Beiträge zur Theorie der Elastizität gekrümmter stabförmiger Körper.

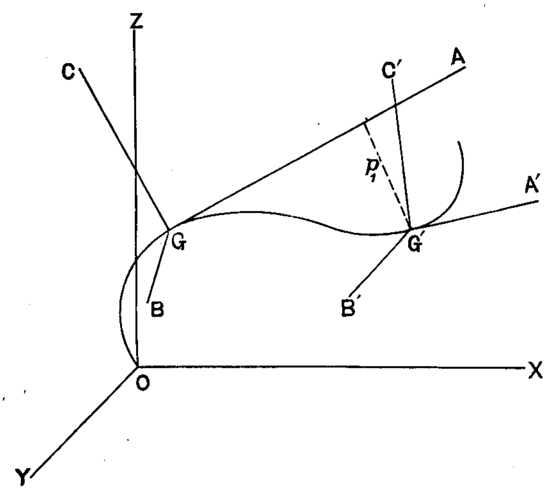
von

Tsuruzo Matsumura.

(Eingegangen November 11, 1914.)

Eine allgemeine Untersuchung über die Elastizität doppelt gekrümmter stabförmiger Körper ist meines Wissens bisher noch nicht unternommen worden, und was bezüglich der Theorie solcher Elastizität in Lehrbüchern gegeben ist, ist sehr beschränkt. Ich beabsichtige im Folgenden, zunächst die Theorie in allgemeiner Form zu entwickeln und dann einige Anwendungen derselben zu behandeln.

Abb. 1.



In Abb. 1 sei OGG' die Mittellinie eines doppelt gekrümmten stabförmigen Körpers. Derselbe sei im Punkt O drehbar gehalten und an beliebigen Punkten der Mittellinie von Kräften angegriffen, deren Richtungslinien derart sind, dass das resultierende Moment sämmtlicher Kräfte an O gleich Null ist. Die Richtungslinien können auch beliebig sein wenn der stab an O eingeklemmt ist.

Mit O als Ursprung sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem genommen und sei

G'	ein Punkt der Mittellinie, mit den Koordinaten x', y', z',
G	ein anderer Punkt derselben zwischen O und G', mit den Koordinaten x, y, z,
O_1, G_1, G_1'	die zu O, G bzw. G' unendlich nahe gelegenen Punkte der Mittellinie,
$G'A', G'B', G'C'$	die Tangente, die Binormale und die Hauptnormale im Punkt G',
GA, GB, GC	diejenigen im Punkt G,
$\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$	die Richtungswinkel von $G'A'$ gegenüber den Koordinatenachsen,
$\alpha_2', \beta_2', \gamma_2'$	diejenigen von $G'B'$,
$\alpha_3', \beta_3', \gamma_3'$	„ „ $G'C'$,
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	„ „ GA,
$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$	„ „ GB,
$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$	„ „ GC,
M_1, M_2, M_3	die resultierenden Momente um GA, GB bzw. GC, welche durch alle über G hinaus wirkenden Kräfte hervorgerufen werden,
$M_x. M_y, M_z$	die x-, y-, z- Komponenten der Resultante von M_1, M_2, M_3.

Zur Bestimmung von M_1, M_2, M_3 durch M_x, M_y, M_z gelten dann die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_x \cos\alpha_1 + M_y \cos\beta_1 + M_z \cos\gamma_1, \\ M_2 &= M_x \cos\alpha_2 + M_y \cos\beta_2 + M_z \cos\gamma_2, \\ M_3 &= M_x \cos\alpha_3 + M_y \cos\beta_3 + M_z \cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Löst man diese Gleichungen nach M_x, M_y, M_z auf, so erhält man zur umgekehrten Bestimmung derselben durch M_1, M_2, M_3:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_1 \cos\alpha_1 + M_2 \cos\alpha_2 + M_3 \cos\alpha_3, \\ M_y &= M_1 \cos\beta_1 + M_2 \cos\beta_2 + M_3 \cos\beta_3, \\ M_z &= M_1 \cos\gamma_1 + M_2 \cos\gamma_2 + M_3 \cos\gamma_3. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Ein einfacher Fall wird vorausgesetzt, dass die Hauptachsen des Querschnittes G mit GB und GC zusammenfallen. Es seien ferner J_1, J_2, J_3 die Trägheitsmomente des Querschnittes G in Bezug auf die Achsen GA, CB bzw GC.

Der von M_1 verursachte Verdrehungswinkel pro Längeneinheit der Stabmittellinie kann durch AM_1 dargestellt werden, wenn gesetzt wird

$$A = \frac{1}{GJ_1} \quad \text{für kreisförmige Querschnitte,}$$

$$A = \frac{1}{4G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3}\right) \quad \text{„ elliptische „}$$

$$A = \frac{0{\cdot}3}{G}\left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3}\right) \quad \text{„ rechteckige „}$$

unter G den Schubelastizitätsmodul verstanden. Dann ist AM_1ds die Drehung des Körperteiles GG' um die Achse GA, die durch die Verdrehung des Längenelementes GG_1 veranlasst wird.

Der von M_2 verursachte Biegungswinkel pro Längeneinheit der Stabmittellinie kann durch BM_2 dargestellt werden, wenn gesetzt wird

$$B = \frac{1}{EF\rho^2 \varkappa}{}^{1)} \quad \text{mit } \varkappa = -\frac{1}{F}\int \frac{\eta dF}{\rho + \eta},$$

worin bedeutet

E den Elastizitätsmodul,

F die Querschnittsgrösse,

ρ den Krümmungshalbmesser,

η den Abstand des Flächenelementes dF von der Achse GB.

Dann ist BM_2ds die Drehung des Körperteiles GG', die durch die Biegung des Elementes GG_1 um die Achse GB veranlasst wird.

Der von M_3 verursachte Biegungswinkel pro Längeneinheit der Stabmittellinie kann durch CM_3 dargestellt werden, wenn gesetzt wird

1) Genauer ist

$$B = \frac{1}{EF\rho^2}\left(\frac{P\rho}{M_2} + 1 + \frac{1}{\varkappa}\right),$$

unter P die Kraftkomponente in der Richtung GA verstanden.

$$C=\frac{1}{EJ_3}.$$

Dann ist CM_3ds die Drehung des Körperteiles GG', die durch die Biegung des Elementes GG_1 um die Achse GC veranlasst wird.

Die Drehungen AM_1ds, BM_2ds, CM_3ds haben zur Folge, dass das Längenelement $G'G_1'$ eine Drehung (Rotation) und eine Schiebung (Translation) erfährt. Sind nun $d\omega_x, d\omega_y, d\omega_z$ die x-, y-, z- Komponenten dieser Drehung, so gelten ähnlich den Gleichungen (2)

$$\begin{aligned}
d\omega_x &=(AM_1\cos\alpha_1+BM_2\cos\alpha_2+CM_3\cos\alpha_3)\,ds,\\
d\omega_y &=(AM_1\cos\beta_1+BM_2\cos\beta_2+CM_3\cos\beta_3)\,ds,\\
d\omega_z &=(AM_1\cos\gamma_1+BM_2\cos\gamma_2+CM_3\cos\gamma_3)\,ds.
\end{aligned}$$

Hierin sind im allgemeinen AM_1, BM_2, CM_3 und alle Richtungswinkel die Funktionen von x, y, z.

Durch Integration erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \int(AM_1\cos\alpha_1+BM_2\cos\alpha_2+CM_3\cos\alpha_3)\,ds+H_x\\
\omega_y &= \int(AM_1\cos\beta_1+BM_2\cos\beta_2+CM_3\cos\beta_3)\,ds+H_y\\
\omega_z &= \int(AM_1\cos\gamma_1+BM_2\cos\gamma_2+CM_3\cos\gamma_3)\,ds+H_z
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

Hierin sind H_x, H_y, H_z die x-, y-, z- Komponenten der Drehung des Elementes OO_1, und zwar gleich Null, wenn der Stab in O eingeklemmt ist. Die Integralgrenzen sind von O bis G' entsprechend zu nehmen.

Bezeichnet man mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Drehungskomponenten von $G'G'_1$ um die Achsen $G'A'$, $G'B'$ bzw. $G'C'$, so ist ähnlich den gleichungen (1)

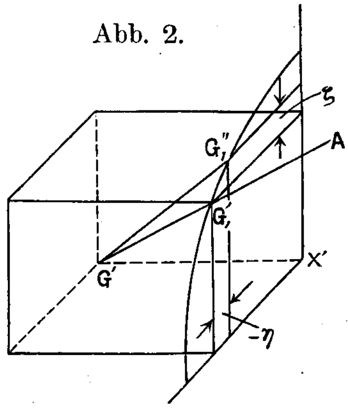
$$\left.\begin{aligned}
\omega_1&=\omega_x\cos\alpha_1'+\omega_y\cos\beta_1'+\omega_z\cos\gamma_1',\\
\omega_2&=\omega_x\cos\alpha_2'+\omega_y\cos\beta_2'+\omega_z\cos\gamma_2',\\
\omega_3&=\omega_x\cos\alpha_3'+\omega_y\cos\beta_3'+\omega_z\cos\gamma_3'.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

Ferner können die Aenderungen $\Delta\cos\alpha_1'$, $\Delta\cos\beta_1'$, $\Delta\cos\gamma_1'$ der Richtungskosinus von $G'A'$ durch ω_x, ω_y, ω_z bestimmt werden. Tritt namentlich

ω_x allein auf, so erfährt $G'G_1'$ eine Drehung um $G'X'$, (s. Abb. 2) ohne jede Aenderung von $\cos\alpha_1'$. Aendern sich dy, dz um η bzw. ζ, so ist

$$\zeta = \omega_x\, dy = \omega_x \cos\beta_1'\, ds,$$
$$-\eta = \omega_x\, dz = \omega_x \cos\gamma_1'\, ds,$$

Abb. 2.



und daher

$$\varDelta \cos\beta_1' = \frac{\eta}{ds} = -\omega_x \cos\gamma_1',$$

$$\varDelta \cos\gamma_1' = \frac{\zeta}{ds} = \omega_x \cos\beta_1'.$$

In gleicher Weise ist für alleiniges Auftreten von ω_y

$$\varDelta \cos\gamma_1' = -\omega_y \cos\alpha_1',$$
$$\varDelta \cos\alpha_1' = \omega_y \cos\gamma_1',$$

und für solches von ω_z

$$\varDelta \cos\alpha_1' = -\omega_z \cos\beta_1',$$
$$\varDelta \cos\beta_1' = \omega_z \cos\alpha_1'$$

Dann ist für den allgemeinen Fall, dass ω_x, ω_y, ω_z alle zusammen auftreten

$$\left.\begin{aligned} \varDelta \cos\alpha_1' &= \omega_y \cos\gamma_1' - \omega_z \cos\beta_1', \\ \varDelta \cos\beta_1' &= \omega_z \cos\alpha_1' - \omega_x \cos\gamma_1'; \\ \varDelta \cos\gamma_1' &= \omega_x \cos\beta_1' - \omega_y \cos\alpha_1' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für die Aenderung der Richtungskosinus von $G'B'$ bzw. $G'C'$ gelten dieselben Formeln, indem nur alle Zeiger 1 mit 2 bzw. 3 zu vertauschen sind.

Die Schiebung des Längenelementes $G'G_1'$ hat die Aenderung von x', y', z' zur Folge.

Die Gleichung der Ebene, die durch die Linie GA und durch den Punkt G' geht, ist bekanntlich

$$(X-x)\Big[(z'-z)\cos\beta_1-(y'-y)\cos\gamma_1\Big]$$
$$+(Y-y)\Big[(x'-x)\cos\gamma_1-(z'-z)\cos\alpha_1\Big]$$
$$+(Z-z)\Big[(y'-y)\cos\alpha_1-(x'-x)\cos\beta_1\Big]=0,$$

unter X, Y, Z, die Koordinaten irgend eines Punktes der Ebene verstanden. Die Richtungskosinus der Normale dieser Ebene sind

$$\cos\lambda_1=\frac{(z'-z)\cos\beta_1-(y'-y)\cos\gamma_1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2-[(x'-x)\cos\alpha_1+(y'-y)\cos\beta_1+(z'-z)\cos\gamma_1]^2}},$$

$$\cos\mu_1=\frac{(x'-x)\cos\gamma_1-(z'-z)\cos\alpha_1}{\sqrt{(x'-x^2)+(y'-y)^2+(z'-z)^2-[(x'-x)\cos\alpha_1+(y'-y)\cos\beta_1+(z'-z)\cos\gamma_1]^2}},$$

$$\cos\nu_1=\frac{(y'-y)\cos\alpha_1-(x'-x)\cos\beta_1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2-[(x'-x)\cos\alpha_1+(y'-y)\cos\beta_1+(z'-z)\cos\gamma_1]^2}},$$

Hierin ist zu beachten, dass der gemeinsame Nenner gleich dem senkrechten Abstand p_1 von G' zur Achse GA ist.

Also

$$\left.\begin{aligned} p_1\cos\lambda_1&=(z'-z)\cos\beta_1-(y'-y)\cos\gamma_1,\\ p_1\cos\mu_1&=(x'-x)\cos\gamma_1-(z'-z)\cos\alpha_1,\\ p_1\cos\nu_1&=(y'-y)\cos\alpha_1-(x'-x)\cos\beta_1.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (6)$$

Einerseirs ist P_1AM_1ds die Strecke, um welche der Punkt G', infolge der Verdrehung des Längenslementes GG_1, senkrecht zur Ebene $G'GA$ verschoben wird. Die x-, y-, z- Komponenten dieser Verschiebung sind

$$p_1\,AM_1\,ds\cos\lambda_1,$$
$$p_1\,AM_1\,ds\cos\mu_1,$$
$$p_1\,AM_1\,ds\cos\nu_1,$$

oder mit (6)

$$AM_1\left[(z'-z)\cos\beta_1-(y'-y)\cos\gamma_1\right]ds,$$

$$AM_1\left[(x'-x)\cos\gamma_1-(z'-z)\cos\alpha_1\right]ds,$$

$$AM_1\left[(y'-y)\cos\alpha_1-(x'-x)\cos\beta_1\right]ds.$$

Gleicherweise sind die x-, y-, z- Komponenten der Verschiebung des Punktes G' senkrecht zur Ebene $G'GB$, welche die Biegung des Elementes GG_1 um die Achse GB zur Folge hat,

$$BM_2\left[(z'-z)\cos\beta_2-(y'-y)\cos\gamma_2\right]ds,$$

$$BM_2\left[(x'-x)\cos\gamma_2-(z'-z)\cos\alpha_2\right]ds,$$

$$BM_2\left[(y'-y)\cos\alpha_2-(x'-x)\cos\beta_2\right]ds.$$

und diejenigen der Verschiebung desselben Punktes senkrechet zur Ebene $G'GC$, welche die Biegung des Elementes GG_1 um die Achse GC zur Folge hat,

$$CM_3\left[(z'-z)\cos\beta_3-(y'-y)\cos\gamma_3\right]ds.$$

$$CM_3\left[(x'-x)\cos\gamma_3-(z'-z)\cos\alpha_3\right]ds,$$

$$CM_3\left[(y'-y)\cos\alpha_3-(x'-x)\cos\beta_3\right]ds,$$

Die Summe aller x-Komponenten der Verschiebungen von G' ist das Differential der Aenderung von x', d.h.

$$\begin{aligned}d\Delta x' = &(AM_1\cos\beta_1+BM_2\cos\beta_2+CM_3\cos\beta_3)(z'-z)\,ds\\ &-(AM_1\cos\gamma_1+BM_2\cos\gamma_2+CM_3\cos\gamma_3)(y'-y)\,ds.\end{aligned}$$

Ebenso ist

$$d\Delta y' = (AM_1 \cos\gamma_1 + BM_2 \cos\gamma_2 + CM_3 \cos\gamma_3)(x'-x)\,ds$$
$$-(AM_1 \cos\alpha_1 + BM_2 \cos\alpha_2 + CM_3 \cos\alpha_3)(z'-z)\,ds,$$
$$d\Delta z' = (AM_1 \cos\alpha_1 + BM_2 \cos\alpha_2 + CM_3 \cos\alpha_3)(y'-y)\,ds$$
$$-(AM_1 \cos\beta_1 + BM_2 \cos\beta_2 + CM_3 \cos\beta_3)(x'-x)\,ds.$$

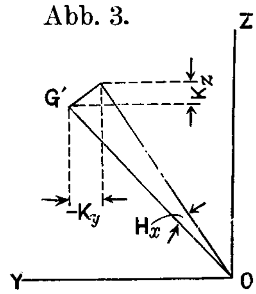
Durch Integration erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= \int (AM_1 \cos\beta_1 + BM_2 \cos\beta_2 + CM_3 \cos\beta_3)(z'-z)\,ds \\
&\quad - \int (AM_1 \cos\gamma_1 + BM_2 \cos\gamma_2 + CM_3 \cos\gamma_3)(y'-y)\,ds + K_x, \\
\Delta y' &= \int (AM_1 \cos\gamma_1 + BM_2 \cos\gamma_2 + CM_3 \cos\gamma_3)(x'-x)\,ds \\
&\quad - \int (AM_1 \cos\alpha_1 + BM_2 \cos\alpha_2 + CM_3 \cos\alpha_3)(z'-z)\,ds + K_y, \\
\Delta z' &= \int (AM_1 \cos\alpha_1 + BM_2 \cos\alpha_2 + CM_3 \cos\alpha_3)(y'-y)\,ds \\
&\quad - \int (AM_1 \cos\beta_1 + BM_2 \cos\beta_2 + CM_3 \cos\beta_3)(x'-x)\,ds + K_z.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

Hierin sind K_x, K_y, K_z die Aenderungen von x', y', z', die von den Drehungen H_x, H_y, H_z des Elementes OO_1 herrühren, und zwar gleich Null, wenn der Stab an O eingeklemmt ist. Die Integralgrenzen sind von O bis G' entsprechend zu nehmen.

K_x, K_y, K_z können durch H_x, H_y, H_z bestimmt werden. Tritt namentlich H_x allein auf, so ist in Bezug auf Abb. 3

Abb. 3.



$$K_x = 0,$$
$$K_y = -z' H_x,$$
$$K_z = y' H_x.$$

Ebenso für H_y allein

$$K_x = z' H_y,$$

$$K_y = 0,$$

$$K_z = -x' H_y,$$

sowie für H_z allein

$$K_x = -y' H_z,$$

$$K_y = x' H_z,$$

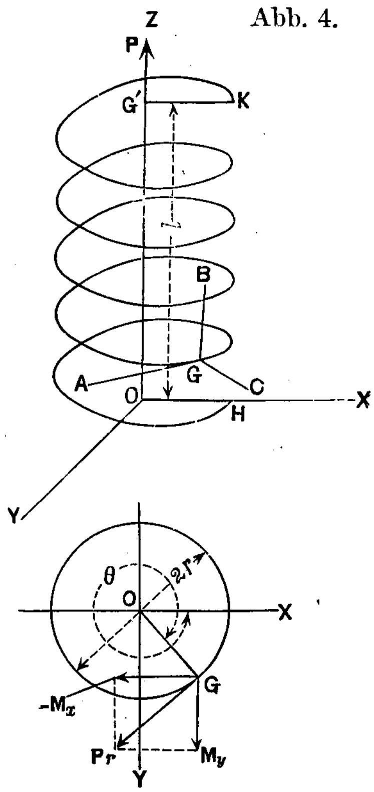
$$K_z = 0.$$

Daher ist für den allgemeinen Fall

$$\left.\begin{aligned} K_x &= z' H_y - y' H_z, \\ K_y &= x' H_z - z' H_x, \\ K_z &= y' H_x - x' H_y. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

Anwendungen.

Abb. 4.



Die vorstehenden Formeln sollen auf die Ermittelung der Formänderung einer Schraubenfeder angewendet werden.

Beispiel 1. Eine zylindrische Schraubenfeder sei am einen Ende O drehbar gehalten und am anderen Ende G' durch eine Kraft P angegriffen, deren Richtungslinie mit der Achse der Schraube zusammenfällt. Es soll die Formänderung der Feder genau ermittelt werden.

Von O aus seien OX, OY, OZ. gezogen, wie in Abb. 4 ersichtlich und es bezeichne

- r den Halbmesser der Windungen,
- n die Zahl „ „ ,
- i den Steigungswinkel d.h. den Winkel, welchen GA mit der XY Ebene bildet,

s' die Länge des gewundenen Drahtes HK,

l die Länge OG' der Feder,

ρ den Krümmungshalbmesser $= \dfrac{r}{\cos^2 i}$

Für einen Punkt G der Schraubenlinie ist

$$M_x = -Pr \sin\theta,$$

$$M_y = \quad Pr\cos\theta,$$

$$M_z = \quad 0,$$

$$\left.\begin{array}{lll}\cos\alpha_1 = -\cos i \sin\theta, & \cos\alpha_2 = \quad\sin i\sin\theta, & \cos\alpha_3 = \cos\theta, \\ \cos\beta_1 = \quad\cos i\cos\theta, & \cos\beta_2 = -\sin i\cos\theta, & \cos\beta_3 = \sin\theta, \\ \cos\gamma_1 = \quad\sin i, & \cos\gamma_2 = \quad\cos i, & \cos\gamma_3 = \ 0.\end{array}\right\} \quad (9)$$

Dann ist nach (1)

$$M_1 = -Pr\sin\theta\,(-\cos i\sin\theta) + Pr\cos\theta\cos i\cos\theta = Pr\cos i,$$

$$M_2 = -Pr\sin\theta\sin i\sin\theta + Pr\cos\theta\,(-\sin i\cos\theta) = -Pr\sin i,$$

$$M_3 = -Pr\sin\theta\cos\theta \qquad + Pr\cos\theta\sin\theta \qquad = 0.$$

Vernachlässigt man die Formänderung der Drahtteile OH und $G'K$, so wird die axiale Verlängerung Δl der Feder gegeben durch die Dritte der Gleichungen (7). Durch Einsetzen von l für z' in derselben erhält man

$$\Delta l = \int_0^{s'} [APr\cos i\,(-\cos i\sin\theta) - BPr\sin i\sin i\sin\theta](y'-y)\,ds$$

$$-\int_0^{s'} [APr\cos i\cos i\cos\theta - BPr\sin i\,(-\sin i\cos\theta)](x'-x)\,ds$$

$$+y'H_x - x'H_y.$$

Hierin ist zu setzen

$$y' = 0, \qquad x' = 0 \qquad \text{für den Punkt } G',$$

$$y = r\sin\theta, \qquad x = r\cos\theta,$$

$$ds = \frac{r\,d\theta}{\cos i}.$$

Also

$$\Delta l = Pr^3\,\frac{A\cos^2 i + B\sin^2 i}{\cos i}\left[\int_0^{2\pi n}\sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi n}\cos^2\theta\,d\theta\right]$$

oder mit $\int_0^{2\pi n}\sin^2\theta\,d\theta = \pi n, \qquad \int_0^{2\pi n}\cos^2\theta\,d\theta = \pi n$

$$\Delta l = 2\pi n Pr^3\,\frac{A\cos^2 i + B\sin^2 i}{\cos i}$$

$$= Pr^2 l\,\frac{A\cos^2 i + B\sin^2 i}{\sin i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Drehung des Drahtteiles $G'K$ um seine eigene Mittellinie ist nach (3)

$$\omega_x = \int_0^{s'}[APr\cos i\,(-\cos i\sin\theta) - BPr\sin i\sin i\sin\theta]\,ds + H_x$$

$$= -Pr^2\,\frac{A\cos^2 i + B\sin^2 i}{\cos i}\int_0^{2\pi n}\sin\theta\,d\theta + H_x,$$

oder mit $\int_0^{2\pi n}\sin\theta\,d\theta = 0$

$$\omega_x = H\,.$$

Hierin ist H_x die Drehung des Drahtteiles OH um seine eigene Mittellinie. Dieselbe ist unbekannt, kann aber durch die Bedingung $\Delta y' = 0$ ermittelt werden. Nach (7) ist

$$\Delta y' = \int_0^{s'}[APr\cos i\sin i - BPr\sin i\cos i](x' - x)\,ds$$

$$-\int_0^{s'}[APr\cos i\,(-\cos i\sin\theta)-BPr\sin i\sin i\sin\theta](z'-z)\,ds$$
$$+x'H_z-z'H_x=0$$

oder wegen

$$x'=0,\qquad x=r\cos\theta,\qquad z'=l=2\pi nr\,\mathrm{tg}\,i,$$

$$z=\theta r\,\mathrm{tg}\,i,\qquad ds=\frac{rd\theta}{\cos i}$$

$$\Delta y'=-Pr^3(A-B)\sin i\int_0^{2\pi n}\cos\theta\,d\theta$$

$$+Pr^3\frac{A\cos^2 i+B\sin^2 i}{\cos i}\,\mathrm{tg}\,i\int_0^{2\pi n}(2\pi n-\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$-2\pi nr\,\mathrm{tg}\,i\,H_x=\quad 0,$$

oder mit $\int_0^{2\pi n}\cos\theta\,d\theta=0,\qquad \int_0^{2\pi n}(2\pi n-\theta)\sin\theta\,d\theta=2\pi n$

$$2\pi n\,Pr^3\frac{A\cos^2 i+B\sin^2 i}{\cos i}\,\mathrm{tg}\,i-2\pi nr\,\mathrm{tg}\,i\,H_x=0$$

oder $H_x=Pr^2\dfrac{A\cos^2 i+B\sin^2 i}{\cos i}.$

Die Drehung von $G'K$ um eine durch G' gehende, zu OY purallele Achse, ist nach (3)

$$\omega_y=\int_0^{s'}[APr\cos i\cos i\cos\theta-BPr\sin i\,(-\sin i\cos\theta)]ds+H_y$$

$$=Pr^2\frac{A\cos^2 i+B\sin^2 i}{\cos i}\int_0^{2\pi n}\cos\theta\,d\theta+H_y$$

oder wegen $\int_0^{2\pi n}\cos\theta\,d\theta=0$

$$\omega_y = H_y.$$

Hierin ist H_y die Drehung von OH um OY. Dieselbe ist unbekannt, kann aber durch die Bedingung $\varDelta x'=0$ gegeben werden. Nach (7) ist

$$\varDelta x' = \int_0^{s'} [APr \cos i \cos i \cos \theta - BPr \sin i\,(-\sin i \cos \theta)](z'-z)\,ds$$

$$-\int_0^{s'} [APr \cos i \sin i - BPr \sin i \cos i](y'-y)\,ds + z'H_y - y'H_z$$

$$= Pr^3 \frac{A\cos^2 i + B\sin^2 i}{\cos i} \operatorname{tg} i \int_0^{2\pi n} (2\pi n - \theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$+ Pr^3(A-B)\sin i \int_0^{2\pi n} \sin\theta\,d\theta$$

$$+ 2\pi nr \operatorname{tg} i\; H_y = 0.$$

Da beide Integrale gleich Null sind, so folgt

$$H_y = 0.$$

Die Drehung von $G'K$ um OZ ist ferner nach (3)

$$\omega_z = \int_0^{s'} [APr \cos i \sin i - BPr \sin i \cos i]\,ds + H_z$$

$$= Pr^2(A-B)\sin i \int_0^{2\pi n} d\theta + H_z$$

$$= 2\pi n\, Pr^2(A-B)\sin i + H_z \qquad (11)$$

Hierin ist H_z die Drehung von OH um OZ. Dieselbe ist wieder unbekannt, kann aber sofort ermittelt werden. In Bezug auf Abb. 4, wenn $G'K$ um OZ in einem Sinne eine Drehung erfährt, so muss auch OH, aus Symmetrie der Form, um dieselbe Achse die gegensinnige Drehung um den gleichen Winkel erfahren.

Also

$$\omega_z = -H_z.$$

Dies mit (11) gibt

$$\begin{aligned}\omega_z &= -H_z = \pi n P r^2 (A-B) \sin i \\ &= \frac{1}{2} Prl (A-B) \cos i\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Drehung von OH und $G'K$ lässt sich das Folgende zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\omega_x &= H_x = Pr^2 \frac{A \cos^2 i + B \sin^2 i}{\cos i}, \\ \omega_y &= H_y = 0, \\ \omega_z &= -H_z = \frac{1}{2} Prl(A-B) \cos i.\end{aligned}$$

Hieraus erhellt, dass die Teile OH und $G'K$ um OZ sich drehen im Sinne, die Windungszahl zu vermehren, und mit einander den Winkel

$$= Prl\,(A-B) \cos i$$

bilden, indem sie immer senkrecht zu OZ bleiben. Sie beide erfahren ferner die Drehung um ihre eigene Mittellinie um den Winkel

$$= Pr^2 \frac{A \cos^2 i + B \sin^2 i}{\cos i},$$

im Sinne YZ.

Die vorstehenden Ergebnisse gelten auch für den Fall, dass die Schraubenfeder durch die Axialkraft gedrückt wird, so fern es von der Ausknickung des Schraubenkörpers abgesehen wird. Nur finden dann alle Drehungen und alle Verschiebungen in entgegengesetzter Richtung statt.

Beispiel 2. Es soll die Verkürzung der konischen Schraubenfeder unter der Einwirkung der Axialkraft ermittelt werden.

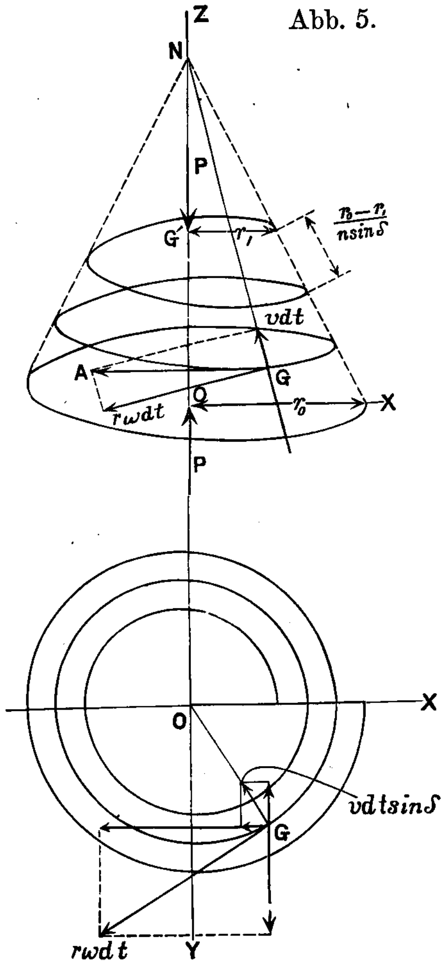
In Bezug auf Abb. 5 sei GN eine Gerade, die mit einer Achse OZ in N einen Winkel δ einschliesst. Man denke sich, ein Punkt G bewegt sich auf dieser Geraden mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit v, während GN ihrerseits um die Achse OZ mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Es sei die Kurve so entstanden die Mittellinie der Schraubenfeder. Dann ist die Projektion der Mittellinie in XY Ebene eine Archimedische Spirale mit der Gleichung:

$$r = r_0 - \frac{\theta}{2\pi n}(r_0 - r_1)$$

oder mit $\quad m = \frac{r_0 - r_1}{2\pi n}$

$$r = r_0 - m\,\theta.$$

Abb. 5.



Mit Rucksicht auf Abb. 5 ist entsprechend dem Zeitelemente dt,

$$dx = -(vdt \sin\delta \cos\theta + r\,\omega dt \sin\theta),$$
$$dy = -vdt \sin\delta \sin\theta + r\,\omega\,dt \cos\theta,$$
$$dz = vdt \cos\delta,$$

oder wegen

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\frac{r_0 - r_1}{n \sin\delta}} = \frac{\sin\delta}{m}$$

$$dx = -vdt \sin\delta \left(\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right),$$

$$dy = -vdt \sin\delta \left(\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right),$$

$$dz = vdt \cos\delta.$$

Ferner ist

$$d^2x = -vdt \sin\delta \left(-\sin\theta + \frac{1}{m}\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + \frac{r}{m}\cos\theta\right) d\theta$$

oder mit $\frac{dr}{d\theta} = -m, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$

$$d^2x = v\,\omega\,dt^2 \sin\delta\left(2\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right),$$

$$d^2y = -v\,dt\sin\delta\left(\cos\theta - \frac{1}{m}\frac{dr}{d\theta}\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right)d\theta$$

$$= -v\,\omega\,dt^2\sin\delta\left(2\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right),$$

$$d^2z = 0.$$

Die Richtungskosinus der Tangente GA sind dann

$$\cos\alpha_1 = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$= \frac{-\sin\delta\left(\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right)}{\sqrt{\sin^2\delta\left(\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta\right)^2 + \sin^2\delta\left(\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right)^2 + \cos^2\delta}}$$

$$= -\frac{\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{r^2}{m^2}}},$$

$$\cos\beta_1 = -\frac{\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{r^2}{m^2}}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\operatorname{ctg}\delta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{r^2}{m^2}}},$$

Die Richtungskosinus der Binormale GB sind mit

$$a = dy\, d^2z - dz\, d^2y,$$

$$b = dz\, d^2x - dx\, d^2z,$$

$$c = dx\, d^2y - dy\, d^2x,$$

wie bekannt

$$\cos \alpha_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos \beta_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

Im vorliegenden Falle ist

$$a = v\, dt \cos\delta \cdot v\, \omega\, dt^2 \sin\delta \left(2\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right)$$

$$= v^2\omega\, dt^3 \sin\delta \cos\delta \left(2\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right),$$

$$b = v\, dt \cos\delta \cdot v\, \omega\, dt^2 \sin\delta \left(2\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right)$$

$$= v^2\omega\, dt^3 \sin\delta \cos\delta \left(2\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right)$$

$$c = v\, dt \sin\delta \left(\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right) \cdot v\omega\, dt^2 \sin\delta \left(2\cos\theta + \frac{r}{m}\sin\theta\right)$$

$$+ v\, dt \sin\delta \left(\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right) \cdot v\omega\, dt^2 \sin\delta \left(2\sin\theta - \frac{r}{m}\cos\theta\right)$$

$$= v^2\omega\, dt^3 \sin^2\delta \left(2 + \frac{r^2}{m^2}\right).$$

Somit ist

$$\cos\alpha_2=\frac{\cos\delta\left(2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta\right)}{\sqrt{\cos^2\delta\left(2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta\right)^2+\cos^2\delta\left(2\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta\right)^2+\sin^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)}}$$

$$=\frac{2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{\sqrt{4+\frac{r^2}{m^2}+\mathrm{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{2\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{\sqrt{4+\frac{r^2}{m^2}+\mathrm{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_2=\frac{\mathrm{tg}\,\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)}{\sqrt{4+\frac{r^2}{m^2}+\mathrm{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2}}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormale sind

$$\cos\alpha_3=\sqrt{1-\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2}$$

$$=\frac{\left[\frac{2}{\mathrm{tg}\,\delta}+\mathrm{tg}\,\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\sin\theta-\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\,\delta}+\mathrm{tg}\,\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[4+\frac{r^2}{m^2}+\mathrm{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\beta_3=\sqrt{1-\cos^2\beta_1-\cos^2\beta_2}$$

$$=-\frac{\left[\frac{2}{\mathrm{tg}\,\delta}+\mathrm{tg}\,\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\cos\theta+\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\,\delta}+\mathrm{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[4+\frac{r^2}{m^2}+\mathrm{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2\right]}},$$

$$\cos\gamma_3 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_1-\cos\gamma_2}$$

$$= \frac{\frac{r}{m}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[4+\frac{r^2}{m^2}+\operatorname{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2\right]}}\,.$$

Da $\frac{m}{r}$ gegenüber 1 immer sehr klein ist und damit

$$\sqrt{4+\frac{r^2}{m^2}+\operatorname{tg}^2\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)^2} = \frac{r^2}{m^2}\sqrt{4\frac{m^4}{r^4}+\frac{m^2}{r^2}+\operatorname{tg}^2\delta\left(2\frac{m^2}{r^2}+1\right)^2}$$

$$= \sim \frac{r^2}{m^2}\sqrt{\frac{m^2}{r^2}+\operatorname{tg}^2\delta\left(4\frac{m^2}{r^2}+1\right)} = \frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)},$$

so kann gesetzt werden

$$\cos\alpha_2 = \frac{2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}\,,$$

$$\cos\beta_2 = \frac{2\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}\,,$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)}{\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}\,,$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\sin\theta-\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\cos\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}}\,,$$

$$\cos\beta_3 = -\frac{\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\cos\theta+\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\sin\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}},$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}}.$$

M_x, M_y, M_z haben dieselben Ausdrücke wie früher nur mit entgegengesetzten Vorzeichen:

$$M_x = Pr\sin\theta,$$

$$M_y = -Pr\cos\theta,$$

$$M_z = 0.$$

Dann ist nach (1)

$$M_1 = -Pr\sin\theta\frac{\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}}+Pr\cos\theta\frac{\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}}$$

$$= -Pr\frac{\frac{r}{m}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}},$$

$$M_2 = Pr\sin\theta\frac{2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}-Pr\cos\theta\frac{2\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}$$

$$= Pr\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}},$$

$$M_3 = Pr\sin\theta \frac{\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta} + \operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\sin\theta - \left[\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} + \operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\cos\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}}$$

$$+ Pr\cos\theta \frac{\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta} + \operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\cos\theta + \left[\frac{1}{\operatorname{tg}\delta} + \operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]\frac{r}{m}\sin\theta}{\frac{r}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}}$$

$$= Pr \frac{\frac{2}{\operatorname{tg}\delta} + \operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)}{\frac{r}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}}\,.$$

Die Verkürzung der Feder ist nach der Dritten der Gleichungen (7) mit l für z'

$$\Delta l = \int\left\{AP\frac{r^2}{m}\frac{\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}} + BPm\frac{2\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta}{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}\right.$$

$$\left. + CP\frac{m^2}{r}\frac{\left[2\right]^2\sin\theta - \left[2\right]\left[1\right]\frac{r}{m}\cos\theta}{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}\right\}(-y)\,ds$$

$$- \int\left\{AP\frac{r^2}{m}\frac{\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}} + BPm\frac{2\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta}{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}\right.$$

$$\left. - CP\frac{m^2}{r}\frac{\left[2\right]^2\cos\theta + \left[2\right]\left[1\right]\frac{r}{m}\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}\right\}(-x)\,ds.$$

mit den Abkürzungen:

$$\left[2\right]=\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right],$$

$$\left[1\right]=\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right].$$

Hierin ist zu setzen

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

$$=v\,dt\sqrt{\sin^2\delta\left[\left(\cos\theta+\frac{r}{m}\sin\theta\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{r}{m}\cos\theta\right)^2\right]+\cos^2\delta}$$

$$=v\,dt\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}\sin^2\delta}=\frac{v}{\omega}\,d\theta\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}\sin^2\delta}$$

$$=-\frac{m}{\sin\delta}\,\frac{dr}{m}\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}\sin^2\delta}=-\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}\,dr.$$

Ferner ist zu beachten, dass der Koeffizient $B=\frac{1}{EF\rho^2\varkappa}$ nicht unveränderlich wie A oder C sonder eine Funktion von r ist. Um aber das Integral leicht durchführen zu können, und mit Rücksicht darauf, dass der Einfluss der Biegung des Drahtes um die mit OZ einen kleinen Winkel bildende Binormale GB auf die Verkürzung der Feder nur sehr klein ausfallen dürfte, begnüge man sich für B seinen durchschnittlichen Wert zu nehmen.

Der Krümmungshalbmesser ist bekanntlich

$$\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{v^3dt^3\left(1+\frac{r^2}{m^2}\sin^2\delta\right)\sqrt{1+\frac{r^2}{m^2}\sin^2\delta}}{\frac{\omega}{v}\,v^3dt^3\sin\delta\,\frac{r}{m}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}$$

$$= r \cdot \frac{\sin\delta\left(\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}\right)\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}}{\frac{r^2}{m^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}}. \tag{12}$$

Berechnet man

$$B = \frac{1}{EF\rho^2\varkappa},$$

indem man für ρ den aus (12) mit $\frac{r_0+r_1}{2}$ für r sich ergebenden Wert nimmt, so darf der erhaltene Wert als der durchschnittliche betrachtet werden.

Die Verkürzung ist dann

$$\Delta l = AP\int_{r_0}^{r_1}\frac{\frac{r^4}{m^2}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}}\,dr + BP\int_{r_0}^{r_1}\frac{r^2\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}}{1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)}\,dr$$

$$+ CP\int_{r_0}^{r_1}\frac{m^2\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\left(2+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]^2}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{r^2}{m^2}}\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\left(4+\frac{r^2}{m^2}\right)\right]}\,dr,$$

oder mit $\psi = \frac{r}{m}$

$$\Delta l = APm^3\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{\psi^4}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}\,d\psi + BPm^3\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{\psi^2\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}{1+\operatorname{tg}^2\delta\,(4+\psi^2)}\,d\psi$$

$$+ CPm^3\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\delta}+\operatorname{tg}\delta\,(2+\psi^2)\right]^2}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}\left[1+\operatorname{tg}^2\delta\,(4+\psi^2)\right]}\,d\psi.$$

Hierin ist aber

$$\int \frac{\psi^4\, d\psi}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}} = \frac{\psi\left(2\psi^2-\frac{3}{\sin^2\delta}\right)\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}{8}$$

$$+\frac{3}{8}\frac{1}{\sin^4\delta}\ln\left(\psi+\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}\right),$$

$$\int \frac{\psi^2\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}{1+\mathrm{tg}^2\delta\,(4+\psi^2)}\,d\psi = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\delta}\left\{\frac{\psi\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}{2}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2\delta}+7\right)\ln\left(\psi+\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}\right)$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}{\mathrm{tg}\,\delta}\ln\frac{\sqrt{\frac{3\,\mathrm{tg}^2\delta}{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}+\sqrt{\frac{1}{\psi^2\sin^2\delta}+1}}{\sqrt{\frac{3\,\mathrm{tg}^2\delta}{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}-\sqrt{\frac{1}{\psi^2\sin^2\delta}+1}}\right\},$$

$$\int \frac{\left[\frac{2}{\mathrm{tg}\,\delta}+\mathrm{tg}\,\delta\,(2+\psi^2)\right]^2 d\psi}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}\left[1+\mathrm{tg}^2\delta\,(4+\psi^2)\right]} = \frac{\psi\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\mathrm{tg}^2\delta}-1\right)\ln\left(\psi+\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta}+\psi^2}\right)$$

$$+\frac{(1-2\,\mathrm{tg}^2\delta)^2}{2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^3\delta\,\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}\ln\frac{\sqrt{\frac{3\,\mathrm{tg}^2\delta}{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}+\sqrt{\frac{1}{\psi^2\sin^2\delta}+1}}{\sqrt{\frac{3\,\mathrm{tg}^2\delta}{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}-\sqrt{\frac{1}{\psi^2\sin^2\delta}+1}}.$$

Damit ergibt sich mit $R=\sqrt{\frac{3\,\mathrm{tg}^2\delta}{1+4\,\mathrm{tg}^2\delta}}$

$$
\begin{aligned}
\Delta l = Pm^3 \Bigg\{ & A \Bigg[\frac{\psi_1\left(2\psi_1^2 - \dfrac{3}{\sin^2\delta}\right)\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2} - \psi_0\left(2\psi_0^2 - \dfrac{3}{\sin^2\delta}\right)\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0^2}}{8} \\
& \qquad + \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sin^4\delta}\,\ln \frac{\psi_1 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2}}{\psi_0 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0^2}} \Bigg] \\
& + \frac{B}{\operatorname{tg}^2\delta} \Bigg[\frac{\psi_1\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2} - \psi_0\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0^2}}{2} \\
& \qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta} + 7\right) \ln \frac{\psi_1 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2}}{\varphi_0 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0^2}} \\
& \qquad + \frac{3}{2R} \ln \frac{\left(R + \sqrt{\dfrac{1}{\psi_1^2\sin^2\delta} + 1}\right)\left(R - \sqrt{\dfrac{1}{\psi_0^2\sin^2\delta} + 1}\right)}{\left(R - \sqrt{\dfrac{1}{\psi_1^2\sin^2\delta} + 1}\right)\left(R + \sqrt{\dfrac{1}{\psi_0^2\sin^2\delta} + 1}\right)} \Bigg] \\
& + C \Bigg[\frac{\psi_1\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2} - \psi_0\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0}}{2} \\
& \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\operatorname{tg}^2\delta} - 1\right) \ln \frac{\psi_1 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_1^2}}{\psi_0 + \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\delta} + \psi_0^2}} \\
& \qquad + \frac{(1 - 2\operatorname{tg}^2\delta)^2 R}{6\operatorname{tg}^4\delta} \ln \frac{\left(R + \sqrt{\dfrac{1}{\psi_1^2\sin^2\delta} + 1}\right)\left(R - \sqrt{\dfrac{1}{\psi_0^2\sin^2\delta} + 1}\right)}{\left(R - \sqrt{\dfrac{1}{\psi_1^2\sin^2\delta} + 1}\right)\left(R + \sqrt{\dfrac{1}{\psi_0^2\sin^2\delta} + 1}\right)} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
$$

.... (13)

Ist, wie gewöhnlich der Fall, der Winkel φ welchen die Tangente GA mit der Linie GN einschliesst, nur wenig vom rechten Winkel verschieden, so ist

$$\frac{1}{\psi^2 \sin^2\delta} = \frac{\frac{m^2}{r^2}}{\sin^2\delta} = \left(\frac{v}{\omega\, r}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

gegenüber 1 sehr klein und kann mit kleinem Fehler vernachlässigt werden. Also

$$\sqrt{\frac{1}{\psi^2 \sin^2\delta} + 1} = \sim 1,$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2\delta} + \psi^2} = \sim \psi.$$

Ebenso kann gesetzt werden

$$2\psi^2 - \frac{3}{\sin^2\delta} = \sim 2\psi^2$$

Dann folgt aus (12)

$$\rho = r\,\frac{\psi \sin\delta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta\,(4+\psi^2)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

und aus (13)

$$\Delta l = Pm^3 \Big\{ A\left[\frac{\psi_1^4 - \psi_0^4}{4} + \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sin^4\delta}\,\ln\frac{\psi_1}{\psi_0}\right]$$

$$+ \frac{B}{\operatorname{tg}^2\delta}\left[\frac{\psi_1^2 - \psi_0^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta} + 7\right)\ln\frac{\psi_1}{\psi_0}\right]$$

$$+ C\left[\frac{\psi_1^2 - \psi_0^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\operatorname{tg}^2\delta} - 1\right)\ln\frac{\psi_1}{\psi_0}\right]\Big\}$$

$$= Pm^3 \Big\{ A\,\frac{\psi_1^4 - \psi_0^4}{4} + \left(\frac{B}{\operatorname{tg}^2\delta} + C\right)\frac{\psi_1^2 - \psi_0^2}{2}.$$

$$+\left[\frac{3}{8}\frac{A}{\sin^4\delta}-\frac{B}{2\,\mathrm{tg}^2\delta}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2\delta}+7\right)+\frac{C}{2}\left(\frac{5}{\mathrm{tg}^2\delta}-1\right)\right]\ln\frac{\psi_1}{\psi_0}\Bigg\} \qquad \ldots\ldots\ldots(15)$$

Hieraus ergibt sich Δl negativ, d.h. die Feder erleidet eine Verkürzung.

Zusammenfassung.

1. Es wird zunächst die allgemeine Theorie der Elastizität doppelt gekrümmter stabförmiger Körper gegeben.

2. Es wird dann beispielweise die Formänderung der zylindrischen Schraubenfeder unter der Einwirkung der Axialkraft genau ermittelt.

3. Zuletzt wird eine genauere Formel für die Verkürzung der konischen Schraubenfeder unter der Einwirkung der Axialkraft geleitet.