Projective normality of general polarized abelian varieties

伊藤　敦 *

概要

モジュライの中で一般の g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) に対し，Hwang–To は $\chi(L) \geq (8g)^g/2g!$ ならば L は射影正規であることを示した．本稿では，$\chi(L)$ に関する条件を $\chi(L) > 2^{2g-1}$ に弱めることができる，という [Ito22c] の結果の概略を紹介する．

1　導入

本稿では，多様体などはすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする．

偏極代数多様体，すなわち射影代数多様体 X とその上の豊富な直線束 L の組 (X, L) に対し，以下の問題を考える．

問 1.1. いつ L が (i) 基底点自由，(ii) 非常に豊富，(iii) 射影正規[*1] になるか？

よく知られているように (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立っている．この問いについては，例えば X が滑らかであるとき，随伴束 $K_X + mL$ は

(i)’ $m \geq \dim X + 1$ ならば基底点自由である（藤田予想 [Fuj87]），
(ii)’ $m \geq \dim X + 2$ ならば非常に豊富である（藤田予想 [Fuj87]），
(iii)’ $m \geq \dim X + 2$ ならば射影正規か？（向井による問い[*2]）

という予想や問いがある．もちろん (iii)’ が正しければ (ii)’ も正しい．(i)’ については多くの研究があり $\dim X \leq 5$ の場合は肯定的に解決されている．一方 (ii)’ は 2 次元の場合は [Rei88] から従うが，3 次元以上の場合は未解決である．さらに (iii)’ は 2 次元の場合でも一般には未解決である．

このことから一般の状況で射影正規性を示すのはかなり難しいと推測できる．そこで X がアーベル多様体という扱いやすい場合を考えよう．この場合 $K_X + mL = mL$ は

(i)” $m \geq 2$ ならば基底点自由，
(iii)” $m \geq 3$ ならば射影正規（[Koi76]）[*3]

であることが知られている．またこれらの結果は [Mum70, Kem89, Par00] などにより高次のシジジーについて一般化されている．

(i)”, (iii)” では m の条件が X の次元に依らない[*4]ことに注意する．また L が主偏極のとき L

* 岡山大学自然科学研究科　ito-atsushi@okayama-u.ac.jp

[*1] 本稿の主題となる性質なので一応定義を述べると，L が射影正規であるとは，自然な $\mathrm{Sym}^k H^0(X, L) \to H^0(X, kL)$ が任意の $k \geq 1$ に対し全射であることである．

[*2] $m \geq \dim X + 2 + p$ ならば $K_X + mL$ は性質 (N_p) をみたすか？という向井による問いの $p = 0$ の場合である．

[*3] [Koi76] は基礎体が $\mathbb{C}$ であることを仮定しているが，関口 [Sek76, Sek77] により任意の代数閉体上に一般化された．このことは講演の際に桂利行先生に教えていただいた．

[*4] つまり (i)’, (iii)’ で $\dim X = 1$ のときと同じ条件．

は基底点自由ではなく，$2L$ は非常に豊富ではないので，(i)", (iii)" の m に関する条件は sharp である．したがってアーベル多様体の場合，藤田予想や向井の問い (i)'-(iii)' は非常に満足の行く解答があるといえる．一方，問 1.1 の特別な場合である

問 1.2. (X,L) が偏極アーベル多様体で L が原始的，つまり $L=mA$ となる整数 $m\geq 2$ と豊富な直線束 A が存在しないとき，L 自身はいつ基底点自由，非常に豊富，射影正規か？

という問いについては，残念ながら (i)", (iii)" は何も情報を与えていない．

本稿では一般の g 次元偏極アーベル多様体の射影正規性を考える．ここでの「一般の」とは「任意の」という意味ではなく，「適当なモジュライの中で一般の元」という意味で用いている．モジュライを考えるための離散的なデータとして，偏極アーベル多様体の型を以下のように定義することができる：

g 次元偏極アーベル多様体 (X,L) に対し，アーベル多様体の間の同種

$$\varphi_L : X \to \widehat{X} := \mathrm{Pic}^0(X) \quad : \quad x \mapsto t_x^* L \otimes L^{-1} \tag{1.1}$$

が定まる．ここで $t_x : X \to X \ : \ y \mapsto y + x$ は平行移動の射である．

事実–定義 1.3. g 次元偏極アーベル多様体 (X,L) に対し，$d_1|d_2|\cdots|d_g$ を満たす正の整数の列 $(d_1,\ldots,d_g)$ がただ一つ存在し，アーベル群としての同型

$$\ker\varphi_L \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^{\oplus 2}$$

が成り立つ．この $(d_1,\ldots,d_g)$ を (X,L) の**型**という．

(X,L) の型に対し，例えば以下が知られている．

- $\chi(L)=h^0(L)=d_1\cdots d_g$．特に L が主偏極 $\Leftrightarrow (d_1,\ldots,d_g)=(1,\ldots,1)$.
- $d_1 = 1 \Leftrightarrow L$ が原始的，
- 型 $(d_1,\ldots,d_g)$ を一つ固定すると，適当な意味でその型の g 次元偏極アーベル多様体 (X,L) をパラメトライズする既約なモジュライが存在する．したがって，「$(d_1,\ldots,d_g)$ 型の一般の（general な）(X,L)」を考えることができる．

気持ちとしては d_i たちが大きいほうが L の正値性も大きいのであるが，L が原始的の場合，すなわち $d_1=1$ の場合は，$d_2,\ldots,d_g$ がどんなに大きくても $(d_1,\ldots,d_g)$ 型の (X,L) が基底点自由になるとは限らない．実際楕円曲線 E_i とその上の次数 d_i の直線束 L_i をとると，直積

$$(E_1,L_1)\times\cdots\times(E_g,L_g) := (E_1\times\cdots\times E_g, \mathrm{pr}_1^* L_i\otimes\cdots\otimes\mathrm{pr}_g^* L_g)$$

の型は $(d_1,\ldots,d_g)$ となる．したがって $d_1=1$ の場合，任意の $d_2,\ldots,d_g$ に対し $(E_1,L_1)\times\cdots\times(E_g,L_g)$ は基底点自由ではない．しかしながらモジュライの中で一般の (X,L) については，$d_1,\ldots,d_g$ が十分大きければ基底点自由性や射影正規性が成り立つことが知られている：

定理 1.4. (X,L) を $(d_1,\ldots,d_g)$ 型の一般の偏極アーベル多様体とする．このとき

(1) $d_1+\cdots+d_g\geq 2g$ ならば L は基底点自由（[Gar06]）．
(2) $d_1\cdots d_g \geq (8g)^g/2g!$ ならば L は射影正規（[HT11]）[*5]．

[*5] Stirling の公式より，$g\gg 1$ のとき $(8g)^g/2g! \sim (8e)^g/2\sqrt{2\pi g}$ である．

(X,L) の型が $(1,\dots,1,g)$ の場合，$h^0(L)=g=\dim X$ なので L は必ず基底点を持つ．したがって定理 1.4 (1) の条件は sharp である，すなわち $2g$ はこれ以上小さく取ることはできない．定理 1.4 (2) を改良した以下の定理が [Ito22c] の主結果である：

定理 1.5 ([Ito22c, Theorem 1.1])**.** (X,L) を $(d_1,\dots,d_g)$ 型の一般の偏極アーベル多様体とする．このとき $d_1\cdots d_g\geq 2^{2g-1}$ かつ $(d_1,\dots,d_g)\neq(2,4,\cdots,4)$ ならば L は射影正規である[*6] [*7]．

[Rub98] により $(2,4,\cdots,4)$ 型の (X,L) は射影正規ではないことが知られているので，定理 1.5 の 2^{2g-1} は sharp な値である．本稿では定理 1.5 の概略を解説する．

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2022 における講演の機会をくださった世話人の池田 京司先生，稲場 道明先生，深澤 知先生に感謝致します．本稿で解説する筆者の研究は科研費（17K14162, 21K03201）の助成を受けています．

2 $\mathbb{Q}$ 因子の基底点自由性

この節では，Z. Jinag と G. Pareschi が [JP20] で導入した，アーベル多様体上の $\mathbb{Q}$ 因子の基底点自由性について解説する．

偏極アーベル多様体 (X,L) に対し，短完全列 $0\to\mathfrak{m}_x\otimes L\to L\to L\otimes\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x\to 0$ と $h^1(X,L)=0$ を用いると，

$$L \text{ が基底点自由} \quad\Leftrightarrow\quad \text{任意の } x\in X \text{ に対し } h^1(X,\mathfrak{m}_x\otimes L)=0$$

が成り立つことがわかる．この一般化として Jinag–Pareschi は $\mathbb{Q}$ 因子 tL $(t\in\mathbb{Q}_{>0})$ の基底点自由性を

$$tL \text{ が基底点自由} \quad\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\quad \text{任意の } x\in X \text{ に対し “}h^1(X,\mathfrak{m}_x\otimes tL)=0\text{”}$$

と “定義” した．正確な定義は以下のようになる：

定義 2.1 ([JP20, Section 8])**.** 偏極アーベル多様体 (X,L) と有理数 $t>0$ に対し，

$$tL \text{ が基底点自由} \quad\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\quad \text{任意の } x\in X \text{ に対し } h^1(X,\mu_b^*\mathfrak{m}_x\otimes abL)=0$$

と定める．ただし $t=\frac{a}{b}$ は t の分数表示であり，$\mu_b:X\to X$ は b 倍写像 $\mu_b(y)=by$ である．

$\mu_b^*L\equiv b^2L$（ただし $\equiv$ は数値的同値を表す）が成り立つので，$\mu_b^*\mathfrak{m}_x\otimes abL$ は μ_b による $\mathfrak{m}_x\otimes tL$ の引き戻しとみなすことができる．またこの定義は t の分数表示 $t=a/b$ によらないことも確かめられる[*8]．

[*6] $(1,\dots,1,d)$ 型の一般の偏極アーベル多様体 (X,L) に対しては，(X,L) が射影正規 $\Leftrightarrow$ $d_1\cdots d_g\geq 2^{g+1}-1$ が成り立つ [Ito20]．定理 1.5 はその証明を改良することで得られている．[Ito20] については [Ito22a] で解説している．

[*7] $d_1\cdots d_g\geq 2^{2g-1}$ かつ $(d_1,\dots,d_g)\neq(2,4,\cdots,4)$ は十分条件ではあるが必要条件ではない．一方 $(d_1,\dots,d_g)$ 型の (X,L) が射影正規ならば $d_1\cdots d_g\geq 2^{g+1}-1$ が成り立つことが簡単にわかる．つまり

$$d_1\cdots d_g>2^{2g-1}=4^g/2 \;\Rightarrow\; \text{一般の } (X,L) \text{ は射影正規} \;\Rightarrow\; d_1\cdots d_g\geq 2^{g+1}-1$$

が成り立つ．

[*8] L と L' が数値的同値のとき，tL が基底点自由 $\Leftrightarrow$ tL' が基底点自由，が成り立つこともわかる．

Jinag–Pareschi はこの $\mathbb{Q}$ 因子の基底点自由性について以下の定理を示した：

定理 2.2 ([JP20, Corollary E])**.** (X, L) を偏極アーベル多様体とする．

(1) ある実数 $\beta(X, L) \in (0, 1]$ が存在し，

$$tL \text{ が基底点自由} \Leftrightarrow t > \beta(X, L)$$

が成り立つ[*9]．とくに $t > 1$ ならば tL は基底点自由である．

(2) $\frac{1}{2}L$ が基底点自由ならば，L は射影正規である[*10]．

藤田予想や向井の問いを思い出すと，射影正規性は基底点自由性に比べ示すのが一般には難しい（と思われる）性質であった．定理 2.2 は，示すことが難しい射影正規性を，$\mathbb{Q}$ 因子の基底点自由性（もちろん難しいが，それでも多少は扱いやすい）に帰着している．とくに問 1.2 を考える際に非常に有用である．例えば以下のように §1 の (iii)" は定理 2.2 の系として直ちに従う：

例 2.3. (X, L) を偏極アーベル多様体 (X, L) とする．このとき

(a) $m \geq 3$，もしくは
(b) $m = 2$ かつ L が基底点自由

ならば mL は射影正規である[*11]．実際 (a) もしくは (b) の仮定のもと，定理 2.2 (1) より $\frac{1}{2}(mL) = \frac{m}{2}L$ は基底点自由である．よって定理 2.2 (2) より mL は射影正規である．

(a) は小泉による §1 の (iii)" に他ならない．また (b) は大渕による [Ohb88, Theorem] の少し弱い形である．

3 定理 1.5 の証明の概略

一つ用語を準備しよう．

定義 3.1. 型 $(d_1, \ldots, d_g)$ が**射影正規**であるとは，$(d_1, \ldots, d_g)$ 型の一般の偏極アーベル多様体 (X, L) が射影正規であることとする．

この用語のもとで定理 1.5 は

$$d_1 \cdots d_g \geq 2^{2g-1} \text{ かつ } (d_1, \ldots, d_g) \neq (2, 4, \cdots, 4) \text{ ならば型 } (d_1, \ldots, d_g) \text{ は射影正規}$$

と述べることができる．

射影正規という性質はモジュライの中で開条件である[*12]ことがわかるので，型 $(d_1, \ldots, d_g)$ が射影正規であることは，$(d_1, \ldots, d_g)$ 型のある偏極アーベル多様体 (X, L) が射影正規であることと同値である．したがって定理 1.5 を示すには，各型に対し射影正規であるような (X, L) の例を一

[*9] この $\beta(X, L)$ は (X, L) の基底点自由性閾値 basepoint-freeness threshold と呼ばれる．特に L が基底点自由であることと $\beta(X, L) < 1$ が同値になる．

[*10] 一般にこの逆は成り立たない，すなわち L が射影正規でも $\frac{1}{2}L$ が基底点自由とは限らない．ただし L が射影正規ならば，任意の $t > \frac{1}{2}$ に対し tL は基底点自由であることは簡単に示すことができる．従って $\frac{1}{2}L$ の基底点自由性と L の射影正規性は同値ではないが，それほど大きく違うわけではない．詳しくは [Ito22b, Remark 7.3 (3)] を参照されたい．

[*11] [JP20] はすべて $\mathbb{C}$ 上で考えているが，F. Caucci [Cau20] は任意の代数的閉体上で定理 2.2 を示している．したがって例 2.3 の主張は正標数でも成り立つ．さらに [Cau20] は高次のシジジーへの一般化も行っている．

[*12] 有理数 $t > 0$ を固定すると，tL が基底点自由である，という性質もモジュライの中で開条件になっている．

つ構成すればよい．さらに定理 2.2 (2) より，$\frac{1}{2}L$ が基底点自由である例を見つければよいことがわかる．

3.1　ステップ 1

ステップ 1 では以下の補題を示す．この補題は g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) が特殊な条件を満たす場合に，tL が基底点自由であるための数値的な十分条件を与えている．

補題 3.2. g 次元偏極アーベル多様体 (X, L) に対し，X の部分アーベル多様体の列

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{g-1} \supset X_g = \{o\}$$

で $\operatorname{codim}_X(X_i) = i$ を満たすものが存在したとする[*13]．ただし $o \in X$ は X の原点である．このとき

$$t > \max_{0 \leq i \leq g-1} \frac{\chi(L|_{X_{i+1}})}{\chi(L|_{X_i})} \tag{3.1}$$

ならば $\mathbb{Q}$ 因子 tL は基底点自由である[*14]．

証明．以下，簡単のため tL が通常の直線束であるかのように議論する．厳密には b 倍写像 μ_b で引き戻して同様の議論をすればよい．

定義より任意の $x \in X$ に対して $h^1(\mathfrak{m}_x \otimes tL) = 0$ が成り立つことを示せばよい．X_{i+1} は X_i の既約因子なので，X_i 上の短完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{X_i}(-X_{i+1}) \to \mathfrak{m}_{o/X_i} \to \mathfrak{m}_{o/X_{i+1}} \to 0$$

が得られる．これに tL をテンソルした

$$0 \to tL|_{X_i} \otimes \mathcal{O}_{X_i}(-X_{i+1}) \to \mathfrak{m}_{o/X_i} \otimes tL|_{X_i} \to \mathfrak{m}_{o/X_{i+1}} \otimes tL|_{X_{i+1}} \to 0$$

を考える．$\chi(L|_{X_j}) = (L|_{X_j}^{g-j})/(g-j)!$ に注意すると，(3.1) と [Laz04, Theorem 2.2.15] より $tL|_{X_i} \otimes \mathcal{O}_{X_i}(-X_{i+1})$ は X_i 上の豊富な $\mathbb{Q}$ 因子であることがわかる．したがって小平消滅定理より

$$h^k(tL|_{X_i} \otimes \mathcal{O}_{X_i}(-X_{i+1})) = 0 \quad (k \geq 1) \tag{3.2}$$

が任意の $0 \leq i \leq g-1$ について成り立つ．また $X_g = \{o\}$ なので

$$h^1(\mathfrak{m}_{o/X_g} \otimes tL|_{X_g}) = 0 \tag{3.3}$$

である．(3.2), (3.3) より，任意の i について $h^1(\mathfrak{m}_{o/X_i} \otimes tL|_{X_i}) = 0$ であることがわかり，特に $i = 0$ の場合 $X_0 = X$ なので $h^1(\mathfrak{m}_o \otimes tL) = 0$ が得られた．

一般の $x \in X$ に対しても，X_i の平行移動 $X_i + x \subset X$ に対して同様の議論をすれば，$h^1(\mathfrak{m}_x \otimes tL) = 0$ が得られる．□

[*13] 非常に一般のアーベル多様体は単純，つまり非自明な部分アーベル多様体を持たないので，この仮定はかなり強い．

[*14] X_i はアーベル多様体なので，$\chi(L|_{X_j}) = (L|_{X_j}^{g-j})/(g-j)!$ が成り立つ．したがって $\chi(L|_{X_{i+1}})/\chi(L|_{X_i})$ は $(g-i)(L|_{X_{i+1}}^{g-i-1})/(L|_{X_i}^{g-i})$ と交点数を用いて表される．

3.2 ステップ 2

偏極アーベル多様体 (X, L) の型が $(d_1, \ldots, d_g)$ のとき，

$$d_1 = \max\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, L = mA \text{ を満たす } X \text{ 上の豊富な直線束 } A \text{ が存在する }\}$$

が成り立つ．したがって

タイプ A　$d_1 \geq 3$，または
タイプ B　$d_1 = 2$ かつ $d_1 + \cdots + d_g \geq 4g$

ならば，型 $(d_1, \ldots, d_g)$ は射影正規であることが定理 1.4 (1) と例 2.3 からわかる．

定理 1.5 を示す際に難しいのは L が原始的，つまり $d_1 = 1$ の場合である．補題 3.2 を用いると以下の命題を示すことができる．

命題 3.3. 以下の型は射影正規である：

タイプ C　$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n'}, d)$，ただし $n, n' \geq 0,\ d \geq 2^{n+2} + 2n' - 1$.
タイプ D　$(1, c, c)$，ただし $c \geq 5$.

この命題の証明のアイデアは以下の通りである．まず正の整数 $k_1, \ldots, k_{g-1} \geq 1$ に対し，楕円曲線 $E_1, \ldots, E_g$ と同種写像 $f_i : E_i \to E_g$ で $\ker f_i \simeq \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z}$ であるものをとり，

- $X := E_1 \times \cdots \times E_g$,
- $F_i := \mathrm{pr}_i^{-1}(o_{E_i})$，ただし $\mathrm{pr}_i : X \to E_i$ は第 i 成分への射影，$o_{E_i} \in E_i$ は原点,
- $\Gamma := \{(p_1, \ldots, p_g) \in X \,|\, p_g = p_1 + \cdots + p_{g-1}\}$

と定める．定義より $F_i, \Gamma \subset X$ は余次元 1 の部分アーベル多様体，特に X の因子である．そこでこれらの 1 次結合で表される因子

$$L := a_1 F_1 + \cdots + a_g F_g + b\Gamma$$

を考える．タイプ C,D の各型 $(d_1, \ldots, d_g)$ に対し，うまく $k_1, \ldots, k_{g-1}, a_1, \ldots, a_g, b$ を選ぶと

(i) (X, L) は $(d_1, \ldots, d_g)$ 型の偏極アーベル多様体,
(ii) $\frac{1}{2}L$ は基底点自由，特に L は射影正規

が成り立つことが示せる．(i) は L が定める同種 $\varphi_L : X \to \widehat{X}$ の核を具体的に計算することで $\ker \varphi_L \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ を示す．(ii) については，$X = E_1 \times \cdots \times E_g$ は $\prod_{i \in I} E_i$（ただし $I \subset \{1, \ldots, n\}$）の形の部分アーベル多様体を持つので，補題 3.2 を適当な部分アーベル多様体の列に適用し，交点数を計算することで示すことができる．

3.3 ステップ 3

偏極アーベル多様体 (X_i, L_i) が射影正規ならば，Künneth の公式よりそれらの直積

$$(X, L) = (X_1, L_1) \times \cdots \times (X_r, L_r) := (X_1 \times \cdots \times X_r, \mathrm{pr}_1^* L_i \otimes \cdots \otimes \mathrm{pr}_r^* L_r)$$

も射影正規になる[*15]．したがってすでに射影正規性がわかっている次元の低い型に分解することで，より次元の高い型の射影正規性が得られる[*16]．

例 3.4. 型 $(1,1,2,6,6,18)$ が射影正規であることを示すには，まず

$$(1,1,2,6,6,18) = (1,1,18) \times (2,6,6)$$

と 2 つの型の積に分解する[*17]．(X_1, L_1) を $(1,1,18)$ 型の一般の偏極アーベル多様体，(X_2, L_2) を $(2,6,6)$ 型の一般の偏極アーベル多様体とする．$(1,1,18)$ はステップ 2 のタイプ C, $(2,6,6)$ はタイプ B なので，$(X_1, L_1), (X_2, L_2)$ はともに射影正規である．$(X_1, L_1) \times (X_2, L_2)$ の型は $(1,1,2,6,6,18)$ になるので，型 $(1,1,2,6,6,18)$ も射影正規であることがわかる．

型 $(d_1, \ldots, d_g)$ が $d_1 \cdots d_g \geq 2^{2g-1}$ かつ $(d_1, \ldots, d_g) \neq (2,4,\cdots,4)$ を満たすならば，$(d_1, \ldots, d_g)$ はタイプ A〜D の型のいくつかの積に分解することが示せる．よって例 3.4 と同様の議論で型 $(d_1, \ldots, d_g)$ も射影正規であること，すなわち定理 1.5 が従う．

4 Infinitesimal Torelli 定理

最後に同様の議論で示せる結果をひとつ紹介する．

定義 4.1. 非特異射影代数多様体 Y が **Infinitesimal Torelli** 定理をみたすとは，自然な

$$H^1(Y, T_Y) \to \mathrm{Hom}(H^0(Y, K_Y), H^1(Y, \Omega_Y^{\dim Y - 1}))$$

が単射であることをいう[*18]．

$\mathbb{Q}$ 因子の基底点自由性を用いることで，以下の定理を示すことができる．

定理 4.2 ([Ito22c, Theorem 1.3])**.** (X, L) を $(d_1, \ldots, d_g)$ 型の一般の偏極アーベル多様体とする．$d_1 + \cdots + d_g \geq 2g$ かつ $(d_1, \ldots, d_g)$ が以下のリストに含まれていなければ，非特異な $Y \in |L|$ は Infinitesimal Torelli 定理をみたす．

- $g = 2$, $(d_1, d_2) = (1,3), (1,4)$,
- $g = 3$, $(d_1, d_2, d_3) = (1,1,4), (1,1,5), (1,1,6), (1,3,3)$,
- $g \geq 4$, $(d_1, \ldots, d_g) = (1, \ldots, 1, g+1), (1, \ldots, 1, g+2), (1, \ldots, 1, 2, g)$.

証明の方針は定理 1.5 と同様である．実際 Y が Infinitesimal Torelli 定理をみたすことを示すには，$H^0(X, L) \otimes H^0(X, (g-1)L) \to H^0(X, gL)$ の全射性を示せばよい [Blo19]．定理 2.2 (2) と同様にして，$\frac{g-1}{g}L$ が基底点自由ならば，その全射性が従うことがわかる．定理 4.2 の条件を満たす型の一般な (X, L) に対し，$\frac{g-1}{g}L$ が基底点自由であることは §3 と同様の議論で示せる．

[*15] $\frac{1}{2}L_i$ が基底点自由ならば，$\frac{1}{2}L$ も基底点自由であることもわかる．これを用いると定理 1.5 の (X, L) に対し，$\frac{1}{2}L$ が基底点自由であることも示せる．

[*16] このアイディアは定理 1.4 (1) [Gar06] で一般の L の基底点自由性を示す際に用いられている．

[*17] 型 $(d_1, \ldots, d_g)$ と $(d'_1, \ldots, d'_{g'})$ の積 $(d_1, \ldots, d_g) \times (d'_1, \ldots, d'_{g'})$ とは，型 $(\delta_1, \ldots, \delta_{g+g'})$ で

$$\mathbb{Z}/\delta_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\delta_{g+g'}\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_g\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d'_{g'}\mathbb{Z})$$

を満たすもの，と定義する．型は $\delta_1 | \cdots | \delta_{g+g'}$ を満たすので，そのような $(\delta_1, \ldots, \delta_{g+g'})$ は一意に定まる．

偏極アーベル多様体の直積 $(X_1, L_1) \times (X_2, L_2)$ の型は，型の定義より $(X_1, L_1), (X_2, L_2)$ の型の積になる．

[*18] これは適当な周期写像が Y に対応する点の周りで埋め込みになっていることを意味している．

参考文献

[Blo19] Patrick Bloß, *The infinitesimal torelli theorem for hypersurfaces in abelian varieties*, arXiv:1911.08311, 2019.

[Cau20] Federico Caucci, *The basepoint-freeness threshold and syzygies of abelian varieties*, Algebra Number Theory **14** (2020), no. 4, 947–960. MR 4114062

[Fuj87] Takao Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 167–178. MR 946238

[Gar06] Luis Fuentes García, *A note on the global generation of primitive line bundles on abelian varieties*, Geom. Dedicata **117** (2006), 133–135. MR 2231163

[HT11] Jun-Muk Hwang and Wing-Keung To, *Buser-Sarnak invariant and projective normality of abelian varieties*, Complex and differential geometry, Springer Proc. Math., vol. 8, Springer, Heidelberg, 2011, pp. 157–170. MR 2964474

[Ito20] Atsushi Ito, *Higher syzygies on general polarized abelian varieties of type* $(1, \ldots, 1, d)$, arXiv:2011.09687, to appear in Math. Nachr., 2020.

[Ito22a] ———, *Linear systems on general polarized abelian varieties of type* $(1, \ldots, 1, d)$, 都の西北代数幾何学シンポジウム 2021 報告集, 2022.

[Ito22b] ———, *M-regularity of* $\mathbb{Q}$*-twisted sheaves and its application to linear systems on abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **375** (2022), no. 9, 6653–6673. MR 4474904

[Ito22c] ———, *Projective normality and basepoint-freeness thresholds of general polarized abelian varieties*, arXiv:2204.10035, 2022.

[JP20] Zhi Jiang and Giuseppe Pareschi, *Cohomological rank functions on abelian varieties*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **53** (2020), no. 4, 815–846. MR 4157109

[Kem89] George R. Kempf, *Linear systems on abelian varieties*, Amer. J. Math. **111** (1989), no. 1, 65–94. MR 980300

[Koi76] Shoji Koizumi, *Theta relations and projective normality of Abelian varieties*, Amer. J. Math. **98** (1976), no. 4, 865–889. MR 480543

[Laz04] Robert Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2095471

[Mum70] David Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969), Edizioni Cremonese, Rome, 1970, pp. 29–100. MR 0282975

[Ohb88] Akira Ohbuchi, *A note on the normal generation of ample line bundles on abelian varieties*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences **64** (1988), no. 4, 119–120.

[Par00] Giuseppe Pareschi, *Syzygies of abelian varieties*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 3, 651–664. MR 1758758

[Rei88] Igor Reider, *Vector bundles of rank* 2 *and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 309–316. MR 932299

[Rub98] Elena Rubei, *Projective normality of abelian varieties with a line bundle of type* $(2,\cdots)$, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **1** (1998), no. 2, 361–367. MR 1638159

[Sek76] Tsutomu Sekiguchi, *On projective normality of Abelian varieties*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), no. 2, 307–322. MR 401784

[Sek77] ———, *On projective normality of Abelian varieties. II*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 4, 709–727. MR 457457