L) が log-twisted K 安定であるから

$$\delta := \lim_{\epsilon\to 0}\delta(X,\Delta,\epsilon H+L)=\delta(C,B,L)>2-s$$

が成立する．ここで，$K_X+\Delta \equiv -(2-s)f^*L$ に注意する．また，[Che21]，[DP21]，[Son20](cf. [Hat21, Theorem 8.12]) から，$(X,\epsilon H+L)$ は J^H 安定である．従って，

$$(\mathcal{J}^{K_X+\Delta})^{\mathrm{NA}}(\mathcal{X},\mathcal{M})\geq -(2-s)\|\mathcal{X},\mathcal{M}\|.$$

よって，$\mathrm{DF}_\Delta(\mathcal{X},\mathcal{M})\geq(\delta-(2-s))\|\mathcal{X},\mathcal{M}\|$ かつ $\delta-(2-s)>0$ から，主張を得る． □

4 Applications to rational elliptic surfaces

最後に，有理楕円曲面と Miranda の予想について，前節で得られた定理を適用したい．

まず，$f:X\to\mathbb{P}^1$ が有理楕円曲面であり，S が X 上の相対豊富な因子であり，m を指数とする．この時次が成立する．

系 4.1. *f が一様断熱 K 安定であることと，次のうちいずれかひとつが成り立つことが同値.*

1. *$m=1$ かつ X が高々，被約なファイバーしか持たない.*
2. *$m=2$ かつ X に II^* 型ファイバーと III^* 型ファイバーが，どちらも現れない.*
3. *$m=3$ かつ X が II^* 型ファイバーを持っていない.*
4. *$m\geq 4$.*

一方で，f は次のうちいずれかが成立すると断熱 K 不安定.

1. *$m=1$ かつ X が II^*, III^* もしくは IV^* 型ファイバーを持っている.*
2. *$m=2$ かつ X が II^* 型ファイバーを持っている.*

注意 4.2. X が非特異である場合，K. Zhang[Zha21] の結果から，一様断熱 K 安定ならば cscK 計量を持つ.

次に，Miranda の予想について紹介する.

予想 4.3 ([Mi83])**.** (W,H) を偏極有理 Weierstrass ファイブレーションとする．もし，W が

1. II^*, III^*, IV^* 型ファイバーのうち一つでも持っていれば，(W,H) は漸近 Chow 不安定である.
2. 高々被約，もしくは I_N^* 型ファイバーしか持っていなければ (W,H) は漸近 Chow 半安定である.

Miranda は三次曲線の pencil の GIT 安定性の研究 [Mi80] で，[Mi81] での結果と同様に，GIT 安定性が対応する有理楕円曲面がどのようなファイバーを持っているかで判定できることを証明した．この予想は，Chow 安定性すらどのようなファイバーを持っているかによって決まると主張している．これに対し，[Hat22] においてこの予想を部分的に解決した.

定理 4.4. (W, S) を有理 *Weierstrass* ファイブレーションとその切断とする．$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ とすると次が成立する．W が

1. II^*, III^*, IV^* 型ファイバーのうち一つでも持っていれば，$(W, aS + L)$ は，任意の $0 < a < 1$ について K 不安定である．
2. ある $N > 0$ で I_N^* 型ファイバーを持っていれば $(W, aS + L)$ は十分小さい $a > 0$ で K 不安定である．

この定理から，予想 4.3 の 2 は偽であったことがわかる．一方で，II^* 型ファイバーを一つでも持っていると W の Picard 数 $\rho(W)$ は 2 であるので W の偏極は $aS + L$ の形のみである．よって，この場合には特に予想 4.3 は正しいということが証明された．

定理 4.4 の 1 の証明の概略. $\mathbb{P} = \mathbb{P}(2:2:2:2:2:3:3:3:3:3:3:3)$ に GIT を適用することで Miranda は Weierstrass ファイブレーションの GIT モジュライを得ていた．$(W, aS + L)$ に対応する CM 直線束 λ_a を $\mathbb{P}$ 上で考える．詳しい定義は [PT09] を参照していただきたい．要するに，λ_a は Hilbert-Mumford weight が DF 不変量に一致するような直線束であるが，一般に豊富ではないことに注意する．しかし，$\rho(\mathbb{P}) = 1$ より，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(r(a)) \sim_{\mathbb{Q}} \lambda_a$ となるような $r(a) \in \mathbb{Q}$ が存在する．ここで，Kähler 幾何の結果，[Tia90]，[AP06]，[Sto09] を用いると，a が十分 1 に近い場合には $r(a) > 0$ である．また，標準束公式を定理 2.14 の証明のように用いることで，$a' < a$ ならば $r(a') > 0$ が保たれたままであることがわかる．つまり，この場合では λ_a は全ての $0 < a < 1$ で豊富であった．

従って，$\mathbb{P}$ の 1-パラメータ部分群の Hilbert-Mumford weight の正負と DF 不変量の正負が一致し，GIT 不安定である W は K 不安定でもあることが示された．これにより $(W, aS + L)$ は，$0 < a < 1$ で漸近 Chow 不安定であることもわかる． □

謝辞

代数幾何学城崎シンポジウムにて講演の機会を下さった世話人の池田 京司先生, 稲場 道明先生, 深澤 知先生に感謝致します. 本稿は JSPS 科研費 22J20059 の助成を受けたものです.

参考文献

[Amb04] F. Ambro, *Shokurov's boundary property.* J. Differential Geom. **67** (2004), no. 2, 229-255.

[AP06] C. Arezzo, F. Pacard, *Blowing up and desingularizing constant scalar curvature Kähler manifolds.* Acta Math. **196**(2): 179-228 (2006).

[Aub76] T. Aubin, Équations du type Monge-Ampère sur la varietés kählériennes compactes, CR Acad. Sci. Paris, **283** (1976), 119–121.

[BJ20] H. Blum, M. Jonsson. *Thresholds, valuations, and K-stability*, Adv. Math. **365** (2020).

[BHJ17] S. Boucksom, T. Hisamoto, M. Jonsson. *Uniform K-stability, Duistermaat-Heckman measures and singularities of pairs,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67**(2), 743–841, 2017.

[Che21] G. Chen, *The J-equation and the supercritical deformed Hermitian-Yang-Mills equation*, Invent. Math. **225** (2021), 529–602.

[CDS15] X.X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun. *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds*, I-III. J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), 183-197, 199-234, 235-278.

[DP21] V. Datar, V. Pingali. *A numerical criterion for generalised Monge-Ampère equations on projective manifolds.* Geom. Funct. Anal. **31** (2021), 767–814.

[Der16] R. Dervan, *Uniform stability of twisted constant scalar curvature Kähler metrics*, Int. Math. Res. Not. IMRN **15** (2016), 4728–4783.

[DR19] R. Dervan, J. Ross, *Stable maps in higher dimensions.* Math. Ann. **374** (2019), 1033–1073.

[DS21] R. Dervan and L. M. Sektnan. *Optimal symplectic connections on holomorphic submersions*, Comm. Pure Appl. Math. **74**(10) (2021) 2132-2184.

[Don02] S. K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 289–349.

[FG14] O. Fujino, Y. Gongyo, *On the moduli b-divisors of lc-trivial fibrations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **64**(4), 1721–1735, 2014.

[Fuj19a] K. Fujita, *A valuative criterion for uniform K-stability of $\mathbb{Q}$-Fano varieties.* J. reine angew. Math. **751** (2019), 309–338.

[Fuj19b] K. Fujita. *Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs.* Kyoto J. Math. 59(2) (2019) 399–418.

[FO18] K. Fujita, Y. Odaka, *On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors.* Tohoku Math. J. **70** (2018), 511–521.

[JSS19] W. Jian, Y. Shi and J. Song. *A remark on constant scalar curvature Kähler metrics on minimal models.* Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 3507–3513.

[Hat21] M. Hattori, *A decomposition formula for J-stability and its applications*, arXiv:2103.04603

[Hat22] M. Hattori, *On K-stability of Calabi-Yau fibrations*, arXiv:2203.11460

[LS15] M. Lejmi and G. Székelyhidi, *The J-flow and stability*, Adv. Math., **274** (2015), 404–431.

[Li17] C. Li, *K-semistability is equivariant volume minimization*, Duke Math. **166** (2017), 3147-3218.

[Mat57] Y. Matsushima, Sur la Structure du Groupe d'Homéomorphismes Analytiques d'une Certaine Variété Kaehlérinne. Nagoya Math. J., **11** (1957), 145–150.

[Mi80] R. Miranda, *Stability of pencils of cubic curves*, Amer. J. Math. **102** (1980), no. 6, 1177–1202.

[Mi81] R. Miranda, *The moduli of Weierstrass fibrations over* $\mathbb{P}^1$, Math. Ann. **255** (1981), no. 3, 379–394.

[Mi83] R. Miranda, *Projectively unstable elliptic surfaces.* Illinois J. Math. **27**, no. 3, (1983), 404–420.

[Oda12] Y. Odaka, *The Calabi conjecture and K-stability*, Int. Math. Res. Not. IMRN **10** (2012), 2272–2288.

[Oda13a] Y. Odaka, *A generalization of Ross-Thomas slope theory*, Osaka J. Math. **50** (2013), 171–185.

[Oda13b] Y. Odaka, *The GIT stability of polarized varieties via discrepancy*, Ann. of Math. **177** (2013), 645–661.

[尾高 20] Y. Odaka, K 安定性と代数多様体のモジュライ問題について – Kähler–Einstein 計量との関わり – 数学, **72**, no. 4 (2020), 337–364.

[PT09] S. Paul, G. Tian. *CM stability and the generalized Futaki invariant II.* Astérisque No. **328** (2009), 339–354.

[Son20] J. Song. *Nakai-Moishezon criterion for complex hessian equations.* arXiv:2012.07956v1, 2020.

[Sto09] J. Stoppa, *K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds*, Adv. Math. **221**, no. 4 (2009), 1397–1408.

[Tia87] G. Tian, *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $C_1(M) > 0$, Invent. Math. **89**, 225-246 (1987).

[Tia90] G. Tian. *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class.* Invent. Math. **101** (1990), no. 1, 101–172.

[Tia15] G. Tian. *K-stability and Kähler-Einstein metrics.* Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), 1085–1156.

[Wan12] X. Wang, Heights and GIT weights, Math. Res. Letters vol. **19**, (2012).

[Yau78] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation, I. Comm. Pure. Appl. Math. **31**(3) (1978), 339–411.

[Zha21] K. Zhang, *A quantization proof of the uniform Yau-Tian-Donaldson conjecture*, to appear in Ann. de l'ENS. arXiv:2102.02438v2