標数 2 の D_4^1 型特異曲面のジェットスキームの特異点上のファイバー

是枝由統

広島大学

2022 年 10 月 19 日

概要

k：任意標数の代数閉体

S	: 原点に有理 2 重点をもつ曲面
S_m	:「m 次ジェットスキーム」$(m > 0)$
$\pi_m : S_m \to S$	:「切り詰め射」

標数 0 の場合、$m \gg 0$ で次の 1 対 1 対応が知られている (Mourtada)：

$$\text{最小特異点解消の例外曲線 } C_i \leftrightarrow \pi_m^{-1}(0) \text{ の既約成分 } Z_i$$

さらに A_n-、D_4-型の有理 2 重点について、$i \neq j$ に対し

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \Leftrightarrow Z_m^i \cap Z_m^j \text{が包含関係で極大}$$

(K. "On the configuration of the singular fibers of jet schemes of rational double points", Comm. Algebra 50 (2022), no. 4, 1802–1820.)

概要

正標数の場合に同様のことが成り立つか？

$\rightarrow$ 標数 2 の場合に次のような結果が得られた。

主結果

特異点解消グラフが D_4 型になる有理 2 重点について

1、 $\pi_m^{-1}(0)$ は 4 つの既約成分に分解される。

2、 「2 つの既約成分の共通部分」が極大 $\Leftrightarrow$ 対応する例外曲線が交わる

標数 2 の場合、特異点解消グラフが D_4 型となる有理 2 重点は 2 種類ある。

$$
\begin{aligned}
D_4^0 &: f = x^2 + y^2 z + yz^2 = 0, \\
D_4^1 &: g = x^2 + y^2 z + yz^2 + xyz = 0
\end{aligned}
$$

今回の発表

$\rightsquigarrow$ D_4^1 型の特異点上のファイバーの既約成分について詳しく見る

準備：ジェットスキームの定義

$$\begin{aligned}\mathbf{Sch}/k &: k \text{ 上のスキームの圏} \\ \mathbf{Set} &: \text{集合の圏} \\ S \in \mathbf{Sch}/k &: k \text{ 上有限型のスキーム}\end{aligned}$$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$F_m^S : \mathbf{Sch}/k \to \mathbf{Set}; Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \times \mathrm{Spec}\ k[t]/\langle t^{m+1} \rangle, S)$$

は k 上有限型のスキーム S_m により表現される表現可能函手である。

定義 (ジェットスキーム)

函手 F_m^S を表現する S_m を S の m 次ジェットスキームという。

準備：ジェットスキームの記述

$S = \mathbf{V}(g) \subset \mathbb{A}_k^3$ $(g = x^2 + y^2 z + yz^2 + xyz)$
このとき、$m (\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 次ジェットスキームは次のように記述できる。

$\mathbf{x} = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_m t^m$、$\mathbf{y} = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_m t^m$、
$\mathbf{z} = z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + \cdots + z_m t^m$ とする。

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv g^{(0)} + g^{(1)} t + g^{(2)} t^2 + \cdots + g^{(m)} t^m \mod t^{m+1}$$

$(g^{(0)}, \ldots, g^{(m)} \in k[x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_m, z_0, \ldots, z_m])$ と表す。このとき
S_m は $(\mathbb{A}^3)_m \cong \mathbb{A}_k^{3(m+1)}$ 内で

$$\langle g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(m)} \rangle$$

で定められる部分スキームである。

$\rightsquigarrow$ 今回は標数 2 より、$\mathbf{x}^2 = x_0^2 + x_1^2 t^2 + x_2^2 t^4 + \cdots + x_m^2 t^{2m}$ などとなる。

特異点上の既約成分

$S = \mathbf{V}(g) \subset \mathbb{A}^3_k$: 原点に D^1_4 型の特異点をもつ曲面

定義 (特異ファイバー)

$(\mathbb{A}^3_k)_m \cong \mathbb{A}^{3(m+1)}_k$ 内でイデアル

$$\langle x_0, y_0, z_0, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle$$

で定義される部分集合を特異ファイバーといい、S^0_m で表す。

特異ファイバーの既約成分について次のことが得られた。

主結果 1

$m \geq 5$ のとき特異ファイバー S^0_m は 4 つの既約成分に分解される。また、既約成分の $(\mathbb{A}^3)_m$ 内での余次元は $m+2$ である。

特に $I^0_m := \langle x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle$ とおくとき
$Z^0_m := \mathbf{V}(I^0_m)$ は S^0_m の既約成分である。

主結果 1 の概要

$I_m^0 := \langle x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1, g^{(0)}, \dots, g^{(m)} \rangle,\ Z_m^0 := \mathbf{V}(I_m^0)$

証明の概要

$$Z_m^0 = \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(y_2)} \cup \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(z_2)} \cup (Z_m^0 \cap \mathbf{V}(y_2, z_2)) \subset (\mathbb{A}^3)_m = \mathbb{A}^{3(m+1)}$$

と考える。

$$\overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(y_2)} = \overline{Z_m^0 \cap \mathbf{D}(z_2)}: \text{ 既約かつ余次元が } m+2 \text{ であり、}$$
$$I_m^0: \ m+2 \text{ コの元で生成される。}$$

$\rightsquigarrow$ $Z_m^0 \cap \mathbf{V}(y_2, z_2)$ の余次元が $m+3$ 以上であることを示せば、クルルの標高定理より Z_m^0 の既約成分を含まず、Z_m^0 が既約であることが示せる。

D_4^1 型の既約成分

$$
\begin{aligned}
g &= x^2 + y^2 z + yz^2 + xyz \\
S &= \mathbb{V}(g) \\
R_m &= k[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_m, z_0, \dots, z_m] \ (m \geq 5)
\end{aligned}
$$

とする。このとき S_m^0 の既約成分は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
I_m^0 &:= \langle x_0, x_1, x_2, \quad y_0, y_1 \quad z_0, \quad z_1, \quad f^{(0)}, \dots, f^{(m)} \rangle \\
J_m^i &:= \langle x_0, x_1, \quad y_0, \quad z_0, \quad h_i, \quad f^{(0)}, \dots, f^{(m)} \rangle
\end{aligned}
$$

ただし、$h_1 = y_1, h_2 = z_1, h_3 = y_1 + z_1$ とする。
また、

$$
\begin{aligned}
I_m^1 &:= J_m^1 \cdot (R_m)_{z_1} \cap R_m, \\
I_m^i &:= J_m^i \cdot (R_m)_{y_1} \cap R_m \ (i = 2, 3),
\end{aligned}
$$

として

$$
Z_m^i = \mathbb{V}(I_m^i) \ (i = 1, 2, 3).
$$

主結果2

主定理

$m \geq 5$ とし、Z_m^i を上の通りとする。このとき $S_m^0(= Z_m^0 \cup Z_m^1 \cup Z_m^2 \cup Z_m^3)$ の既約成分の共通集合、$\{Z_m^{l_1} \cap Z_m^{l_2} \mid 0 \leq l_1 < l_2 \leq 3\}$ の極大元は

$$Z_m^0 \cap Z_m^1, Z_m^0 \cap Z_m^2, Z_m^0 \cap Z_m^3.$$

さらに $m \gg 0$ のとき、次のグラフを考える。

頂点：S_m^0 の既約成分
辺：二つの既約成分の共通集合が $\{Z_m^i \cap Z_m^j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ で極大

系

上の方法で構成したグラフは、S の最小特異点解消の例外曲線の双対グラフに同型