高次元 del Pezzo 多様体上の有理曲線

岡村 郁弥 (**Fumiya OKAMURA**)

名古屋大学多元数理科学研究科

Oct 19, 2022

Del Pezzo Manifolds

k : 標数 0 の代数的閉体
X : (滑らかな)Fano 多様体 $/k$, i.e., $-K_X$ は豊富因子

定義 1

Fano 多様体 X が del Pezzo 多様体である
$:\Leftrightarrow \exists H$ 豊富因子 s.t. $-K_X = (\dim(X) - 1)H$.

X : n 次元 del Pezzo 多様体, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\Longrightarrow$ $1 \leq H^n \leq 5$ で, 以下のいずれかを満たす:

- $H^n = 1$, $X \subset \mathbb{P}(1^n, 2, 3)$ は 6 次超曲面,
- $H^n = 2$, $X \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, 2)$ は 4 次超曲面,
- $H^n = 3$, $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ は 3 次超曲面,
- $H^n = 4$, $X \subset \mathbb{P}^{n+2}$ は 2 次超曲面の完全交叉,
- $H^n = 5$, $X \subset \mathbb{P}^{n+3}$ は Grassmann 多様体 $\mathbb{G}(1, 4)$ の射影部分空間による切断.

Bend and Break

有理曲線 : $\mathbb{P}^1$ と双有理同値な完備曲線

定理 2 (Bend and Break (Mori, 79))

$\boldsymbol{X}$: *Fano* 多様体, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$
$\Longrightarrow\ \exists \boldsymbol{C} \ni \boldsymbol{x}$: 有理曲線 *s.t.* $-\boldsymbol{K_X} \cdot \boldsymbol{C} \leq \mathbf{dim}(\boldsymbol{X}) + \mathbf{1}$.

例 3

$\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{n}$ 次元 del Pezzo 多様体, $\boldsymbol{n} \geq 4$, $\mathbf{Pic}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{Z}\boldsymbol{H}$

$$-\boldsymbol{K_X} \cdot \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{C} \leq \frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} < \mathbf{2} \quad (\because \boldsymbol{n} \geq 4)$$

$\mathbf{Hom}(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$, $(\forall \boldsymbol{d} \geq 1)$ の既約性や次元に興味がある.

Main Theorem

定理 4

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\Longrightarrow$ $\forall d \geq 1$, *Kontsevich* 空間 $\overline{M}_{0,0}(X, d)$ は既約,
$\dim \overline{M}_{0,0}(X, d) = (n-1)d + n - 3$.

既約成分の個数についての諸結果:

- Fano 超曲面 ([Coskun-Starr, 09], etc.)
- 等質多様体 ([Thomsen, 98], [Kim-Pandharipande,01])
- トーリック多様体 ([Bourqui, 12], [Bourqui, 16])
- del Pezzo 曲面 ([Testa, 05], [Testa, 09], etc.)
- 3 次元 Fano 多様体 ([Lehmann-Tanimoto, 19], etc.)
- del Pezzo 束 ([Lehmann-Tanimoto, 21], etc.)

など

Fujita Invariant

定義 5

X : 滑らかな射影多様体, L : ネフかつ巨大な $\mathbb{Q}$ 因子.
藤田不変量 (または, a 不変量) とは

$$a(X, L) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid K_X + tL \in \overline{\mathrm{Eff}}^1(X)\}$$

a は双有理不変量　$\therefore$ X が特異的なときも定義できる.

例 6

X: del Pezzo 多様体, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\Longrightarrow$ $a(X, H) = \dim(X) - 1$

例 7 (Lehmann-Tanimoto, 19)

X : 滑らかな射影多様体, L : ネフかつ巨大な因子
$\Longrightarrow$ $a(X, L) \leq \dim(X) + 1$

Dominant Components

補題 8

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\nexists Y \subset X$ *s.t.* $a(Y, H) > a(X, H)$.

$(\because)$ $n = 3$ に帰着させて (Lehmann-Tanimoto-Tschinkel, 18) を適用. $\square$

系 9

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$d \geq 1$, $M \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X, d)$: 既約成分
$\Longrightarrow$ 評価写像 $s \colon \mathbb{P}^1 \times M \to X$ は支配的.

$(\because)$ $Y \subsetneq X$: s の像とすると, (Lehmann-Tanimoto, 19) より $a(Y, H) > a(X, H)$, 補題 8 に矛盾. $\square$

Base Case

定理 10

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\mathrm{ev}\colon \overline{M}_{0,1}(X,1) \to X$: 評価写像. このとき,
(1) ev の一般ファイバーは既約,
(2) $\exists S \subset X$: 有限集合 *s.t.*

- $x \notin S \implies \dim(\mathrm{ev}^{-1}(x)) = n-3$
- $x \in S \implies \dim(\mathrm{ev}^{-1}(x)) \leq n-2$

特に, $\overline{M}_{0,0}(X,1)$ は既約, $\dim = 2n-4$.

(証明) (1) は省略
(2) の証明の概略 : $H^n = 1$ の場合

Base Case

$X = V(z^2 + y^3 + F_4 y + F_6) \subset \mathbb{P}(1^n, 2, 3)$: 6 次超曲面
$\exists f \colon X \to \mathbb{P} := \mathbb{P}(1^n, 2)$: 二重被覆

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\cong"] & \\
\mathbb{P} \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & Y \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "g|_Y"] & R \arrow[d] \\
& \mathbb{P}^{n-1} \arrow[r, phantom, "\supset"] & B
\end{tikzcd}
$$

ここで,
$Z := V(z) \subset X, \quad Y := V(y^3 + F_4 y + F_6) \subset \mathbb{P},$
$R := V(3y^2 + F_4) \cap Y \subset Y, \quad B := V(4F_4^3 + 27F_6^2) \subset \mathbb{P}^{n-1}$
$v := (0 : \cdots : 0 : 1) \in \mathbb{P}$: 特異点

Base Case

$\iota : X \to X$: 対合 s.t.
$(x_0 : \cdots : x_{n-1} : y : z) \mapsto (x_0 : \cdots : x_{n-1} : y : -z)$

$\ell \subset X$: 直線, $\alpha := f_*\ell$
(1) $\deg f|_\ell = 1$ のとき,

- $v \notin \alpha$,
- α は Y に tritangent するか, $\alpha \subset Y$,
- $f^{-1}(\alpha) = \ell \cup \iota(\ell)$.

(2) $\deg f|_\ell = 2$ のとき,

- $\alpha = 2\beta$: double line, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \cdot \beta = 1/2$,
- $v \in \beta$,
- β は Y に接する.

Base Case

$\exists \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{X}$: 既約かつ閉な曲線 s.t. $\dim \mathrm{ev}^{-1}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{n} - 2$
$(\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{C})$ を仮定.
$\boldsymbol{D_p} \subset \boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{p}$ を通る直線たちが覆う被約因子

主張 1

$\forall$ 既約成分 $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{D_p}$: 点 $\boldsymbol{p}$ で特異的.

(証明略) (補題 8 を用いる.)

主張 2

$\exists \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{X}$: 被約因子 *s.t.* $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{D_p} \quad (\forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{C})$
$\boldsymbol{D^C} := \bigcap_{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{C}} \boldsymbol{D_p}$ とする.

(証明略)

$\therefore \forall \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{D^C}$: 既約成分は $\boldsymbol{C}$ に沿って特異的.

Base Case

$f(C) \subset g^{-1}(B) \cup Y$ とする.
$\implies \exists p \in C$ s.t. $f(p) \in R$.
$f(D_p) \subset \gamma(f(p)) := V(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(f(p))x_i)$: "接平面"
$\therefore D^C = D_p = f^{-1}(\gamma(f(p))) \in |H|$

補題 11

$\forall D \in |H|$ は孤立特異点のみ持つ.

$(\because)$ ヤコビ行列

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial y} & 2z \end{pmatrix}$$

を調べればよい. □

補題 11 は主張 1 に矛盾.

Base Case

$f(C) \not\subset g^{-1}(B) \cup Y$ とする.
$\forall D \subset D^C$: 既約成分, $\forall \ell \subset D$: 直線, 以下が成立:

- $v \notin f(D), \quad \therefore D \neq \iota(D)$,
- $D \cap \iota(D) \subset Z$,
- $D \cdot \ell = \iota(D) \cdot \ell = 3$.

補題 12

$\forall D \in |3H|, D \neq \iota(D) \implies D$ は孤立特異点のみ持つ.

$(\because)$ $D = V(z + P) \cap X$ と書ける.

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial P}{\partial y} & 1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F}{\partial y} & 2z \end{pmatrix}$$

を調べればよい. □

補題 12 は主張 1 に矛盾. □

Movable Bend and Break

帰納法のパートは [Coskun-Starr, 09], [Lehmann-Tanimoto, 19] に従う.

補題 13

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\mathrm{ev}_d\colon \overline{M}_{0,1}(X, d) \to X$: 評価写像 ($d \geq 1$)
$S \subset X$: 上の定理の有限集合. このとき

- $x \notin S \implies \dim(\mathrm{ev}_d^{-1}(x)) = (n-1)d - 2$
- $x \in S \implies \dim(\mathrm{ev}_d^{-1}(x)) \leq (n-1)d - 1$

さらに, $\forall$ 既約成分 $M \subset \overline{M}_{0,0}(X, d)$ の一般メンバーは自由.

定理 14 (Movable Bend and Break)

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, $d > 1$
$\implies$ 次数 d の自由曲線は, 長さ d の自由直線の鎖に変形できる.

Proof of Main Theorem

定理 15

X : n 次元 *del Pezzo* 多様体, $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$
$\Longrightarrow$ $\forall d \geq 1$, $\overline{M}_{0,0}(X,d)$ は既約,
$\dim \overline{M}_{0,0}(X,d) = (n-1)d + n - 3$.

(証明)

補題 13 より $\forall$ 既約成分 $M \subset \overline{M}_{0,0}(X,d)$ は自由曲線を含む.
定理 14 (MBB) より M は,

$$\Delta := \{\text{長さ } d \text{ の自由直線の鎖}\} \subset \overline{M}_{0,0}(X,d)$$

と交わる.
定理 10 より, Δ : 既約
Δ は滑らかなので, $\exists! M \supset \Delta$: 既約成分
$\therefore M = \overline{M}_{0,0}(X,d)$: 既約 $\square$