複素版Sylvester-Gallaiの定理と超平面配置の対数的ベクトル場の分裂型

阿部 拓郎

2022 年 12 月 23 日

概 要

本稿では, 論文 [1] の内容を解説する.

1 序章

Sylvester-Gallai の定理は Sylvester により 1893 年に提唱され, 1944 年に Gallai によって解決された射影平面上の幾何学における古典的な定理である. その主張は以下のように極めて簡明である：

定理 1.1 (Sylvester-Gallai の定理 ([7]))
$\mathcal{A}$ を $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中の, 一点を共有しない直線の有限族とする.

$$L_2(\mathcal{A}) := \{H \cap L \mid H, L \in \mathcal{A},\ H \neq L\}$$

を $\mathcal{A}$ が作る交点集合とすると, $L_2(\mathcal{A})$ は必ず二重点を含む.

少し言葉を補足しておく. $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中の点 p に対して

$$\mathcal{A}_p := \{H \in \mathcal{A} \mid p \in H\}$$

とおくと, 定理中の「一点を共有しない」は「$\mathcal{A} = \mathcal{A}_p$ を満たす点 p が存在しない」となり, 二重点 p とは $|\mathcal{A}_p| = 2$ を満たす点 p のことである. この一般化として $|\mathcal{A}_p| = k$ となるような点 p を k 重点と呼ぶこととする. また $\mathcal{A}_p \neq \mathcal{A}$ が成り立つ p が存在する $\mathcal{A}$ を **pencil** と呼ぶが, 本稿では $\mathcal{A}$ は **pencil ではないことを以下仮定する**.

Sylvester-Gallai の定理の証明の歴史については色々とあるようで, Gallai より先に Melchior がより精度の高い結果を出していたようである．また定理 1.1 は Sylvester のオリジナルな定式化ではない．Sylvester は一直線上にないような有限個の点集合を与え, それらを二点ずつ選んで直線で結んでいった場合に, 三点以上が乗る直線が存在する, という書き方をしている．これらの二つの定式化の証明には面白いことに若干の違いがみられるが, 基本的には比較的シンプルかつ初等的な議論で証明ができる．どちらにせよ, 二重点の重要性は代数幾何学では言うまでもなく, それが常に存在するというこの定理の重要性もまた明らかであろう．

二重点が存在するならば, 当然それがいくつあるのかが気になるところである．この視点から以下の予想が提示された：

予想 1.2 (Dirac-Motzkin 予想)
$n_2(\mathcal{A})$ で $L_2(\mathcal{A})$ に含まれる二重点の数を表すとする．このとき $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中の直線配置 $\mathcal{A}$ に対して

$$n_2(\mathcal{A}) \geq \frac{|\mathcal{A}|}{2}$$

が成り立つ．

Dirac-Motzkin 予想は open ではあるが, 実際はほとんど全ての部分が Green と Tao により [8] において解決された．即ちある自然数 n_0 が存在して $|\mathcal{A}| \geq n_0$ を満たす $\mathcal{A}$ に対しては Dirac-Motzkin 予想が正しいことが [8] において示されている．この n_0 そのものは明示的には求められていない．Green-Tao によれば理論的には求めることは可能であるが, それ自体にあまり重要性はないとのことである．どちらにせよ, 理論上は有限個の直線配置に対して Dirac-Motzkin 予想を調べれば完全な解決が得られることとなる．

さて, ここまで全て実射影平面で問題を考えていることに気づかれた方も多いだろう．本稿の目的はこれらの定理の複素版を考えることである．「考える」と書いたのは, 上の二つの結果あるいは予想に対して簡単な反例がすぐに見つかり, 実と複素では様相が全く異なることが昔から知られていたためである．

例 1.3
$\mathcal{A}$ を

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(x^n - z^n) = 0$$

で定義される $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中の直線配置とする．もし $n \geq 3$ ならばこの配置は二重点を一つも持たない．よって Sylvester-Gallai の定理も Dirac-Motzkin 予想もどちらも成立しない．

というわけで早速複素版はダメなことがわかってしまう．これに力を失ったのか，複素版の直線配置の二重点問題はあまり研究がされてこなかったようである．この状況に対して新しい視点を投げかけたのが Anzis と Tohaneanu による論文 [6] であり，その中で彼らは以下の定理を証明した．

定理 1.4 ([6])
$\mathcal{A}$ が $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中の超可解配置であるとする．即ちある $p \in L_2(\mathcal{A})$ が存在して，任意の $H, L \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p,\ H \neq L$ に対してある $K \in \mathcal{A}_p$ が存在して $K \supset H \cap L$ を満たすような配置である．このとき $n_2(\mathcal{A}) \geq |\mathcal{A}|/2$ が成立，

定理 1.4 中の p を超可解配置 $\mathcal{A}$ の**モジュラー点**という，一般にモジュラー点は超可解配置に対して複数ある．超可解配置は代数・幾何・組み合わせ論的に極めて良い性質を持つことで知られている配置であるが，Anzis と Tohaneanu はその良さが Dirac-Motzkin 予想に対しても成立することを示したわけである．つまり実超可解配置に対して Dirac-Motzkin 予想は正しい．これはもちろん Green-Tao の結果に含まれる部分も多いが，この定理のポイントはある性質を持つ配置に対しては本数に関係なく Dirac-Motzkin 予想が正しいことを示したところにある．このような結果が得られれば，以下の予想を提唱するのも自然であろう：

予想 1.5 (Anzis-Tohaneanu 予想 ([6]))
$\mathcal{A}$ が $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中の超可解配置ならば，Dirac-Motzkin 予想は正しい．

実際例 1.3 中の配置は超可解配置ではない．ただし，もともとの Sylvester-Gallai の定理の証明などが実構造をフルに使った証明であったことも相まってか，複素となるとこの種の主張を示すことはなかなか容易ではなく，Anzis-Tohaneanu 予想も様々な数学者が精力的に研究を進めたものの，なかなか解決を見ることはなかった．それに対して筆者は，$\mathcal{A}$ から定まる対数的ベクトル場の分裂型の概念を用いることで，予想 1.5 を解くことに成功した．それ自体は以下の定理の簡単な応用であり，ここでは以下の定理を主定理として述べることとする：

定理 1.6 ([1])
$H \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とおく，もし $\mathcal{A}'$ が自由性という代数的条

件を満たすならば, $n_2(\mathcal{A}) > 0$. 実際二重点が一つ H 上に存在する.

自由性の定義はセクション 2 に譲るが, ここではベクトル束に関連する代数的な条件であるとご理解いただければ幸いである. つまりある種の代数的な条件を満たす配置に対しては複素版の Sylvester-Gallai の定理が成立することがわかる. 実は複素版の Sylvester-Gallai の定理は不成立といったが, そのような配置 (**Sylvester-Gallai 配置**と呼ばれる）はほとんど見つかっていない. つまり例 1.3 の無限系列以外には筆者は二つの例外しか知らない. よって実は複素直線配置も二重点を持ちたがっているのでは, とも考えられる. この観点から, 複素配置の Sylvester-Gallai の定理の研究は, 複素配置が Dirac-Motzkin 予想を満たすような条件を探索することが, 一つの研究の指針を与えてくれるのでは, と筆者は考えている.

よって本稿の目的は定理 1.6 を示すこと及び今後の展望や未解決問題を提示することである. セクション 2 で関連する定義や定理が紹介され, セクション 3 で定理 1.6 及びその系として定理 1.4 が証明される. セクション 4 では関連する問題や今後の展望が述べられる.

謝辞. 城崎シンポジウム 2022 において講演の機会を与えてくださった池田京司氏, 稲場道明氏, 深澤知氏に深く感謝する. 本研究は日本学術振興会科研費・基盤研究 (B) （JP16H03924）の助成を受けている.

2　証明への準備

本章の結果に関する一般的なリファレンスとして [10] 及び [13] をあげておく. 証明において重要な役割を果たすのは超平面配置の代数である. 次元が少し動くため, 一般的なセットアップで説明をまず行う. $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする. 標数はほとんどの以下の結果において関係ないのであるが, 一部重要な場面で標数 0 が必要となるため, 本稿では標数 0 の体上でのみ考えることとする. $V = \mathbb{K}^\ell$ 中の**超平面配置** $\mathcal{A}$ とは, $\mathcal{A}$ が線型な超平面の有限集合であるときにいう. これは自然に $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}^{\ell-1}$ 中の超平面配置を与えることと同値であるため, 以後この二つを区別しないことがある. Sylvester-Gallai の定理はよって $V = \mathbb{R}^3$ 中の平面配置の話と考えることができる.

$H \in \mathcal{A}$ に対して $\ker \alpha_H = H$ となるような $\alpha_H \in V^*$ を一つ固定する. $S = \mathrm{Sym}^*(V^*) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$ を V の座標環とし,

$$\mathrm{Der}\, S := \oplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}$$

とおく．このとき超平面配置 $\mathcal{A}$ の**対数的ベクトル場** $D(\mathcal{A})$ を

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \operatorname{Der} S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

で定義する．$D(\mathcal{A})$ は S から自然に導入される次数が付いた, 階数 ℓ の反射的加群となることがわかるが, 一般的には自由加群とはならない．よって $\mathcal{A}$ が**自由**で**指数** $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ をもつとは,

$$D(\mathcal{A}) \simeq \oplus_{i=1}^{\ell} S[-d_i]$$

が成立するときにいう．超平面配置の自由性がどのように決まるかは筆者をはじめ様々な研究者が研究を行っているが, まだまだ未知の部分が多い．

続いて $\mathcal{A}$ の組み合わせ論について簡単に述べる．$\mathcal{A}$ の**交差格子** $L(\mathcal{A})$ を

$$L(\mathcal{A}) := \{\cap_{H \in \mathcal{B}} H \mid B \subset \mathcal{A}\}$$

で定義する．$\mathcal{A}$ の元たちが交わりとして構成する線型部分空間全体の集合であり, $\mathcal{A}$ の元がどのように交わっているかという組み合わせ論的情報としてとらえられる．これをさらに換骨奪胎したものがマトロイドであり, 超平面配置は幾何学的な実現でありかつそれからマトロイド $L(\mathcal{A})$ を得ることができるという意味で実現可能なマトロイドとも呼ばれる．

$$L_k(\mathcal{A}) := \{X \in L(\mathcal{A}) \mid \operatorname{codim}_V X = k\}$$

と定義すると, Dirac-Motzkin 予想で用いた用語 $n_2(\mathcal{A})$ は $L_2(\mathcal{A})$ の元の数のことを表しており, コンシステントになる．$L(\mathcal{A})$ 上に**メビウス関数** μ を $\mu(V) := 1$ かつ $X \neq V$ に対しては

$$\mu(X) := - \sum_{X \subsetneq Y \subset V,\ Y \in L(\mathcal{A})} \mu(Y)$$

と, 余次元が低いところから帰納的に定義し, その母関数を

$$\chi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X} = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i b_i(\mathcal{A}) t^{\ell - i}$$

で定める．これを**特性多項式**と呼ぶ．$L(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の組み合わせ論的情報の多くを保持しているが, 物としては大きくかつ複雑で取り扱いが難しい．そこで情報を弱くしても数値化することで扱いやすい組み合わせ論的情報としたものが特性多項式である．ちなみに $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき

$$b_i(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbb{C}^\ell \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H, \mathbb{C})$$

となることが [9] により知られている．もっというと [9] により $H^*(\mathbb{C}^\ell \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}}H, \mathbb{C})$ が環として $L(\mathcal{A})$ から決定されることが知られている．このように超平面配置のある性質が $L(\mathcal{A})$ にのみ依存するかどうかというのは基本的かつ重要な問題であるが, ほとんどの場合どちらかすらわかっていない．例えば補空間の基本群は $L(\mathcal{A})$ からは決まらないことが知られているが, 自由性がどうかは 40 年来未解決であり, 寺尾予想と呼ばれている．寺尾予想を支える一つの定理が以下の寺尾の分解定理である：

定理 2.1 (寺尾の分解定理, [12])
$\mathcal{A}$ が $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ たる自由配置であれば

$$\chi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell}(t - d_i).$$

よって自由性は特性多項式のことを知っているといえる．逆はどうかというのが寺尾予想ともいえる．

続いて自由性が関連する二つの完全列と制限写像を定義しよう．一つ目はある意味素直な制限写像である：

定義 2.2 (Euler 制限射)
$H \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}$ の H への制限 $\mathcal{A}^H$ を

$$\mathcal{A}^H := \{H \cap L \mid H \in \mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}\}$$

で定義すると, 以下の完全列が存在する：

$$0 \to D(\mathcal{A}') \stackrel{\cdot\alpha_H}{\to} D(\mathcal{A}) \stackrel{\rho^H}{\to} D(\mathcal{A}^H).$$

この完全列を **Euler 完全列**と呼び,

$$\rho^H(\theta)(\overline{f}) := \overline{\theta(f)}$$

で定義される ρ^H を **Euler 制限射**と呼ぶ．ここで $f \in S$ に対して $\overline{f}$ は $f \in S$ の $S/\alpha_H S = \overline{S}$ における自然な像を表す．

Euler 制限射は単純に α_H で modulo を取るだけという極めてシンプルな定義である．しかし代数幾何的にはそれだけで $D(\mathcal{A})$ から $D(\mathcal{A}^H)$ に写像が構成できるのは少し不思議と言えなくもない．代数幾何的には以下に定義するように制限の際の重複度まで込めた対象に対する制限射を定義するほうが明らかに自然である．

定義 2.3 (多重配置 ([14]))
$m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ を**重複度**といい, 組 $(\mathcal{A}, m)$ を**多重配置**と呼ぶ. 多重配置に対して

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \operatorname{Der} S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)}\ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

で**多重配置の対数的ベクトル場**が定義される. 重複度がない場合と同様にその自由性や指数 $\exp(\mathcal{A}, m)$ も定義される.

定義 2.4 (Ziegler 制限 ([14]))
$H \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}^H$ 上の重複度 m^H を, $X \in \mathcal{A}^H$ に対して

$$m^H(X) := |\{L \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid L \cap H = X\}|$$

で定める. これを **Ziegler 重複度**と呼び, $(\mathcal{A}^H, m^H)$ を $\mathcal{A}$ の H への **Ziegler 制限**と呼ぶ.

このようにして重複度付きでの制限を定義することは代数幾何的には非常に自然である. しかしながら $D(\mathcal{A})$ の元に対して素直に α_H で modulo を取ると像が $D(\mathcal{A}^H, m^H)$ に含まれなくなる. それはひとえに Euler 微分 θ_E が邪魔をすることとなる. これは modulo を取る前もあとも全ての超平面にピッタリ重複度 1 で接するためである. おそらくこれが理由で Ziegler 以前には, 自由配置研究に Ziegler 制限が考えられていなかったのだろう. これを解決するために Ziegler は以下の分解に着目した.

補題 2.5 ([13] 等を参照)
$H \in \mathcal{A}$ に対して

$$D_H(\mathcal{A}) := \{\theta \in D(\mathcal{A}) \mid \theta(\alpha_H) = 0\}$$

とおくと,

$$D(\mathcal{A}) = S\theta_E \oplus D_H(\mathcal{A})$$

が成立する.

この $D_H(\mathcal{A})$ は上の分解を見れば自由性や $D(\mathcal{A})$ の構造を見る際には本質的であることがわかる. このひと手間を挟むことでようやく Ziegler 制限射が定義できる：

定義 2.6 (Ziegler 制限射 ([14]))
以下の完全列が存在する：

$$0 \to D_H(\mathcal{A}) \overset{\cdot\alpha_H}{\to} D_H(\mathcal{A}) \overset{\pi^H}{\to} D(\mathcal{A}^H, m^H).$$

ここで $\pi^H := \rho^H|_{D_H(\mathcal{A})}$ で定義される写像を **Ziegler 制限射**と呼び, また上の完全列を **Ziegler 完全列**と呼ぶ.

この二つの完全列を用いることで主定理を証明する. まず Ziegler 制限に関する定理をいくつか導入しておこう.

定理 2.7 ([14]))
$\mathcal{A}$ が自由配置で指数が $(1, d_2, \ldots, d_\ell)$ であれば, Ziegler 制限 $(\mathcal{A}^H, m^H)$ は自由多重配置で指数は $(d_2, \ldots, d_\ell)$. 更に π^H は全射であり, それは $D_H(\mathcal{A})$ の基底を $D(\mathcal{A}^H, m^H)$ の基底へと移す.

では多重配置も含めた超平面配置の自由性の結果をいくつか導入する.

命題 2.8
$\ell = 2$ ならば多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ は自由配置. 更に $\rho^H : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}^H)$ はいつも全射.

証明. 自由性は体の拡大によらないので閉体上の話としてよく, とすると $D(\mathcal{A})$ の自由性はその層化として得られる $\mathbf{P}^1$ 上の反射層の分裂と同値であるが, これはよく知られた Grothendieck の定理から直ちに従う. また二次元配置の制限として得られる一次元配置は一点からなる集合のため, 生成元は Euler 微分であり, それは明らかに像に含まれるので全射性も自明. □

上で用いた事実を簡単に下で述べておく.

命題 2.9 ([5], [13] も参照)

$$\Gamma_*(\widetilde{D(\mathcal{A})}) := \oplus_{k \in \mathbb{Z}} H^0(\widetilde{D(\mathcal{A})}(k)) = D(\mathcal{A}).$$

二次元配置で重複度がない場合自由性も指数も容易にわかる.

補題 2.10
$\ell = 2$ なら $\mathcal{A}$j は自由で, 空でなければ $\exp(\mathcal{A}) = (1, |\mathcal{A}| - 1)$. 特に次数が 1 の基底として Euler 微分をとれる.

証明. $\theta_2 := Q(\mathcal{A})/\alpha_H \partial_{\alpha_H}$ とおく. ここで ∂_{α_H} は α_H と独立な元を適当にとったときの, α_H に対応する双対基底の一部. とすれば θ_E, θ_2 が基底となるのは自明. □

二次元多重配置も自由であるが, その指数は一般にほとんどわからない. しかし, わかる場合が少しだけある. 以下はその中でも有名な結果である.

定理 2.11 (Yuzvinsky)
$(\mathcal{A}, 2)$ は指数として $(|\mathcal{A}|, |\mathcal{A}|)$ を持つ.

超平面配置の性質を調べる際によく使われるのは既に出てきた制限及び以下のように定義される局所化である：

定義 2.12
$X \in L(\mathcal{A})$ に対して $\mathcal{A}$ の X での**局所化** $\mathcal{A}_X$ を

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$$

で定義する.

予想 1.5 で出てきた超可解配置を定義しておこう.

定義 2.13
$V = \mathbb{K}^3$ 中の配置 $\mathcal{A}$ が**超可解配置**であるとは, ある $X \in L_2(\mathcal{A})$ が存在して, 任意の $H, L \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X$ に対してある $K \in \mathcal{A}_X$ が存在して $K \supset H \cap L$ を満たすときに言う. この X を**モジュラー直線**と呼ぶ.

超可解配置は実は自由配置である.

定理 2.14 (Stanley)
$\mathcal{A}$ を, X をモジュラー直線とする $\mathbb{K}^3$ 中の超可解配置とすると, $\mathcal{A}$ は自由で $\exp(\mathcal{A}) = (1, |\mathcal{A}_X| - 1, |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_X|)$ となる.

3 主定理たちの証明

本章では主定理たちを証明する. ただし詳細まで立ち入ると長くなるため, 本質的な部分に絞って概略を説明するにとどめる. 詳細な証明は [1] を参照されたい. まず以下の定理を証明しよう.

定理 3.1 (自由全射定理, [1], [4])
$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ が自由ならば, Euler 完全列

$$0 \to D(\mathcal{A}') \overset{\cdot\alpha_H}{\to} D(\mathcal{A}) \overset{\rho^H}{\to} D(\mathcal{A}^H) \to 0$$

つまり ρ^H は全射.

証明. $X \in \mathcal{A}^H$ に対して局所化すると命題 2.8 から ρ^H は全射. よって $\mathcal{A}$ の階数に関する帰納法から ρ^H は原点以外の局所化で全射としてよい. つまり層の完全列

$$0 \to \widetilde{D(\mathcal{A}')} \overset{\cdot\alpha_H}{\to} \widetilde{D(\mathcal{A})} \overset{\rho^H}{\to} \widetilde{D(\mathcal{A}^H)} \to 0$$

を得る. ここでコホモロジー完全列および $H^1(\widetilde{D(\mathcal{A}')}(k)) = 0$ が自由性から従うことに注意すれば, 命題 2.9 と合わせて題意を得る. □

では主定理を示そう.

定理 1.6 の証明. H 上に二重点がないと仮定しよう. これは Ziegler 制限 $(\mathcal{A}^H, m^H)$ において $m^H(X) \geq 2$ が全ての $X \in \mathcal{A}^H$ で成立することを主張している.

まず定理 3.1 より ρ^H は全射. $D(\mathcal{A}) = S\theta_E \oplus D_H(\mathcal{A})$ かつ $\exp(\mathcal{A}^H) = (1, |\mathcal{A}^H| - 1)$ で次数が 1 の部分は Euler 微分に対応するため（補題 2.10), 独立性を用いてある $0 \neq \theta \in D_H(\mathcal{A})_{|\mathcal{A}^H|-1}$ が存在することがわかる. 他方 $\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (a, b)$ とおくと定理 2.11 から $|\mathcal{A}^H| \leq a \leq b$ と仮定してよい. $\theta \in D_H(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}^H, m^H)$ を思い出せば, 次数の関係から $\pi^H(\theta) = 0$ でなければならないが, $\pi^H(\theta) = \rho(\theta) \neq 0$ よりこれは矛盾. □

予想 1.5 の証明. $|\mathcal{A}| = n,\ |\mathcal{A}_X| = m$ として, $m - n$ と m の大小により場合分けする. $m - n < m$ の場合は簡単なので読者に任せよう. 直感的にはこの場合はモジュラー点を通る直線が多いため, 通らない直線とたくさん交わり二重点を作る. もちろんこれらのうちいくつかはモジュラー点を通らない直線同士の交わりとして二重点ではなくなるが, そういった直線が少ないため, $|\mathcal{A}|/2$ より多い数の二重点を作るに困らないだけの二重点が構成されるという感じとなる.

よって $m - n \geq m$ とする. このとき $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X$ をもってくると, それは $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X$ の H 以外の $n - m - 1$ 個の元と異なる点で交わるが, それは超可解配置の定義から, 必ず $\mathcal{A}_X$ のある元でカバーされており二重点ではない. また $\mathcal{A} \setminus \{H\}$ も定義から超可解配置なので自由, よって定理 1.6 か

ら H 上には二重点 p_H がある．超可解配置の定義からこれは H と $\mathcal{A}_X$ の元との交点であるから, p_H は $H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X$ ごとに異なる点である．よって二重点は $m - n$ 個以上あり, 仮定からこれは $|\mathcal{A}|/2$ より大きい． $\square$

4　今後の展望

このように代数的な性質である自由性が二重点の存在問題と関連することが分かった．上述の状況から, 以下の予想を提示するのは自然である：

予想 4.1 ([1])
$\mathcal{A}$ が $\mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中の二重点を持たない直線配置ならば自由配置となる．

これまで見つかっている二重点を持たない複素直線配置, いわゆる Sylvester-Gallai 配置は（そもそもほとんど数がないが）すべて自由である．故に自由でないならば二重点を持つという予想 4.1 は, 代数・代数幾何的視点から見た複素版の Sylvester-Gallai 定理といえるのでは, と期待している．また同様に, $\ell \geq 4$ のとき $X \in L_2(\mathcal{A})$ で $|\mathcal{A}_X| = 2$ たる X を二重点的なものと見なした場合の高次元版 Sylvester-Gallai の定式化や, $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ $(n \geq 3)$ 中の直線配置の二重点と, これらに対応する対数的ベクトル場の関係（余次元が高い場合にも存在する）といった研究の方向もあると考えている．

参考文献

[1] T. Abe, Double points of free projective line arrangements, *Int. Math. Res. Not.* **2022** (3), 1811–1824.

[2] T. Abe, Projective dimensions of hyperplane arrangements. arXiv:2009:04101 (2020).

[3] T. Abe, Generalization of the addition and restriction theorems from free arrangements to the class of projective dimension one. arXiv:2206.15059 (2022).

[4] T. Abe and G. Denham, Deletion-Restriction for Logarithmic Forms on Multiarrangements. arXiv:2203.04816 (2022).

[5] T. Abe and M. Yoshinaga, Splitting criterion for reflexive sheaves, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), 1887–1891.

[6] B. Anzis and S. O. Tohaneanu, On the geometry of real and complex supersolvable line arrangements, *J. Combin. Theory, Ser. A* **140** (2016), 76–96.

[7] T. Gallai, Solution to problem number 4065. *Amer. Math. Monthly* **51** (1944): 169–171.

[8] B. Green and T. Tao, On sets defining few ordinary lines, *Discrete Comput. Geom.* **50** (2013), 409–468.

[9] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.* **56** (1980), 167–189.

[10] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **27** (1980), 265–291.

[12] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. math.* **63** (1981), 159–179.

[13] M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and related topics. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, **23** (2014), no. 2, 483–512.

[14] G. M. Ziegler, Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.