最小次数の非特異平面充填曲線とそれらの破片

Smooth plane filling curves of minimum degree and their fragments

本間正明 (神奈川大学) *

homma@kanagawa-u.ac.jp

概要

有限体上の平面充填曲線が非特異となる最小次数である，$q+2$ 次のそれらについて，個人的回顧も交えて解説します．

1　はじめに

小論では，有限体上の平面代数曲線論のひとつの話題をとり上げます．まず必要な記号などを準備します．q はある素数 p の冪で，q 元体 $\mathbb{F}_q$ と，$\mathbb{F}_q$ 上の射影平面 $\mathbb{P}^2$ を固定して，話を進めます．射影平面の斉次座標を x, y, z で表し，斉次多項式 $F(x, y, z) \in \mathbb{F}_q[x, y, z]$ で定まる (既約，可約を問わない) 曲線 C が主要な対象です．この C をときには $\{F(x, y, z) = 0\}$ (あるいは，文脈によっては, 単に $F(x, y, z) = 0$) のように書くこともあります．また, $\mathbb{P}^2$ の点としては $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上のものを考え，$\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{F}_q$-点全体は $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ と表します．$C(\mathbb{F}_q) = C \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ です．

定義 1.1. $C(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ を満たす C を平面充填曲線 (plane filling curve) とよぶことにします．

N. カッツ [12] の問い 10 の末尾に，非特異平面充填曲線が存在するかという問題提起がありました．数理網 (Math. Sci. Net) で検索すると，カッツの提起を受け，O. ガバ [2] と B. プーネン [10] が独立に，もっと一般的に，肯定的な解答を与えていました．しかし，それらの論文からは，非特異平面充填曲線の最も小さな次数や，具体的な例を知ることはできません．これが，小論の出発点です．

2　有限体上の平面充填曲線

次の主張は容易に示すことができます．

補題 2.1. $\mathbb{F}_q[x, y, z]$ における $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ のイデアルは $x^q y - x y^q, y^q z - y z^q, z^q x - z x^q$ で生成され

---

* この報告の少なくない部分は，慶尚国立大学 (Gyeongsang National University) 金善正 (Kim Seon Jeong) 氏との共同研究に基づきます．

ます．なお，$\overline{\mathbb{F}}_q[x,y,z]$ のイデアルと考えても同様です．

したがって，平面充填曲線の最低次数は $q+1$ ですが，$(b,c,a)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ について，平面曲線

$$a(x^qy-xy^q)+b(y^qz-yz^q)+c(z^qx-zx^q)=0$$

は (b,c,a) を通る $q+1$ 本の $\mathbb{F}_q$-直線束になります．よって，非特異，あるいはもっと弱い条件，$\mathbb{F}_q$ 上既約という条件の下では，その次数は $q+2$ 以上です．

さて，私は，非特異平面充填曲線の具体的な例の探索の過程で，ハッシュフェルト-コシェマロ-トーレスの本 [4] に目を通す機会があり，その第 8 章の最後の練習問題にタリーニ [12] の結果が取り上げられていました．それは次のようなものです．

定理 2.2 (タリーニ)**.** $q+2$ 次の既約平面充填曲線の定義方程式は以下のいずれかに $\mathbb{F}_q$-射影同値になります．

(1) $a(x+y)(x^qy-xy^q)+z(y^qz-yz^q)+x(z^qx-zx^q)=0$
ここで，t^3-at-a は $\mathbb{F}_q$ 上既約とします．

(2) $ay(x^qy-xy^q)+z(y^qz-yz^q)+x(z^qx-zx^q)=0$
ここで，t^3-a は $\mathbb{F}_q$ 上既約とします．（このとき，$q\equiv 1 \mod 3$ となります．）

(3) $q=3^e$
$(y+az)(x^qy-xy^q)-z(y^qz-yz^q)-x(z^qx-zx^q)=0$
ここで，t^3+at^2+1 は $\mathbb{F}_q$ 上既約とします．

さて，このリストにある曲線は非特異になるのでしょうか．射影平面曲線では非特異から絶対既約が従いますので，そうなれば (この主張を示す上でも) 嬉しいことです．素朴には，曲線の方程式を $F=0$ として，$F=F_x=F_y=F_z=0$ に解があるかどうかを調べれば良いのですが，ちょっと一筋縄ではいきそうもありません．ところが，$\mathbb{F}_q$-点に限れば，$\alpha\in\mathbb{F}_q$ なら $\alpha^q=\alpha$ となる事に注意すると容易な連立方程式[*1]となり，リストの曲線は，すべての $\mathbb{F}_q$-点で非特異ということが分かります．

タリーニは次の事実を巧妙な組合わせ的方法で示しています．

定理 2.3. すべての $\mathbb{F}_q$-点が非特異点であるような $q+2$ 次の平面充填曲線は絶対既約になります．

証明. C をそのような曲線とします．

(第 1 段) 最初に，これが $\mathbb{F}_q$-直線を既約成分として持たないことを示します．成分となる $\mathbb{F}_q$-直線は高々 1 本です．なぜなら，2 本あるとそれらの交点は $\mathbb{F}_q$-点で，それは特異点となり仮定に反します．成分となる $\mathbb{F}_q$-直線が 1 本存在するとします．その直線以外の $\mathbb{F}_q$-直線は (その上に $q+1$ 個の $\mathbb{F}_q$-点を持つので，)C とは (それら $q+1$ 個の $\mathbb{F}_q$-点に加えて) もう一つの交点があるはずです

[*1] 実際，$F_x=F_y=F_z=0$ は $\mathbb{F}_q$ 上に制限して，x^q,y^q,z^q をそれぞれ x,y,z と書き換えると，簡単な 2 次式の連立方程式になります．例えば，後述の (3) 式を見て下さい．

が，その点の $\mathbb{F}_q$ 上の共役点もまた，その直線上の点，換言すれば，その $\mathbb{F}_q$-直線はその上のちょうどひとつの (成分である $\mathbb{F}_q$-直線にのらない)$\mathbb{F}_q$-点で C に接します．成分となる直線に乗っていない C の $\mathbb{F}_q$-点の個数は q^2 個であり，成分となる直線以外の $\mathbb{F}_q$-直線の本数は q^2+q 本ですので，これは矛盾です．

(第 2 段) さて，C が絶対既約ではないとして，$C = C_1 \cup C_2$ とします．このとき，C_1 または C_2 について，$C_i \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) = \emptyset$ となります．そうでないとしましょう．

$|C_1 \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)| = M > 0$, $|C_2 \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)| = N > 0$ とおくと，$M + N = q^2 + q + 1$ です．また，$\deg C_1 = m$, $\deg C_2 = n$ とすると，$m + n = q + 2$ です．

$C_1 \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \ni P_0$ と $C_2 \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \ni Q_0$ を，それぞれ任意にとり，それらを固定します．P_0 をとおる $\mathbb{F}_q$-直線 l について，$u_l = |C_1 \cap l(\mathbb{F}_q)|$, $v_l = |C_2 \cap l(\mathbb{F}_q)|$ とおきます．

前段より，どの $\mathbb{F}_q$-直線も成分ではないので，それらは C_1 や C_2 に含まれてしまうことはありません．したがって $u_l \leq m$, $v_l \leq n$ となり $q + 1 = u_l + v_l \leq m + n = q + 2$ が成り立ちます．よって，$v_l = n - 1$ または n です．また，l_0 が P_0 での接線 $T_{P_0}C$ のときは $q+1+1 = u_{l_0} + 1 + v_{l_0} \leq m+n = q+2$ なので $v_{l_0} = n$ です．したがって，$N = v_{l_0} + \sum_{l \neq l_0} v_l \geq n + q(n-1)$ となります．

同様に，Q_0 を用いて議論すれば，$M \geq m + q(m-1)$ となるので，$q^2 + q + 1 = M + N \geq (q+1)(m+n) - 2q = (q+1)(q+2) - 2q$ となり，矛盾を生じます．

(第 3 段) 前段より，$C_1 \supset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ として一般性を失いません．このとき，$\deg C_2 = 1$ なら，第 1 段より，これは $\mathbb{F}_q$ 上では定義されない直線です．したがって，C_2 の $\mathbb{F}_q$-共役も C の成分となります．第 2 段より，C_2 は $\mathbb{F}_q$-点を持たなかったので，その共役も同様です．この成分も C_2 に組み込んでおくことにすれば，その成分を C_1 から除いたものを再び C_1 と書いても，なお，$C_1 \supset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ であり，$n \geq 2$ です．$\deg C_1 = m = q + 2 - n \leq q$ なので，これは補題 2.1 に矛盾します． □

3 $q+2$ 次平面充填曲線の行列表示

この節からは，タリーニ以降の進展について述べます．$q+2$ 次平面充填曲線を次のように表示すると，タリーニのリストが腑に落ちます．

定義 3.1. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{F}_q)$ に対し，

$$F_A(x, y, z) := (x, y, z) A \begin{pmatrix} y^q z - y z^q \\ z^q x - z x^q \\ x^q y - x y^q \end{pmatrix}$$

と定めます．また，行列 A の固有多項式 $|tE - A|$ を $f_A(t)$ であらわすことにします．

明らかに，任意の $q+2$ 次平面充填曲線 C について，ある行列 A が存在して，$C = \{F_A = 0\}$ です．この行列表示によって，タリーニのリスト (定理 2.2) の方程式を書くと，リストの番号 (1) – (3) に対応して，それぞれ

例 3.2. (1) $(x,y,z)\begin{pmatrix}0&1&a\\0&0&a\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^qz-yz^q\\z^qx-zx^q\\x^qy-xy^q\end{pmatrix}=0$

(2) $(x,y,z)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&a\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^qz-yz^q\\z^qx-zx^q\\x^qy-xy^q\end{pmatrix}=0$

(3) (3) の方程式を -1 倍して，$(x,y,z)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^qz-yz^q\\z^qx-zx^q\\x^qy-xy^q\end{pmatrix}=0$

となり，それぞれの 3 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(t)$ は，順に t^3-at-a, t^3-a, t^3+at^2+1 で，これらはそれぞれの制約条件にあらわれる多項式です．

ただし，多項式 F_A が零多項式になることも起こります．

補題 3.3. F_A が零多項式となる必要十分条件は $A=\mu E$ $(\mu\in\mathbb{F}_q)$ となることです．ここで，E は単位行列です．

証明. 十分であることは容易です．逆に，F_A が零多項式であるとします．このとき，$F(x,y,0)$ も零多項式ですから，$a_{13}=a_{23}=0$ となり，同様にして，A の対角成分以外はすべて 0 であることが，わかります．さらに，対角行列については，F_A を直接書き下す事によって，対角成分全てが等しくなります． □

また，直接計算することで，射影変換に対する方程式の振る舞いが分かります．

補題 3.4. $T\in GL(3,\mathbb{F}_q)$ について，$(x,y,z)=(x',y',z')^tT$ とすると

$$\begin{pmatrix}y^qz-yz^q\\z^qx-zx^q\\x^qy-xy^q\end{pmatrix}=(\det T)^tT^{-1}\begin{pmatrix}y'^qz'-y'z'^q\\z'^qx'-z'x'^q\\x'^qy'-x'y'^q\end{pmatrix}$$

となります．したがって，射影変換 T^{-1} により，方程式 $F_A=0$ は $F_{(\det T)^tTA^tT^{-1}}=0$ に移るので，$C_A=\{F_A=0\}$ と書くと，$T^{-1}(C_A)=C_{^tTA^tT^{-1}}$ となります．

系 3.5. A の固有多項式 $f_A(t)$ が既約なら，C_A は $\mathbb{F}_q$-直線を成分に持ちません．

証明. 対偶を示します．上の補題より，成分である $\mathbb{F}_q$-直線は $z=0$ として構いません．このとき，$A=(a_{ij})$ について．$(x,y,0)A\begin{pmatrix}0\\0\\x^qy-xy^q\end{pmatrix}=(a_{02}x+a_{12}y)(x^qy-xy^q)$ が恒等的に 0 となり，$a_{02}=a_{12}=0$ になります．よって，$f_A(t)$ は $\mathbb{F}_q$ 上可約です． □

4　フロベニウス古典性と非古典性

この節では，必ずしも充填曲線ではない $\mathbb{F}_q$ 上の d 次平面曲線 $C = \{F(x,y,z) = 0\}$ を考えます．

定義 4.1. 上の C に対し，$D = \{x^qF_x + y^qF_y + z^qF_z = 0\}$ とします．この曲線はステール-ボロック [11] の序文中で，この論文の発想の原型として示される定理の証明にあらわれるのですが，特段名付けてはいません．名前がないと不便ですので，ここでは C の q-随伴曲線とよぶことにします．

q-随伴曲線 D の役割は次のようなものです．

- $(a_0, a_1, a_2) \in C(\mathbb{F}_q)$ について，$a_i \in \mathbb{F}_q$ (すなわち，$a_i^q = a_i$) ととって良いので，D の定義式に代入したとき，オイラーの公式から，これを満たすことが分かります．従って，$C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D$ です．
- $G = x^qF_x + y^qF_y + z^qF_z$ とします．$P \in C(\mathbb{F}_q)$ について，比が意味を持つ限り[*2]$(F_x(P) : F_y(P) : F_z(P)) = (G_x(P) : G_y(P) : G_z(P))$ が成立します．

したがって，

$(*)$ C と D が共通成分を持たない

という条件の下では，$P \in C(\mathbb{F}_q)$ について，交叉数 $i(C.D; P) \geq 2$ となり，$|C(\mathbb{F}_q)| \leq \frac{1}{2}d(d+q-1)$ という $|C(\mathbb{F}_q)|$ の上からの評価を得ます．

定義 4.2. 平面曲線 C が $(*)$ の条件を持つとき，<ruby>フロベニウス古典的<rt>Frobenius classical</rt></ruby>曲線とよび，そうでないとき，<ruby>フロベニウス非古典的<rt>Frobenius non-classical</rt></ruby>曲線と言います．

命題 4.3 (ステール-ボロック上限)**.** $\mathbb{F}_q$ 上の d 次平面曲線 C がフロベニウス古典的であれば，

$$|C(\mathbb{F}_q)| \leq \frac{1}{2}d(d+q-1)$$

が成り立ちます．

注釈 4.4. 平面曲線 C がフロベニウス古典的であれば，その q-随伴曲線 D とで作る 0-<ruby>輪体<rt>cycle</rt></ruby> $C.D$ は上で説明したように，

$$C.D = \sum_{P \in C(\mathbb{F}_q)} m_P P + \cdots \quad (m_P \geq 2)$$

となりますが，$\mathbb{F}_q$-点ではない C の特異点も，定義を見れば，$\cdots$ の部分にあらわれることは観察できます．しかし，$\cdots$ の部分の幾何学的意味はそれほど真剣には検討されていないように思います．

[*2] 比が意味を持たなければ，P は D の特異点となり，$i(C.D; P) \geq 2$ は自動的に成立します．

5　非特異性

再び，3 節の状況にもどり，次の事実の証明の概略を [7, 定理 3.2] のそれにしたがって説明します．詳細な計算は原論文をご覧下さい．

定理 5.1. $f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上既約なら C_A は非特異曲線になります．また逆も成立します．

証明. (第 1 段) まず，「$f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上既約である $\Leftrightarrow$ C_A が全ての $\mathbb{F}_q$-点で非特異である」を示します．「$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ が $F_x=F_y=F_z=0$ を満たす」ということを書き下せば，

$$(\alpha,\beta,\gamma)A\begin{pmatrix}0\\ \gamma\\ -\beta\end{pmatrix}=(\alpha,\beta,\gamma)A\begin{pmatrix}-\gamma\\ 0\\ \alpha\end{pmatrix}=(\alpha,\beta,\gamma)A\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\\ 0\end{pmatrix}=0 \tag{1}$$

となりますが，さらに A の列ベクトルを順に $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ とかくと, これは

$$(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{a}_0:(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{a}_1:(\alpha,\beta,\gamma)\mathbf{a}_2=\alpha:\beta:\gamma \tag{2}$$

と書き直せて，この値を λ とすると，λ は A の固有値で，$\mathbb{F}_q$ の元です．したがって $f_A(t)$ は $\mathbb{F}_q$ 上可約です．逆に，$f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上可約とすれば，これが 3 次式なので，$f_A(t)=0$ の根のひとつは $\mathbb{F}_q$ の元となります．この固有値に属する固有ベクトルとして，$\mathbb{F}_q$ 上のベクトル (α,β,γ) が選べて，(2) を満たし，したがって (1) を満たすことになり，この点は C_A の特異点となります．

第 2 段では，$f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上既約であれば，C_A は非特異曲線であることを示します．

(第 2 段; その 1) $f_A(t)=t^3-(ct^2+bt+a)$ とします．これが $\mathbb{F}_q$ 上既約ですから，A は $f_A(t)$ の同伴行列 $\begin{pmatrix}0&0&a\\1&0&b\\0&1&c\end{pmatrix}$ と相似となります．したがって，補題 3.4 から，A 自身が $f_A(t)$ の同伴行列としてかまいません．このとき，C_A の定義式は

$$F=y(y^qz-yz^q)+z(z^qx-zx^q)+(ax+by+cz)(x^qy-xy^q)=0$$

とかけ，

$$\left\{\begin{array}{lcl}F_x&=&a(x^qy-xy^q)+z^{q+1}-(ax+by+cz)y^q\\ F_y&=&(y^qz-yz^q)+b(x^qy-xy^q)-yz^q+(ax+by+cz)x^q\\ F_z&=&(z^qx-zx^q)+c(x^qy-xy^q)+y^{q+1}-zx^q\end{array}\right. \tag{3}$$

となります．また，C_A の q-随伴曲線 D の定義式は

$$G=y^q(y^qz-yz^q)+z^q(z^qx-zx^q)+(ax+by+cz)^q(x^qy-xy^q)$$

ですので，

$$\left\{\begin{array}{lcl}G_x&=&\left(z^2-(ax+by+cz)y\right)^q\\ G_y&=&((ax+by+cz)x-yz)^q\\ G_z&=&(y^2-zx)^q\end{array}\right.$$

となります．連立方程式 $G_x = G_y = G_z = 0$ を解くと，その解は，$\mathbb{F}_q$-既約方程式 $f_A(t) = t^3 - (ct^2 + bt + a) = 0$ の解 λ に応じて，$Q_\lambda = (\lambda^{-2}, \lambda^{-1}, 1)$ です．すなわち，D の特異点集合は $\{Q_\lambda, Q_{\lambda^q}, Q_{\lambda^{q^2}}\}$ です．また，直接計算することによって，これら 3 点は C_A の点でもあることが分かります．

今しばらく C_A と D が共通成分を持たないと仮定して議論を進めます．Q_λ における，C_A と D の局所定義式を観察すると，$Q_\lambda \in C_A$ は非特異，$Q_\lambda \in D$ は q-重特異点であることがわかります[*3]．したがって，$i(C_A.D; Q_\lambda) \geq q$ となり，

$$(\deg C_A)(\deg D) = (C_A.D) = \sum_{j=0}^{2} i(C_A.D; Q_{\lambda^{q^j}}) + \sum_{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)} i(C_A.D; P) \geq 3q + 2(q^2 + q + 1)$$

という不等式を得ますが，この最終項 $3q + 2(q^2 + q + 1)$ は $(\deg C_A)(\deg D) = (q+2)(2q+1)$ に一致しますので，実は等号が成立してしまいます．すなわち，

$$C_A.D = \sum_{P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)} 2P + \sum_{j=0}^{2} q Q_{\lambda^{q^j}}$$

です．C_A の特異点はすべて q-随伴曲線の点でもある事と (第 1 段) を合わせれば，C_A の特異点の可能性は 3 点 $\{Q_\lambda, Q_{\lambda^q}, Q_{\lambda^{q^2}}\}$ のみですが，これらは前述のように C_A の特異点ではありません．結局 C_A は非特異曲線です．

(第 2 段; その 2) 最後に，(その 1) 後半部の議論で仮定した「C_A と D は共通成分を持たない」ことを証明します．E を C_A と D の共通成分とします．$\deg D > \deg C_A$ ですから，D には共通成分ではない成分 E' があります．$E \cap E'$ は D の特異点から成りますが，(その 1) 前半部より，それらは上記 3 点のいずれかの Q_λ です．ここでの C_A と D との局所定義式から，C_A の Q_λ での接線と D の 接錐(tangent cone) を調べると，前者が後者には含まれないことがわかり，矛盾が生じます[*4]． □

上の定理の証明には，Tallini の既約性定理 2.3 は用いていないことに注意して下さい．

系 5.2. C_A について，以下の 4 つの条件 (1) C_A が非特異であること，(2) C_A が絶対既約であること，(3) C_A は全ての $\mathbb{F}_q$-点で非特異となること，(4) $f_A(t)$ は $\mathbb{F}_q$ 上既約であること，は同値です．

6　C_A の自己同形群

この節では，非特異な C_A について，その $\mathbb{F}_q$ 上の自己同形群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A)$ を考えます．$q+2 \geq 4$ より，この元は $PGL(3, \mathbb{F}_q)$ へ一意的に拡張できますので，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A) \subset PGL(3, \mathbb{F}_q)$ と見ることができます．

[*3] この辺りの詳細な計算は [7, 定理 3.2, 975 頁] を参照して下さい．

[*4] この辺りの計算も省略します．[7, 定理 3.2, 975,6 頁] を参照して下さい．

$GL(3,\mathbb{F}_q) \ni B \mapsto \overline{B} \in PGL(3,\mathbb{F}_q)$ を自然な全射とします．補題 3.4 より ${}^tA$ と交換可能な T は C_A の自己同形として働きますので，${}^tA$ の中心化群 $C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)$ の自然な全射による像を $\overline{C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)}$ とあらわすと

$$\overline{C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)} \subset C_{PGL(3,\mathbb{F}_q)}(\overline{{}^tA}) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A)$$

となります．

また，$B \in GL(3,\mathbb{F}_q)$ について，$\overline{B} \in PGL(3,\mathbb{F}_q)$ が $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A)$ の元を引き起こす条件は補題 3.3 と 補題 3.4 により，ある $\rho = \rho_B \in \mathbb{F}_q^\times$ と $\mu = \mu_B \in \mathbb{F}_q$ が存在して

$$ {}^tAB = \rho B{}^tA + \mu B \tag{4}$$

と書けることです．${}^tA$ の独立な固有 (縦) ベクトルを $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ とし[*5]，3 つの固有ベクトルがあらわす $\mathbb{P}^2$ の点を $\overline{\Lambda}_0, \overline{\Lambda}_1, \overline{\Lambda}_2$ と書きます．これら 3 点は，補題 3.3 の恒等式を考慮に入れれば C_A 上の点です[*6]. (4) より，$B\Lambda_i$ $(i = 0,1,2)$ もまた ${}^tA$ の固有ベクトルで，固有値がすべて相異なることより，ある $\sigma_B \in S_3$ があって $\overline{B}\,\overline{\Lambda}_i = \overline{\Lambda}_{\sigma_B(i)}$ となります．すなわち，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A)$ は $\{\overline{\Lambda}_0, \overline{\Lambda}_1, \overline{\Lambda}_2\}$ に作用します．この作用により，準同形 $\pi : \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A) \to S_3$ を得ますが，

$$1 \to \overline{C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)} \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(C_A) \xrightarrow{\pi} S_3$$

が完全列となり，π の像は自明であるか，A_3 であり，$\overline{C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)}$ は位数 q^2+q+1 の巡回群です．この巡回群の固定点 $\overline{\Lambda}_1, \overline{\Lambda}_2, \overline{\Lambda}_3$ 以外の軌道は長さ q^2+q+1 となります．この辺りも詳細は省きます[*7].

非特異性–第 2 の証明[*8]

A は固有多項式 $f_A(t)$ の同伴行列として構いません．このとき, $\{\overline{\Lambda}_1, \overline{\Lambda}_2, \overline{\Lambda}_3\}$ は $\{Q_\lambda, Q_{\lambda^q}, Q_{\lambda^{q^2}}\}$ です．これらの点とは一致しない特異点があれば，その点の $\overline{C_{GL(3,\mathbb{F}_q)}({}^tA)}$-軌道上の点も全て特異点です．言い換えれば，$C$ は少なくとも q^2+q+1 個の特異点を持つことになり，C_A の算術種数 $\frac{q(q+1)}{2}$ より大きくなり矛盾です．したがって，特異点の可能性は $\{Q_\lambda, Q_{\lambda^q}, Q_{\lambda^{q^2}}\}$ ですが，これらが特異点ではないことは，5 節に述べたように，簡単に確かめることができます． □

2018 年にデュラン・クーニャ [1] が (私にとっては) 思いがけない結果を証明しました．

定理 6.1 (デュラン・クーニャ)．$f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上既約なら C_A は

$$xy^{q+1} + yz^{q+1} + zx^{q+1} = 0$$

に $\mathbb{F}_{q^{3(q^2+q+1)}}$ 上射影同値になります．

---

*5 $f_A(t)$ は $\mathbb{F}_q$ 上既約ですから，ひとつの固有値を λ_0 とすれば，残りは λ^q, λ^{q^2} ですので，$\Lambda_1 = \Lambda_0^{(q)}$, $\Lambda_2 = \Lambda_0^{(q^2)}$ として構いません．ただし括弧冪は成分毎の冪を表します．

*6 A を定理 5.1 の証明中の第 2 段のようにとったとき，これらは 3 点は $\{Q_\lambda, Q_{\lambda^q}, Q_{\lambda^{q^2}}\}$ です．

*7 詳細は，[7, 5 章と付録] をご覧下さい．

*8 この証明は [7] 投稿時の査読者の示唆によります．

注釈 6.2. [1] では主張の仮定を「C_A が絶対既約 (タリーニの結果)」としていますが，実質は「$f_A(t)$ が $\mathbb{F}_q$ 上既約」の仮定の下で証明できています．この方程式なら非特異性はただちに確かめられますので，これは C_A が非特異であることの第 3 の証明でもあります．

7　次数 $q+2$ の可約平面充填曲線

3 節で定義した C_A が可約であるとき，どのような成分があらわれるでしょうか．これが，この節の主題です．小論表題中の「<ruby>破片<rt>fragment</rt></ruby>」とは可約な C_A の既約成分を意味しています[*9]．

2 つの補題 (3.3) と (3.4) より，$A,\, A' \in \mathbb{M}(3\times 3, \mathbb{F}_q) \setminus \{\mu E \mid \mu \in \mathbb{F}_q\}$ について，C_A と $C_{A'}$ が $\mathbb{F}_q$ 上の射影変換で移り変われる条件は，$B \in GL(3, \mathbb{F}_q)$, $\rho \in \mathbb{F}_q^*$ と $\mu \in \mathbb{F}_q$ が存在して

$$A' = \rho\, {}^t\!B A\, {}^t\!B^{-1} + \mu E. \tag{5}$$

となることです．このとき，固有多項式 $f_A(t)$ と $f_{A'}(t)$ の間には，$f_{A'}(t) = \rho^3 f_A(\frac{t-\mu}{\rho})$ という関係式が成立します．

同値関係 (5) は行列の<ruby>相似性<rt>similarity</rt></ruby> を少しばかり粗くしたものですので，分類は容易です．分類は，少し長いリストになりますので詳細は [5] に譲り，破片のあらわれ方について説明します．

(甲) 最も粉々になる場合は，$q+2$ 本の $\mathbb{F}_q$-直線の和に分かれるときで，これは補題 2.1 の直後に述べた $q+1$ 本の $\mathbb{F}_q$-直線束にもう一本 $\mathbb{F}_q$-直線が加わったものです．この加わる直線は直線束の一つが 2 重直線になる場合と，直線束の中心を通らない場合があり得ます．

(乙) 次数の高い破片があらわれる場合にも，必ず $\mathbb{F}_q$-直線が破片の一部としてあらわれます．しかし，その本数は高々 3 本です．

(丙) 破片の $\mathbb{F}_q$-直線が一本のときは，残余の破片である次数 $q+1$ の曲線は
- (イ) $x^{q+1} - x^2 z^{q-1} + y^q z - y z^q = 0$ に $\mathbb{F}_q$-射影同値となるか，
- (ロ) アフィン平面充填曲線[*10]になります．

(丁) 破片の $\mathbb{F}_q$-直線が 2 本のときは，残余の破片である次数 q の曲線は
- (ハ) $x^q - x z^{q-1} + x^{q-1} y - y^q = 0$ に $\mathbb{F}_q$-射影同値です．

(戊) 破片の $\mathbb{F}_q$-直線が 3 本のときは，それら 3 本が一点を共有することはなく，残余の破片である次数 $q-1$ の曲線は
- (ニ) $\alpha x^{q-1} + \beta y^{q-1} + \gamma z^{q-1} = 0$ (ただし，$\alpha\beta\gamma \neq 0$ であり， $\alpha+\beta+\gamma = 0$) に $\mathbb{F}_q$-射影同値です．

注釈 7.1. この報告を書くにあたって，いま一度 [12] に目を通したところ，$q+2$ 次平面充填曲線が分解すると，どのように $\mathbb{F}_q$-直線があらわれるかについて考察していました[*11]．それは

---

*9 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ に貼られたガラス板を割ったときの「かけら」というような連想です．

*10 次節で説明します．

*11 [12, 439 頁–440 頁]

(i) $q+2$ 本の $\mathbb{F}_q$-直線で，内 $q+1$ 本が $\mathbb{F}_q$-直線束となる．そうでなければ，

(ii) 高々 3 本の $\mathbb{F}_q$-直線があらわれ，3 本の場合には，それらが一点を共有することはない

という結果です．これは [5] を書くとき，言及しておくべき事でしたが，すっかり見落としていました．

8　破片としてあらわれる高次曲線

この節では，前節 (イ)(ロ)(ハ)(ニ) の曲線だけが，破片としてあらわれる高次曲線であることの意味を考えたいと思いますが，その前に (ロ) の「アフィン平面充填曲線」について説明します．この概念は [8] で採り上げました．

定義 8.1. $\mathbb{F}_q$ 上の平面曲線 C について，ある $\mathbb{F}_q$-直線 L が存在して $C(\mathbb{F}_q) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \setminus L$ となるとき，アフィン平面充填曲線とよびます．

アフィン平面充填曲線の最低次数は $q+1$ であり，$L = \{z=0\}$ とすれば，$q+1$ 次のアフィン平面充填曲線は次のように具体的に記述できます．

それらの定義式は

$$(s,t)\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \tag{6}$$

が s,t の多項式として $\mathbb{F}_q$ 上既約であるような $a_0,\ldots,b_1 \in \mathbb{F}_q$ と任意の $a_2, b_2 \in \mathbb{F}_q$ によって，

$$(x^q - xz^{q-1}, y^q - yz^{q-1})\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \tag{7}$$

と書けます．さらに，このような定義式を持つ平面曲線は無限遠直線を $\{z=0\}$ とする $q+1$ 次のアフィン平面充填曲線で, 絶対既約であり，唯一つの特異点を持ちます．

注釈 8.2. 明らかに，(6) の既約性の条件なしでも，曲線 (7) の $\mathbb{F}_q$-点の集合は $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \setminus \{z=0\}$ を含みますが，(6) の既約性がないと余分な点を含んでしまいます．

シックライ上界

$\mathbb{F}_q$ 上定義された平面曲線 C の $\mathbb{F}_q$-点の個数 $N_q(C)$ についての次の評価式があります [6]．

定理 8.3 (シックライ上限)**.** $\deg C = d$ とします．C が，成分として，$\mathbb{F}_q$-直線を持たないとき，これが $d=q=4$ の曲線

$$(x+y+z)^4 + (xy+yz+yz)^2 + xyz(x+y+z) = 0$$

と射影同値でない限り

$$N_q(C) \le (d-1)q+1$$

が成立します．さらに，上の例外曲線については，$\mathbb{F}_q$-点の個数はこの上界式を 1 だけ上回る 14 となります．

注釈 8.4. シックライ上限をヴェイユ上限 (の平面曲線限定版)

$$N_q(C) \leq q + 1 + (d-1)(d-2)\sqrt{q}$$

と比較すると，$d = \sqrt{q} + 1$ では一致して，d がこれより大きければシックライ上限の方がヴェイユ上限より優れています．

(イ)(ロ)(ハ)(ニ) の曲線はこのシックライ上限を考慮に入れると，$C(\mathbb{F}_q)$ が大きいと言え，これらが現れるのも宜なるかなという思いがします．実際，(イ)(ハ)(ニ) はシックライ上限の等号を到達し，(ロ) のアフィン平面充填曲線の $\mathbb{F}_q$-点の個数はシックライ上限から 1 だけ下がった値です．

なお，現在までに知られているシックライ上限の等号を到達する曲線は (イ)(ハ)(ニ) 以外には，次数 $\sqrt{q} + 1$ のハーミシアン曲線と既約 2 次曲線および $q = 3$, $d = 4$ と $q = 4$, $d = 5$ に散在する 2 つの曲線のみです．

9　おわりに

この報告を閉じるにあたって，無責任な問題を提起します．無責任というのは真剣に考えたことがないという意味です．既約非特異空間充填曲線の存在する (とは思うのですが，その) 最低次数はいくつになるのでしょうか．ちなみに，既約性を犠牲にすれば，$\mathbb{P}^3$ の互いに交わらない $q^2 + 1$ 本の $\mathbb{F}_q$-直線の和が存在します [3, 4 章] が，既約なものの具体例を私は知りません．

最後に，2022 年度城崎代数幾何学シンポジウムでの講演機会を与えて下さった世話人の方々に感謝します．

参考文献

[1] G. Duran Cunha, *Curves containing all points of a finite projective Galois plane*, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018) 2964–2974.

[2] O. Gabber, *On space filling curves and Albanese varieties*, Geom. Funct. Anal. 11 (2001), 1192–1200.

[3] J. W. P. Hirschfeld, Projective geometries over finite fields (second edition), Oxford University Press, Oxford, 1998.

[4] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, Algebraic curves over a finite field, Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford, 2008.

[5] M. Homma, *Fragments of plane filling curves of degree $q + 2$ over the finite field of q elements, and of affine-plane filling curves of degree $q + 1$*, Linear Algebra and Its Applications 589, (2020), 9–27.

[6] M. Homma and S. J. Kim, *Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field* III, Finite Fields Appl. 16 (2010) 315–319.

[7] M. Homma and S. J. Kim, *Nonsingular plane filling curves of minimum degree over a finite field and their automorphism groups: Supplements to a work of Tallini*, Linear Algebra and its Applications 438 (2013) 969-985.

[8] M. Homma and S. J. Kim, *The second largest number of points on plane curves over finite fields*, Finite Fields Appl. 49 (2018) 80–93.

[9] N. Katz, *Space filling curves over finite fields*, Math. Res. Lett. 6 (1999), 613–624.

[10] B. Poonen, *Bertini theorems over finite fields*, Ann. of Math. (2) 160 (2004), 1099–1127.

[11] K.-O. Stöhr and J. F. Voloch, *Weierstrass points and curves over finite fields*, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986) 1–19.

[12] G. Tallini, *Sulle ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois* $S_{r,q}$, Rend. Mat. e Appl. (5) 20 (1961) 431–479.