トロピカル平面曲線の交わりに関する実現問題

助永 真之

広島大学 先進理工 D2

2022 年 10 月 19 日

トロピカル平面曲線

トロピカル代数

$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上に加法と乗法を次で定めたものをトロピカル代数という.

- (加法) $x \oplus y := \max(x, y)$
- (乗法) $x \odot y := x + y$ (通常の和)

トロピカル多項式

2 変数トロピカル多項式とは次の形の有限和:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j \ \ ((i,j) \in \mathbb{Z}^2, c_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ 現れない項: } c_{ij} = -\infty).$$

$\rightsquigarrow$ 次のように関数を定める:

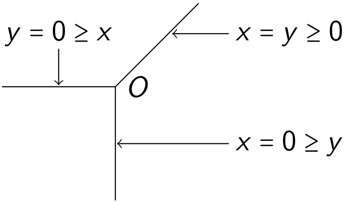
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ & (s,t) & \mapsto & \max(c_{ij} + is + jt). \end{array}$$

トロピカル平面曲線

トロピカル多項式 $\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ の定めるトロピカル平面曲線とは

$$V_{\text{trop}}(\mathcal{F}) := \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists (k,l),(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \ ((k,l) \neq (m,n)) \text{ s.t.} \\ c_{kl} + ks + lt = c_{mn} + ms + nt = \mathcal{F}(s,t) \end{array} \right\}.$$

例：$\mathcal{F} = x \oplus y \oplus 0$ のとき.



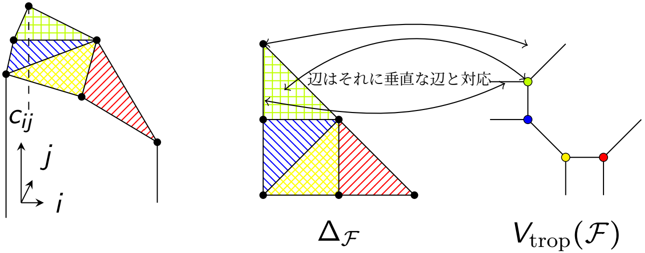
$V_{\text{trop}}(\mathcal{F})$

トロピカル平面曲線

双対定理

$\mathcal{F} = \bigoplus_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ の係数から定まる 2 次元複体 $\Delta_{\mathcal{F}}$ と $V_{\mathrm{trop}}(\mathcal{F})$ は双対.

例：$\mathcal{F} = x^2 \oplus 4xy \oplus 4y^2 \oplus 2x \oplus 4y \oplus 3.$



実現問題

k: 非自明な付値を持つ代数閉体.

トロピカル化

- 点のトロピカル化: $\begin{array}{rcl} \mathrm{trop}\colon (k^*)^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-\mathrm{val}(x), -\mathrm{val}(y)). \end{array}$
- 多項式のトロピカル化:
$$k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \ni f = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j \quad \mapsto \quad \bigoplus_{i,j} (-\mathrm{val}(c_{ij})) x^i y^j =: \mathrm{trop}(f).$$

- $\mathrm{Trop}(V(f)) := \overline{\mathrm{trop}(V(f))} = V_{\mathrm{trop}}(\mathrm{trop}(f))$.
- 実現問題: トロピカルな対象 Γ に対し, 代数多様体 (+条件) X で $\mathrm{Trop}(X) = \Gamma$ となるようなものが存在するか.

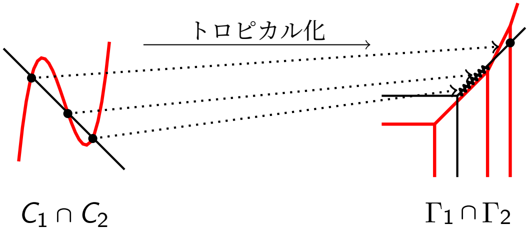
実現問題

- <u>トロピカル平面曲線 Γ_1, Γ_2 の交わりの実現問題</u>:

  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ のどのような「因子」が $\mathrm{trop}(C_1 \cap C_2)$ として表されるか.

  ただし, $\mathrm{Trop}(C_i) = \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$.

例：右図の交わりの中から 3 点を選んだとき,
左図の交点のトロピカル化になっているか？



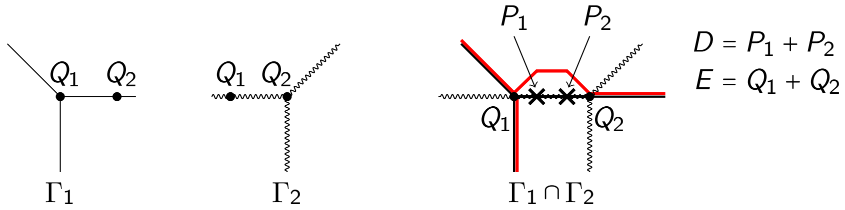
実現問題

定理 [Morrison15] (必要条件)

Γ_1, Γ_2 : トロピカル平面曲線, D : 成分を値群に持つ点の形式和,
E : Γ_1, Γ_2 の安定交叉因子とする.
代数曲線 $C_1, C_2 \in (k^*)^2$ が存在し, 次を満たすとする:

- $\mathrm{Trop}(C_i) = \Gamma_i \ (i = 1, 2)$,
- $\mathrm{trop}(C_1 \cap C_2) = D$.

このとき, Γ_1 上のトロピカル有理関数 ψ が存在して, $(\psi) = D - E$, $\mathrm{Supp}(\psi) \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ を満たす (下図では赤線が ψ).



★ 逆は成り立たない. どのような条件を加えれば実現可能か.

主定理の条件

$\mathrm{Trop}(V(f)) = \Gamma_1$ となる $f \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を固定し，
$\mathrm{Trop}(V(g)) = \Gamma_2$ となる $g \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を動かして D の実現を考える．

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ の連結成分の内，

・交叉重複度が 1 の半直線全体からなる集合を $\mathcal{R}_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$，
・交叉重複度が 2 の線分全体からなる集合を $\mathcal{LS}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$ と書く．

$\mathcal{L}'_{\mathrm{s}} \subset \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \mathcal{R}_1(\Gamma_1, \Gamma_2) \cup \mathcal{LS}_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$ とし，次の 2 つの条件を仮定:

条件 1 (Morrison の条件)

D は成分を値群に持つ点の形式和，E は Γ_1, Γ_2 の安定交叉因子であり，Γ_1 上のトロピカル有理関数 ψ で次を満たすものが存在する:

$$(\psi) = D - E, \quad \mathrm{Supp}(\psi) \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

また，$\mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$ に含まれる各半直線 L に対して，$D|_L$ は 1 点からなる．

条件 2 は次ページ．

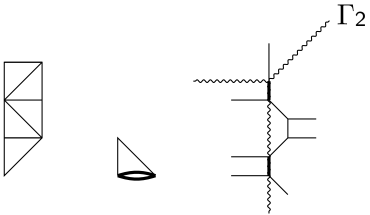
主定理の条件

条件 2 ($\mathcal{L}'_{\mathrm{s}} \subset \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ に関する非輪状性)

$\mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$ の元に対応する $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ の辺に印をつけたとき, 印に重複はなく, また, 印のついた辺の和からなるグラフは forest.

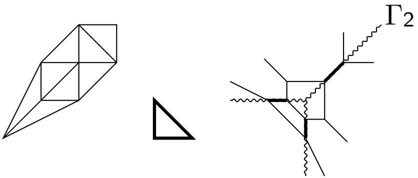
★ 条件 2 を満たさない例.

- $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ の印に重複がある例



$\Delta_{\mathrm{trop}(f)}$ $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ $\mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$

- $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ の印の和が forest でない例



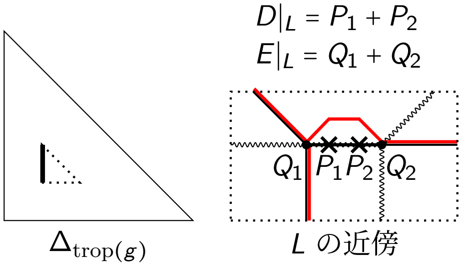
$\Delta_{\mathrm{trop}(f)}$ $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ $\mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$

主定理 (の一つ)

$f, g \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, $\mathrm{Trop}(V(f)) = \Gamma_1$, $\mathrm{Trop}(V(g)) = \Gamma_2$ とする.
D は条件 1 を満たすとし, $(\psi) = D - E$ とする. 条件 2 も仮定する.
各 $L \in \mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$ に対し, $\mathrm{dist}(D|_L, E|_L)$ は十分小とする.
このとき, ある $g' \in k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ が存在して次が成立:

$$\mathrm{trop}(g') = \mathrm{trop}(g),$$
$$\mathrm{trop}(V(f, g'))|_L = D|_L \ (\forall L \in \mathcal{L}'_{\mathrm{s}}).$$

印に重複はなく, 印の和は forest. $\longrightarrow$



証明の鍵となる命題

<u>仮定</u> $\Gamma_1 = \mathrm{Trop}(V(f))$, $\Gamma_2 = \mathrm{Trop}(V(g))$, $L \in \mathcal{L}_{\mathrm{s}}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, $g := \sum_{ij} d_{ij} x^i y^j$.

命題

$G \in (f, g)$ で $\mathrm{Trop}(V(G)) \cap L$ が有限個の点になるようなものを求めるアルゴリズムが存在する．このとき,$\mathrm{trop}(V(f, g)) \cap L = \mathrm{Trop}(V(G)) \cap L$.

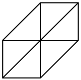
命題

D は条件 1 を満たすとする．L に対応する $\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$ の辺を $\overline{\mathbf{ij}}$ とする．
このとき, ある $d_{\mathbf{i}}' \in k$ が存在して $g' := g - d_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} + d_{\mathbf{i}}' \mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ が次を満たす:

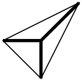
$$\mathrm{trop}(g') = \mathrm{trop}(g),$$

$$\mathrm{trop}(V(f, g'))|_L = D|_L.$$

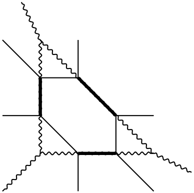
条件 2 を満たす例



$\Delta_{\mathrm{trop}(f)}$



$\Delta_{\mathrm{trop}(g)}$



$\mathcal{L}'_{\mathrm{s}}$