Moduli of logarithmic abelian varieties with PEL structure

Chikara Nakayama

Abstract

This is a joint work with T. Kajiwara and K. Kato. We construct the fine moduli space of log abelian varieties with PEL structure, which gives a toroidal compactification of the moduli space of abelian varieties with PEL structure.

Contents

0. Introduction – moduli の compact 化と log 幾何

log 幾何ではいろいろな数学的概念 A についてその log 版（log A）を考えることができる. A は log A ともみなせるので, A の moduli を {A} で表すことにすると

$$\{\mathrm{A}\} \subset \{\log \mathrm{A}\} \tag{0.1}$$

となる. 従って {log A} が compact になっていれば {log A} で {A} を compact 化できたことになる.

log A の moduli がいくつかの A に対して実際に構成されている: A=HS, MHS, G-MHS, Drinfeld module（[KU], [KNU3], [KNU5], [FKS]. ただし G は代数群). （以下報告の最後まで数学的には不正確, 例えばここで HS は PHS の方が正確である.）

例えば A=HS のときは (0.1) は

$$\text{Griffiths domain} = \{\mathrm{HS}\} \subset \{\log\ \mathrm{HS}\} = \text{Kato–Usui compactification}$$

であり, A=MHS のときは

$$\text{Griffiths–Usui domain} = \{\mathrm{MHS}\} \subset \{\log\ \mathrm{MHS}\},$$

A=G-MHS のときは

$$\text{Mumford–Tate domain} = \{G\text{-MHS}\} \subset \{\log\ G\text{-MHS}\}$$

である.

今日の主題はA=abel 多様体, abel 多様体 with PEL structure の場合である（P=polarization, E=endomorphism, L=level structure）.

abel 多様体の moduli の compact 化には長い歴史がある.

{abel 多様体 } の compact 化：Namikawa [Nm], Faltings–Chai [FC], Nakamura [Nk], Alexeev [A], Olsson [O], ...

{abel 多様体 with PEL structure} の compact 化: Fujiwara [F], Lan [L], ...

今日の文献は以下の二つである.

[la7] Logarithmic abelian varieties, part VII: Moduli, Yokohama MJ, 2021. log abel 多様体の定義から始まる 7 部作の最後の part であり A=abel 多様体の場合を扱っている. 1 節で解説する.

[lapel]（title はこの報告の title と同じ）preprint, A=abel 多様体 with PEL structure の場合を扱っている. 2 節で解説する.

なおこれらは [F] に近く, [F] を log 幾何を用いて理解したものとみなすこともできる.

1 Moduli of logarithmic abelian varieties

1 節では係数（endomorphism）なしの場合（A=abel 多様体の場合）を解説する. これは [la7] の内容である.

まず退化なしの場合を復習する. $n \geq 3$ とする.

Proposition 1. $\mathbb{Z}[1/n]$ 上の *moduli problem* {g-次元 *principally polarized abelian variety* + *level* n *structure*} は *smooth* な *algebraic space* で表現可能である.

level n structure の定義も復習しておく. A を g 次元 abelian scheme としたとき同型 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \cong \mathrm{Ker}(n\colon A \to A)$ を level n structure というのであった. （等分点の層は étale site 上 locally constant であった.）

Proof. この命題の一つの証明は Artin criterion をチェックすることであった. □

次に退化ありの場合を考える.

Introduction で解説した方針で log 幾何を用いる.

log abel 多様体が定義される. log abel 多様体とはどのようなものかを簡単に説明する. log abel 多様体は abel 多様体が退化したものであるが, log smooth なだけではなく proper かつ群 object になっているのが特長である. 退化したものをどう定義するにしても, proper であることと群構造が入ることとは普通は両立しない. proper model には普通群構造は入らないし, Néron model のように群構造を持たせようとすれば proper ではなくなる. しかし log abel 多様体では proper であることと群構造を持つこととが両立している. 定義の気持ちを述べる: まず普通に proper model を取ると log smooth にはなるが群構造が入らない. それを blow down する. blow down 射は scheme としては単射ではないが, log scheme としては monomorphism であることが point である. これは monoid の方では例えば $\mathbb{N}^2 = \langle x, y\rangle \to \langle x/y, y\rangle = \mathbb{N}^2$ が epimorphism であることに対応してい

る. そこで proper model のいろいろな log blow down の極限 (union) を取ると最早関手でしかないが群構造が入る. log abel 多様体とはだいたいそのようなものである. log blow down の極限は scheme としては次元も落ち, 意味のないものになるので, log scheme の圏でないと捉えられない. log abel 多様体に関し, abel 多様体に関する諸理論に並行的な諸理論があると考えられている（全部できているわけではない）.

log abel 多様体の moduli problem を考えるためにいくつか data を固定する.

W: finitely generated free abelian group of rank g.

Σ: $\{W$ 上の対称 2 次形式$\}$ の fan で $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(W)$-stable で orbit は有限で台が半正値 2 次形式の集合と一致しているもの. ([FC] の設定と同じだが smooth fan でなくてもよい. この点も少し一般化されている.)

Theorem 1. *log moduli problem* $\{g$-*次元 principally polarized log abelian variety* + *level* n *structure, local monodromy* が Σ に入る$\}$ は *proper log smooth* な *algebraic space with fs log structure* で表現可能（*fine moduli*）である. 表現空間の *underlying algebraic space* が（Σ が *smooth* の場合）*Faltings–Chai* の *space* で *log structure* は無限遠の *divisor*（*Proposition* 1 の *space* の補集合）で決まる.

ここで level n structure は log のない場合と全く並行的に, 同型 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \cong \mathrm{Ker}(n : A \to A)$ として定義される. log abel 多様体の等分点の層も log étale site 上 locally constant なのである.

注. monodromy の条件をはずして $\{g$-次元 principally polarized log abelian variety + level n structure$\}$ だと proper log smooth な log algebraic space in the 2nd sense というものになる. その定義は proper log smooth な algebraic space with fs log structure で log étale cover されているというものである. log abel 多様体自体も log algebaric space in the 2nd sense であり, 上記の空間と Theorem 1 の空間とは, log abel 多様体とその部分である所の proper model のような関係になっている.

Theorem 1 の statement で $A/S/\mathbb{Z}[1/n]$ の local monodromy が Σ に入るとは, X を A の semiabelian part の torus part の character group のなす constructible sheaf とし, Y を dual log abel 多様体のそれとしたとき, canonical pairing $X \times Y \to M_S^{\mathrm{gp}}/\mathcal{O}_S^{\times}$ があるが, S 上 strict étale local に $f\colon W \to Y$ があって次を満たすということである: 任意の S の幾何的点 s に対し, Σ の cone σ があり, 任意の準同型 $h\colon (M_S/\mathcal{O}_S^{\times})_s \to \mathbb{N}$ に対し, $W \times W \to Y_s \times Y_s \xrightarrow{\text{polarization}} X_s \times Y_s \to (M_S^{\mathrm{gp}}/\mathcal{O}_S^{\times})_s \xrightarrow{h^{\mathrm{gp}}} \mathbb{Z}$ が σ に含まれている.

Proof. ([la7] のあとに改良された証明で [lapel] に書かれている.) Proposition 1 と同様に log Artin criterion をチェックすればよい. □

[FC] の証明は local に作りそれを貼り合わせる（2-step construction）ので難しい. こちらは fine moduli だから最初から貼り合っている.

2 Moduli of logarithmic abelian varieties with PEL structure

2 節では係数ありの場合に進む. これは [lapel] の内容である.

まず退化なしの場合を復習する.

Proposition 2. *{g-次元 polarized abelian variety + endomorphism + level structure} は smooth な algebraic space で表現可能である.*

この moduli problem のもう少し詳しい定義は次の通りである.
B: $\mathbb{Q}$ 上の有限次元 semisimple algebra, positive involution 付き
$\mathcal{O} \subset B$: order
を固定する. このときこの moduli problem は 4 つ組
$(A/S, \iota, p, \eta)$
の同型類の集合として定義される. ここに,
A/S: S 上の g-次元 abelian scheme
ι: 係数 $\mathcal{O} \to \mathrm{End}(A)$; determinant condition を満たす.
p: polarization $A \to A^*$; $\mathcal{O}$ の作用と可換.
η: level structure; $\mathcal{O}$ の作用, polarization, Weil pairing と可換.

Proof. 一つの証明は以下の通り. Proposition 1 に帰着させる. 係数なしの moduli（Proposition 1 の space）に係数 ι を忘れることで射があって, それが relative に表現可能というのは $\mathcal{E}nd(A)$ の表現可能性からわかる (cf. [GN]). □

退化ありの場合に以上を log 化する.
Σ: compatible family of complete fans
を固定する. 実質 Lan の data と同じだが smooth でなくてもよいなど多少一般化されている.

Theorem 2. *{g-次元 polarized log abelian variety + endomorphism + level structure, local monodromy が Σ に入る } は proper log smooth な algebraic space with fs log structure で表現可能（fine moduli）である. 表現空間の underlying algebraic space が（Σ が smooth など [L] の条件を満たす場合）Lan の space で log structure は無限遠の divisor（Proposition 2 の space の補集合）で決まる.*

もう少し詳しくは退化なしの場合と並行的に 4 つ組
$(A/S, \iota, p, \eta)$
の同型類の集合として定義される. ここに,
A/S: S 上の g-次元 log abel 多様体
ι: 係数 $\mathcal{O} \to \mathrm{End}(A)$; determinant condition を満たす.
p: polarization $A \to \mathcal{E}xt(A, \mathbb{G}_{m,\log})$ （$\mathbb{G}_{m,\log}$ は $T \mapsto \Gamma(T, M_T^{\mathrm{gp}})$ のことである. 一般の A に対する dual の 理論が未完成であるため, target を A^* と書けない. それが確立したときには $A^* \subset \mathcal{E}xt(A, \mathbb{G}_{m,\log})$ となるはずである.); $\mathcal{O}$ の作用と可換.
η: level structure; $\mathcal{O}$ の作用, polarization, Weil pairing と可換.
注. monodromy の条件をはずして {g-次元 polarized log abelian variety + endomorphism + level structure} だと proper log smooth な log algebraic space in the 2nd sense になる.

Proof. Theorem 1 に帰着させる. 係数なしの moduli（Theorem 1 の space）に係数 ι を忘れることで射があって, それが relative に表現可能というのは $\mathcal{E}nd(A)$ の表現可能性からわかる. その表現可能性も log Artin criterion でチェックできる. $\mathcal{E}nd(A)$ は unramified なので Theorem 1 の証明よりむしろ簡単である. □

[L] の証明は local に作りそれを貼り合わせるので [FC] より更に複雑で難しい. こちらは fine moduli だから最初から貼り合っている.

謝辞. 講演の機会を与えて下さった 2022 年度城崎代数幾何学シンポジウム世話人の先生方に感謝する. 長年の共同研究者に感謝する. 聖書の神に感謝する.

References

[A] V. Alexeev, Complete moduli in the presence of semiabelian group action, Ann. of Math. (2) 155 (2002), No.3, 611–708.

[F] K. Fujiwara, Arithmetic compactifications of Shimura varieties (I), preprint, 1990.

[FC] G. Faltings and C. Chai, Degeneration of abelian varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge·Band 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[FKS] T. Fukaya, K. Kato, and R. Sharifi, Toroidal compactifications of the moduli spaces of Drinfeld modules, I, preprint.

[GN] A. Genestier and B. C. Ngô, Lectures on Shimura varieties, Panoramas et synthèses-Société mathématique de France, 29 (2009), 187–236.

[KNU3] K. Kato, C. Nakayama, and S. Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits, J. Algebraic Geometry 22 (2013), 671–772.

[KNU5] K. Kato, C. Nakayama, and S. Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, V: Extended period domains and algebraic groups, preprint.

[KU] K. Kato, and S. Usui, Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures, Ann. Math. Studies 169, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009.

[L] K.-W. Lan, Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties, London Math. Soc. Monogr. Ser. 36, Princeton University Press, 2013.

[la7] T. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part VII: Moduli, Yokohama Math. J. 67 (2021), 9–48.

[lapel] T. Kajiwara, K. Kato, and C. Nakayama, Moduli of logarithmic abelian varieties with PEL structure, preprint.

[Nk] I. Nakamura, Stability of degenerate abelian varieties, Invent. Math. 136 (1999), 659–715.

[Nm] Y. Namikawa, A new compactification of the Siegel space and degeneration of Abelian varieties, I., Math. Ann. 221 (1976), No.2, 97–141; II., ibid. No.3, 201–241.

[O] M. C. Olsson, Compactifying moduli spaces for abelian varieties, Lecture Notes in Math., Vol.1958, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Chikara Nakayama
Department of Economics
Hitotsubashi University
2-1 Naka, Kunitachi, Tokyo 186-8601
Japan
c.nakayama@r.hit-u.ac.jp