

# Über die Knicklast und die Eigenschwingungszahl eines längsbelasteten Stabes.

Von

Shizuo Ban.

(Eingegangen am 22. April, 1931.)

## 1.

Die Knicklast eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Stabes beträgt nach Euler  $P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ . Die Frage, ob diese Grenzlast durch die Schwingung des Unterlagers beeinflusst wird oder nicht, ist noch nicht geklärt. Es gibt eine umfangreiche Literatur mit grundlegenden Methoden zur Ermittlung der kritischen Werte<sup>(1)</sup> aber der Einfluss der Schwingung auf die Knicklast ist durch diese statischen Betrachtungen nicht bestimmt. Die Probleme der Knickung und der harmonischen Schwingungen sind, nach mathematischer Ansicht, eng miteinander verwandt, und Dr. Ing. W. Engler<sup>(2)</sup> hat in einer neueren Methode zur Bestimmung der Knicklast eines Stabes Schwingungsversuche gemacht, wobei die Knicklast bestimmt werden kann mittels der Winkelgeschwindigkeit der Resonanzschwingung des Stabes, sobald dieser durch einen Versuch mit dem Oszillator in zuerst erzwungene Schwingungen versetzt worden ist. Prof. L. Föppl<sup>(3)</sup> hat die Schwingungsfrequenz des belasteten Stabes untersucht und gefunden, dass die Belastung, bei welcher die Eigenschwingungsfrequenz des Stabes auf Null herabsinkt, mit der Euler'schen übereinstimmt. Die beiden Aufsätze zeigen eine Methode zur Ermittlung der Euler'schen Knicklast auf dynamischem Wege, aber geben keinen Aufschluss über den Einfluss der Schwingung auf dieselbe.

Die Theorie der erzwungenen Schwingung ergibt, dass eine Resonanz entsteht, wenn die Unterlagen eines belasteten Stabes in einer mit der Eigenschwingungsdauer zusammenfallenden Periode erschüttert werden, bis endlich so grosse Ausschläge erreicht werden, dass dann der Stab nicht

mehr stabil genannt werden kann. Diese Belastung muss daher eine kritische Last auf schwingenden Unterlagen sein. Daraus folgt, dass die Gleichungen zur Ermittlung der Eigenschwingungsfrequenz eines belasteten Stabes zur Bestimmung der kritischen Last eines Stabes mit schwingenden Unterlagen benutzt werden.

Für eine rotierende Welle ist die Beziehung zwischen der kritischen Last und der Winkelgeschwindigkeit schon 1883 von Greenhill<sup>(4)</sup> geklärt worden. Bei gelenkiggelagerten Enden ist sie folgendermassen ausgedrückt:

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\rho \cdot \omega^2}{EJ}}$$

wobei  $P$  die Belastung,  $\rho$  die Masse der Welle pro Längeneinheit und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit sind. Falls der Stab sich in Ruhe befindet, muss  $\omega$  verschwinden, und die Grenzlast stimmt dann mit der Euler'schen überein, falls dagegen  $\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$  ist, sinkt dieselbe auf Null herab. Dieser Wert kann nichts anderes sein als die kritische Winkelgeschwindigkeit der ungedrückten Welle.<sup>(5)</sup>

## 2

Nehmen wir die Achse des geraden Stabes als x-Achse, und zählen von hier aus die Ausschläge als  $y$ , so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie des belasteten Stabes

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

wobei wir die Zunahme der Druckkraft, die von dem Eigengewicht des Stabes herrührt, ausser acht gelassen haben. Hat der Stab keine Belastung, so geht die Gl. (1) in die bekannte Schwingungsgleichung eines Stabes über, falls er dagegen sich in Ruhe befindet, muss das dritte Glied der Gleichung verschwinden, und die letztere geht in die Differentialgleichung des labilen Gleichgewichts des geraden Stabes über.<sup>(7)</sup>

Die Lösung der Gleichung gebe ich hier nach Prof. L. Föppl.<sup>(3)</sup> Ich benutze den Ansatz

$$y = Z(x) \cdot \sin \beta t, \quad (2)$$

woraus

$$EJ \frac{d^4 Z}{dx^4} + P \frac{d^2 Z}{dx^2} - \beta^2 \rho Z = 0 \quad (3)$$

folgt. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung 4. Ordnung lautet

$$Z = a \sin \lambda_1 \frac{x}{l} + b \cos \lambda_1 \frac{x}{l} + A \text{Cin} \lambda_2 \frac{x}{l} + B \text{Cos} \lambda_2 \frac{x}{l}, \quad (4)$$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  folgendermassen ausgedrückt sind:

$$\lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{Pl^2}{2EJ}\right)^2 + \frac{\beta^2 \rho l^4}{EJ}} \quad (5a)$$

$$\lambda_2^2 = -\frac{Pl^2}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{Pl^2}{2EJ}\right)^2 + \frac{\beta^2 \rho l^4}{EJ}} \quad (5b)$$

#### Fall 1. DIE BEIDEN ENDEN SIND GELENKIG GELAGERT.

An den Enden  $x=0$  und  $x=l$  müssen die Aufschläge und die Momente verschwinden, d. h.  $y=0$  und  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$  sein. Nehmen wir an, dass  $P$  und  $\beta$  nicht gleichzeitig verschwinden, so muss  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  von Null verschieden sein. Die Grenzbedingungen dann für  $x=0$  fordern

$$b=0 \quad \text{und} \quad B=0,$$

woraus

$$Z = a \sin \lambda_1 \frac{x}{l} + A \text{Cin} \lambda_2 \frac{x}{l}$$

folgt. Die Grenzbedingungen für  $x=l$  fordern

$$a \sin \lambda_1 + A \text{Cin} \lambda_2 = 0,$$

$$-a \lambda_1^2 \sin \lambda_1 + A \lambda_2^2 \text{Cin} \lambda_2 = 0.$$

Die Elimination der Integrationskonstanten  $a$  und  $A$  liefert die Gleichung

$$\sin \lambda_1 \cdot \text{Cin} \lambda_2 \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0,$$

die nur eine Knickbedingung

$$\sin \lambda_1 = 0 \quad (6)$$

ergibt, da  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$  und  $\text{Sin } \lambda_2$  von Null verschieden sind. Die kleinste Wurzel, die die Gl. (6) befriedigt ist  $\pi$ . Daraus folgt.

$$\pi^2 = \frac{Pl^2}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{Pl^2}{2EJ}\right)^2 + \frac{\beta^2 \rho l^4}{EJ}}. \quad (7)$$

Diese Gleichung ist ähnlich der oben erwähnten Beziehung von Greenhill für die rotierende Welle. Wegen der Gl. (2) muss die Schwingungsperiode den Wert  $T = \frac{2\pi}{\beta}$  annehmen und durch Einsetzung von diesem in die Gl. (7) ergibt sich schliesslich die bezweckte Gleichung des Problems in vereinfachter Form

$$\pi^2 - \frac{Pl^2}{EJ} = \frac{4\rho l^4}{EJT^2}. \quad (8)$$

Die kritische Last wird ohne Mühe aus dieser Gleichung berechnet, falls die Schwingungsperiode  $T$  vorläufig gegeben ist. Die Grenzlast schwankt von dem Euler'schen Wert  $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  bis 0, wenn  $T$  die Werte  $\infty$  bis  $\frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{EJ}}$  durchläuft, wobei  $T = \infty$  bedeutet, dass der Stab sich in Ruhe befindet. Der andere Grenzwert  $T = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{EJ}}$  stimmt mit der Eigenschwingungsperiode eines unbelasteten Stabes überein.<sup>(8)</sup>

Die Gleichung (8) ist ohne Zweifel auch brauchbar zur Ermittlung der Eigenschwingungsperiode eines belasteten Stabes.

## Fall 2. DER STAB IST UNTEN FEST EINGESPANNT UND OBEN FREI.

Die Randbedingungen  $Z=0$  und  $\frac{dZ}{dx}=0$  für  $x=0$  ergeben

$$Z(x) = a \sin \lambda_1 \frac{x}{l} + b \cos \lambda_1 \frac{x}{l} - a \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{Sin } \lambda_2 \frac{x}{l} - b \text{Cos } \lambda_2 \frac{x}{l}.$$

Am freien Ende  $x=l$  muss erstens das Moment verschwinden, d.h.

$$\left(\frac{d^2 Z}{dx^2}\right)_l = 0 \quad (a)$$

sein, und zweitens muss das Gleichgewicht der wagrechten Kräfte vorhanden d.h.

$$\frac{P}{g} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_i = EJ \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_i + P \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_i$$

oder, mit Berücksichtigung von  $y_i = Z_i \cdot \sin \beta t$ :

$$-\frac{P}{g} \beta^2 Z_i = EJ \left( \frac{d^3 Z}{dx^3} \right)_i + P \left( \frac{dZ}{dx} \right)_i \quad (\beta)$$

sein.

Eliminiert man  $a$  und  $b$  aus den Bedingungsgleichungen (a) und (β), so erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1^2 \cos \lambda_1 + \lambda_2^2 \text{Cos } \lambda_2}{\lambda_1^2 \sin \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 \text{Sin } \lambda_2} \\ &= \frac{\frac{Pl^2}{EJ} \frac{\beta^2 l}{g} (\cos \lambda_1 - \text{Cos } \lambda_2) + (\lambda_1^3 \sin \lambda_1 - \lambda_2^3 \text{Sin } \lambda_2) - \frac{Pl^2}{EJ} (\lambda_1 \sin \lambda_1 + \lambda_2 \text{Sin } \lambda_2)}{\frac{Pl^2}{EJ} \cdot \frac{\beta^2 l}{g} (\sin \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{Sin } \lambda_2) - (\lambda_1^2 \cos \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2^2 \text{Cos } \lambda_2) + \frac{Pl^2}{EJ} (\lambda_1 \cos \lambda_1 - \lambda_1 \text{Cos } \lambda_2)} \end{aligned} \quad (9)$$

Die Beziehung zwischen der Grenzlast und der Schwingung oder die zwischen der Eigenschwingungsfrequenz und der Belastung ist in der Gl. (9) verborgen. In diesem Fall können wir das Ergebnis durchaus nicht so klar darstellen wie in Gl. (8), aber eine graphische Darstellung ist möglich. Ehe wir darauf näher eingehen, wollen wir nunmehr einige Sonderfälle untersuchen.

Sonderfall 1. Keine Belastung wirkt.

Nehmen wir zunächst an, dass keine Belastung vorhanden ist, so geht die Gl. (9) über in

$$\frac{\cos \lambda + \text{Cos } \lambda}{\sin \lambda + \text{Sin } \lambda} = - \frac{\sin \lambda - \text{Sin } \lambda}{\cos \lambda + \text{Cos } \lambda},$$

$$\text{oder} \quad \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda + 1 = 0, \quad (10)$$

da  $P=0$  und  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  eingesetzt sind.

Die kleinste Wurzel der Gleichung (10), die mit der Bedingungsgleichung zur Ermittlung der Schwingungsfrequenz eines Stabes über-

einstimmt,<sup>(9)</sup> lautet

$$\lambda = 1.875 \quad (11)$$

Sonderfall 2. Die Stabmasse ist vernachlässigt.

Wir untersuchen den Fall, in dem die Stabmasse  $\rho$  unendlich klein ist, dann sind

$$\lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \lambda_2 = 0, \quad (12)$$

und mit Berücksichtigung von  $\text{C}os \lambda_2 = 1$ ,  $\text{S}in \lambda_2 = 0$ ,  $\frac{1}{\lambda_2} \text{C}in \lambda_2 = 1$  aus der Gl. (9) entsteht jetzt

$$\frac{\cos \lambda_1}{\sin \lambda_1} = \frac{\frac{\beta^2 l}{g} (\cos \lambda_1 - 1)}{\frac{\beta^2 l}{g} (\sin \lambda_1 - \lambda_1) - \lambda_1},$$

oder

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{\lambda_1 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}. \quad (13)$$

Sonderfall 3. Der Stab befindet sich in Ruhe.

Falls der Stab sich in Ruhe befindet, d.h.  $\beta = 0$ , kann die Beziehung (12) auch entstehen, und die daraus abgeleitete Gl. (13) noch ihre Richtigkeit behalten, aber wegen  $\beta = 0$  muss das rechte Glied verschwinden. Daraus folgt die Bedingung  $\cos \lambda_1 = 0$ , deren kleinste Wurzel liefert

$$\frac{Pl^2}{EJ} = \lambda_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (14)$$

Der allgemeine Fall.

Beim allgemeinen Fall ist die gesuchte Beziehung in der Gl. (9) verborgen, und es ist wohl nicht direkt möglich, die kritische Last  $P$  zu finden bei gegebenem  $\beta$ , da die Gleichung in  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  transzendent ist, aber wir können mittels vorausgesetzter Parameter mit Abkürzung  $p = \rho l g$ ,

$$n = \frac{Pl^2}{2EJ}, \quad (15)$$

und 
$$m^2 = \frac{\beta^2 \rho l^4}{EJ} = \frac{\beta^2 l}{g} \frac{pl^2}{EJ}, \quad (16)$$

die zusammengehörige Wertetripel  $\frac{Pl^2}{2EJ}$ ,  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$ ,  $\frac{\beta^2 l}{g}$  folgendermassen bestimmen. Der Parameter  $n$  schwankt von 0 bis  $\frac{\pi^2}{8}$  und  $m$  von 0 bis  $1.875^2$  wie bereits in den Sonderfällen behandelt worden ist. Der Ansatz dieser Parameter führt zu

$$\lambda_1^2 = n + \sqrt{n^2 + m^2}, \quad \lambda_2^2 = -n + \sqrt{n^2 + m^2},$$

und ferner zu

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\sqrt{n^2 + m^2}, \quad \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2n, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = m,$$

$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 = 2(2n^2 + m^2),$$

womit der von Gl. (9) aufgelöste Wert

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{EJ}{Pl^2} \frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2 - \frac{Pl^2}{EJ} X}{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_2 \text{sid} \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2 - \lambda_1 \cos \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2)}$$

oder

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{m}{2n} \frac{(2n^2 + m^2) + m^2 \cos \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2 + mn \sin \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2 - nX}{\sqrt{n^2 + m^2} (\lambda_2 \sin \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2 - \lambda_1 \cos \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2)}, \quad (17)$$

mit Abkürzung

$$X = (\lambda_1 \sin \lambda_1 + \lambda_2 \text{Sin} \lambda_2)^2 + (\cos \lambda_1 - \text{Cos} \lambda_2) (\lambda_1^2 \cos \lambda_1 + \lambda_2^2 \text{Cos} \lambda_2), \quad (18)$$

berechnet werden kann, falls die Wertepaar  $n$ ,  $m$  vorher gegeben sind.

Der Wert  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$  wird dann aus

$$\frac{\rho l^2}{2EJ} = \frac{m^2}{2 \frac{\beta^2 l}{g}} \quad (19)$$

bestimmt. Nehmen wir zuerst die Werte  $n$  und  $m$  zwischen 0 und  $\frac{\pi^2}{8}$  bzw. 0 und  $1.875^2$  an, so können wir die zugehörigen Werte  $\frac{\beta^2 l}{g}$  und  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$  aus Gl. (17) und Gl. (19) bestimmen. Die so gefundenen Wertepaare  $\frac{\beta^2 l}{g}$ ,  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$  können wir in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eintragen und damit die Beziehung zwischen  $\frac{Pl^2}{2EJ}$ ,  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$ ,  $\frac{\beta^2 l}{g}$  explizite

darstellen. In Abb. 1 ist für die beliebigen Werte von  $n$  das Bild der  $\frac{\rho l^2}{2EJ}$  als Funktion von  $\frac{\beta^2 l}{g}$  dargestellt. Die Kurve für  $n=0$  ist eine Hyperbel, die durch die Gleichung

$$\frac{\beta^2 l}{g}, \frac{\rho l^2}{2EJ} = \frac{1.875^4}{2} \quad (20)$$

ausgedrückt ist, wogegen die Kurve für  $n = \frac{\pi^2}{8}$ , (d. h. für die Euler'sche Knicklast,) der y-Achse aufliegt. Jede andere Kurve schneidet die Abszissenachse um einen Betrag, der der Gl. (13) genügt.

### Fall 3. DIE STABENDEN SIND BEWEGLICH EINGESPANNT.

Die Grenzbedingungen lauten nunmehr

$$Z=0, \quad \frac{dZ}{dx}=0 \quad \text{für } x=0$$

$$\frac{dZ}{dx}=0, \quad \frac{P}{g} \beta^2 Z + EJ \frac{d^3 Z}{dx^3} = 0 \quad \text{für } x=l.$$

Eliminiert man die Integrationskonstanten  $a, b, A, B$  mittels dieser Grenzbedingungen, so erhält man als Knickgleichung:

$$\frac{Pl^2}{EJ} \cdot \frac{\beta^2 l}{g} = \frac{\lambda_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (\lambda_2 \cos \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2 + \lambda_1 \sin \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2)}{2\lambda_1 - 2\lambda_1 \cos \lambda_1 \text{Cos} \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \text{Sin} \lambda_2} \quad (21)$$

Drei Sonderfälle werden zuerst erläutert.

a). Für  $P=0$  geht die Gl. (21) über in

$$\cos \lambda \cdot \text{Sin} \lambda + \sin \lambda \cdot \text{Cos} \lambda = 0,$$

$$\text{oder} \quad \tan \lambda + \text{Tan} \lambda = 0,^{(9)} \quad (22)$$

da  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  ist. Die kleinste Wurzel der Gl. (22) beträgt

$$\lambda = 2,365. \quad (23)$$

b). Für  $\rho=0$  durch Einsetzung von  $\lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{EJ}$  und  $\lambda_2=0$  in die Gl. (21) erhält man

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{\lambda_1 \sin \lambda_1}{2(1 - \cos \lambda_1) - \lambda_1 \sin \lambda_1}. \quad (24)$$

c). Für  $\beta=0$  erhält man  $\lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{EJ}$ ,  $\lambda_2=0$  und ebenso Gl. (24). Wegen  $\beta=0$  muss das rechte Glied der Gl. (24) verschwinden. Daraus folgt die Bedingungsgleichung  $\sin \lambda_1=0$ , deren kleinste Wurzel ergibt

$$\frac{Pl^2}{EJ} = \lambda_1^2 = \pi^2. \quad (25)$$

Beim allgemeinen Fall zur Auflösung der Gl. (21) gehen wir, wie wir oben erwähnt haben, am einfachsten derart vor, dass wir bei zwischen 0 und  $\frac{\pi^2}{2}$  vorausgesetztem  $n$  den anderen Parameter  $m$  die Werte zwischen 0 und  $2,365^2$  durchlaufen lassen und den von Gl. (21) gelösten Wert

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{m \sqrt{n^2 + m^2}}{2n} \frac{\lambda_2 \cos \lambda_1 \text{Sin } \lambda_2 + \lambda_1 \sin \lambda_1 \text{Cos } \lambda_2}{m - m \cos \lambda_1 \text{Cos } \lambda_2 - n \sin \lambda_1 \text{Sin } \lambda_2}. \quad (26)$$

berechnen und hiernach aus Gl. (19) den Wert  $\frac{pl^2}{2EJ}$  bestimmen. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 bildlich gegeben.

### 3

Vergrössern wir die Belastung, die auf den periodisch schwingenden Stab wirkt, so wird eine Grenzlast erreicht, bei welcher der Stab in Resonanz schwingt und instabil wird. Diese Grenzlast haben wir schon die Knicklast des schwingenden Stabes genannt. Nach den theoretischen Untersuchungen wird die Knicklast kleiner, je grösser die Schwingungsfrequenz ist, indem sie zugleich bei einer bestimmten Schwingungsfrequenz auf Null herabsinkt.

Da der Einfluss der Schwingung auf die Knicklast so gross ist, muss der Sicherheitsgrad jedes Druckstabes von Maschinen, Fachwerken, Schiffen usw., der stets mit konstanter Periode schwingt, nach oben erwähnter Theorie bestimmt werden. Ist die Schwingungsfrequenz grösser als die Eigenschwingungsfrequenz des belasteten Stabes, so müssen wir zur Bestimmung des Sicherheitsgrades die zweite Knicklast berücksichtigen.

Abb. 1.

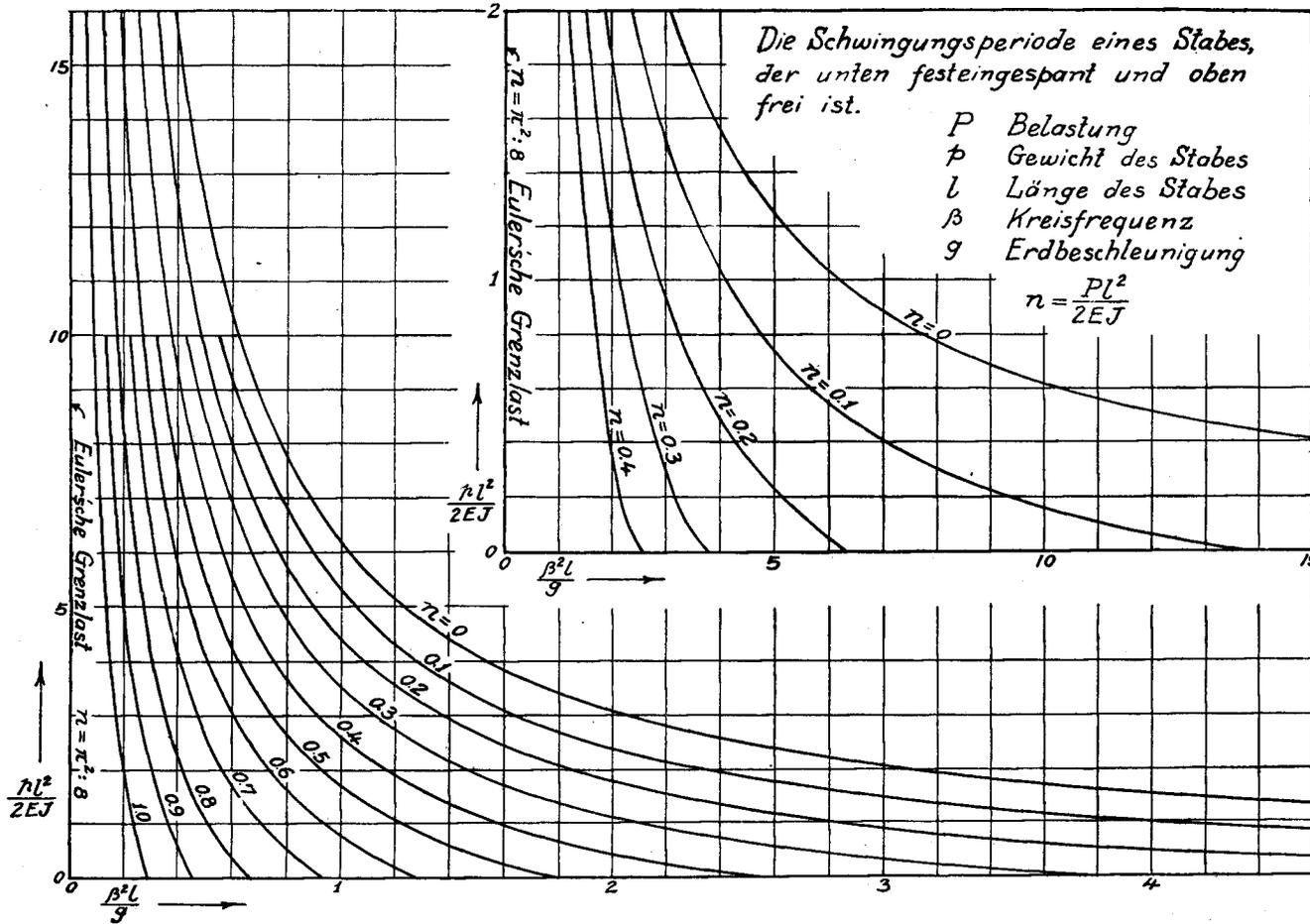
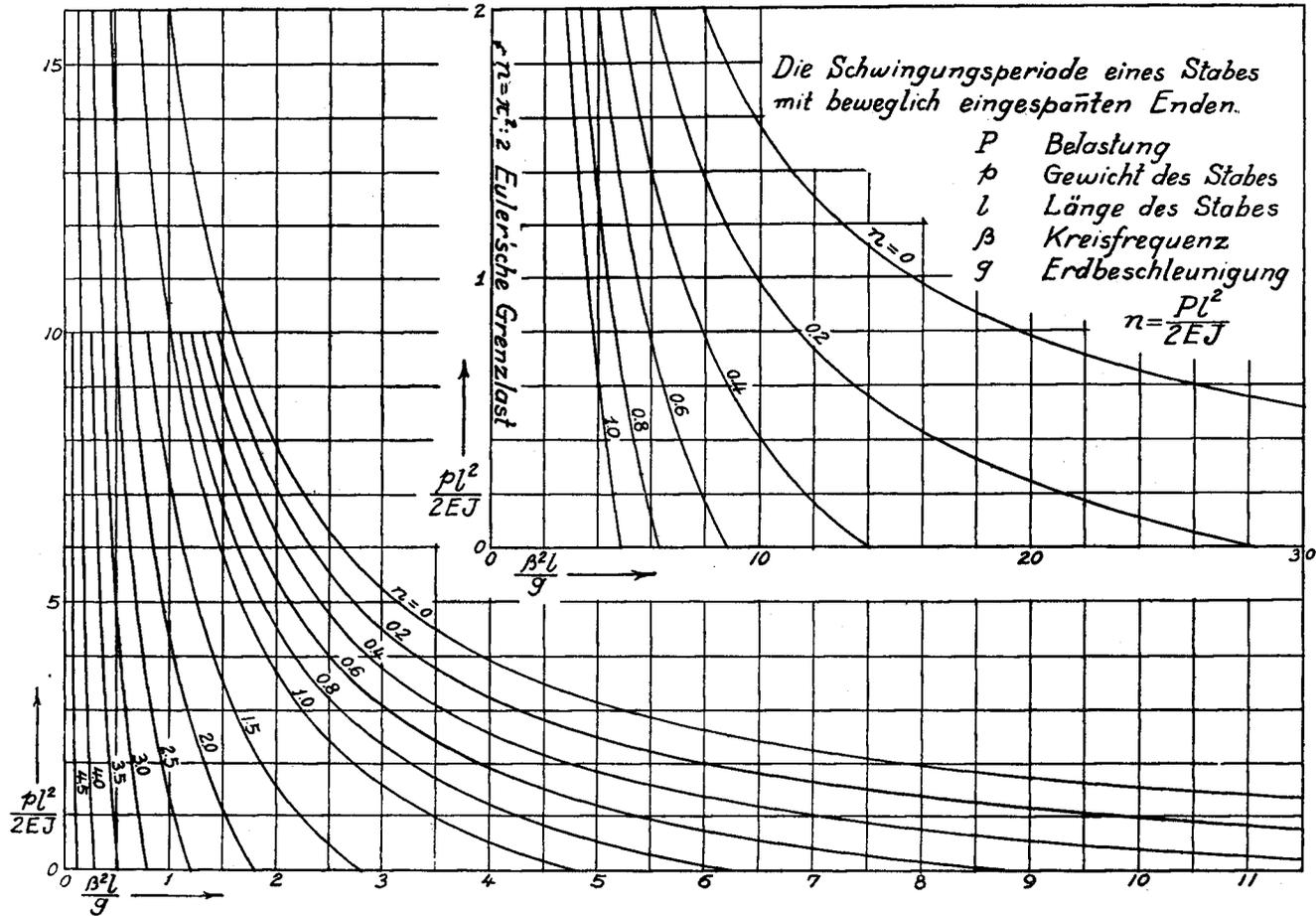


Abb. 2.



Durch Einsetzung der zweiten Wurzel der Gl. (6) in Gl. (5a) lautet die Beziehung zwischen der Knicklast und der Schwingungsfrequenz eines gelenkiggelagerten Stabes:

$$(2\pi)^4 - \frac{Pl^2}{EJ} (2\pi)^2 = \frac{\beta^2 l}{g} \cdot \frac{pl^2}{EJ} \quad (27)$$

Abb. 3.

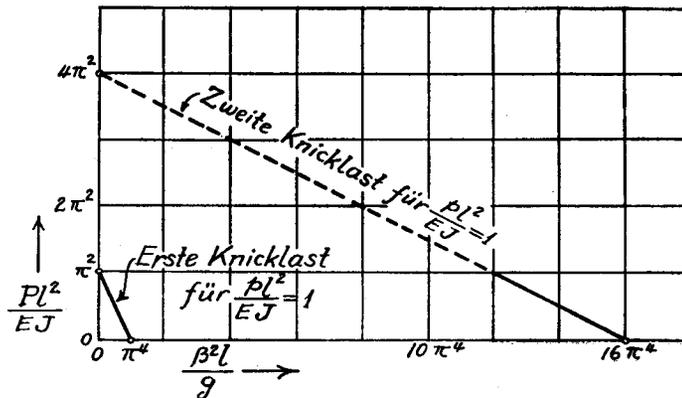


Abb. 3 zeigt den Verlauf der ersten und zweiten Knicklast dieses Stabes für  $\frac{pl^2}{EJ} = 1$  als Funktion von  $\frac{\beta^2 l}{g}$ . Überschreitet die Schwingungsfrequenz den Grenzwert, d. h. die Eigenschwingungsfrequenz, so haben wir plötzlich eine grosse Grenzlast, diese aber ist zum grössten Teil bedeutungslos, da der Sicherheitsgrad für Ruhezustand noch kleiner gehalten ist. Für einen Stab, der unten eingespannt und oben frei, oder an beiden Enden beweglich eingespannt ist, können wir gleichartige Bilder in gekrümmten Linien zeigen, sobald die Kurventabelle, ähnlich der die wir in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellt haben, fertiggestellt ist. Wegen der Umständlichkeit der Berechnung wollen wir hier nicht darauf eingehen.

Auf die wichtige Frage, ob beim Auftreten des unelastischen Bereiches das Engesser'sche Knickmodul  $T^{(10)}$  statt der Elastizitätszahl  $E$  brauchbar ist oder nicht, soll hier ebenfalls nicht eingegangen werden.

## 4

Beobachten wir schliesslich die Eigenschwingungsfrequenz eines

belasteten Stabes mittels der vorher gegebenen Ergebnisse, so finden wir, dass mit wachsender Belastung die Schwingungszahl sich Null nähert, da der Stab mit Euler'scher Grenzlast ausknickt und nicht mehr zurück-schwingen kann.

In der Theorie der Rahmenschwingungen ist in der Regel die Differentialgleichung der Stabschwingungen

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (28)$$

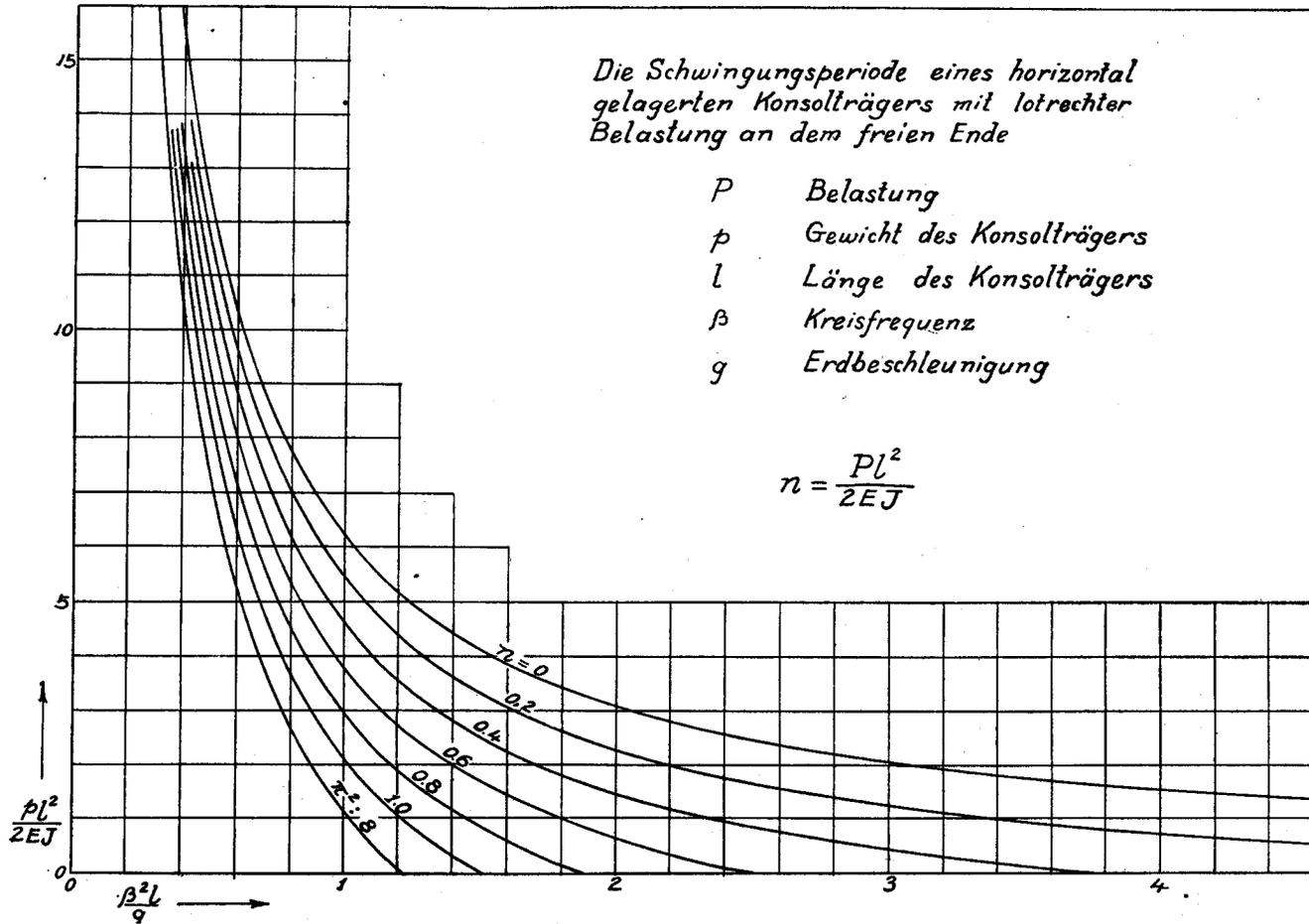
für den Riegel und den Ständer verwendet. Die Belastung auf dem Ständer ist in der grundlegenden Gleichung völlig weggelassen, dafür aber ist sie in der Grenzbedingung für das Gleichgewicht der wagrechten Kräfte berücksichtigt. Die Frequenzgleichung von Dr. Ing. W. Prager<sup>(11)</sup> für Rahmenschwingung mit unverschiebbaren Ecken und die von Dipl. Ing. T. Kohno<sup>(12)</sup> für wagrechte Schwingung sind dem oben erwähnten Verfahren entnommen. Dieses angenäherte Verfahren ist nur passend, wenn die Belastung der Knicklast gegenüber sehr klein gehalten ist. Dass die Schwingungszahl bis auf Null herabsinken muss, wenn die Belastung mit der Knicklast des Rahmens<sup>(13)</sup> übereinstimmt, kann bei diesem angenäherten Verfahren nicht erläutert werden.

Die Frequenzgleichung eines horizontal gelagerten Konsolträgers mit einer lotrechten Belastung an dem freien Ende kann aus Gl. (28) ohne Zweifel ermittelt werden, und beträgt<sup>(14)</sup>

$$\frac{P}{p} = \frac{1 + \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda}{\lambda (\text{Cos } \lambda \cdot \sin \lambda - \text{Sin } \lambda \cdot \cos \lambda)}, \quad (29)$$

wobei  $\lambda^2 = \beta l^2 \sqrt{\frac{\rho}{EJ}}$  ist. Es ist klar, dass die Anwendung dieser Gleichung für einen Ständer, der unten festeingespannt und oben frei ist, nicht einwandfrei ist, da entsprechend  $\beta=0$ , (d. h. im Ruhezustand,) wir keinen endlichen Wert von  $P$  erhalten. Um einen Vergleich anstellen zu können, habe ich in Abb. 4 das Bild der aus Gl. (29) bestimmten Werte  $\frac{p l^2}{2EJ}$  als Funktion von  $\frac{\beta l}{g}$  gezeigt. Der Schnitt jeder Kurve mit der  $x$ -Achse ist berechnet aus der Gleichung

Abb. 4.



$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{1,5}{n}, \tag{30}$$

die sich unmittelbar aus der einfachen Schwingungstheorie einer Masse  $\frac{P}{g}$  mit einer Richtkraft  $\frac{3EJ}{l^2}$  ergibt.

Vergleichen wir Abb. 4 und Abb. 1 miteinander, so finden wir, dass die Abweichung der Kurven grösser wird, je mehr die Belastung sich der Knicklast nähert, und dass, bei gegebenem Wert  $n$ , das Verhältnis der Werte  $\frac{\beta^2 l}{g}$  für den Konsolträger zu demjenigen des Ständers von den Werten  $\frac{pl^2}{2EJ}$  sehr wenig beeinflusst wird. Diese Verhältniszahlen sind in nächster Tabelle eingetragen mit dem Zeichen  $k$ , wobei die Werte für  $\frac{pl^2}{2EJ} = 0$  aus der von Gl. (13) und Gl. (30) herrührenden Beziehung

$$k = \frac{1,5}{n} \cdot \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1 \cos \lambda_1}, \tag{31}$$

und die für  $\frac{pl^2}{2EJ} = 10$  nach der Kurventabelle berechnet sind.

$n =$	$\frac{\pi^2}{8}$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0
$k$ für $\frac{pl^2}{2EJ} \left\{ \begin{array}{l} = 0 \\ = 10 \end{array} \right.$	$\infty$	5.21	2.82	1.94	1.47	1.19	1
	$\infty$	5.13	2.70	1.87	1.40	1.19	1

Es ist bemerkenswert, dass bei  $n=0,2$  (ungefähr  $\frac{1}{6}$  der Knicklast) eine wesentliche Abweichung vorhanden ist. Daraus folgt, dass die Brauchbarkeit der Gl. (28) zur Ermittlung der Frequenzgleichung eines Ständers nicht abhängig ist von dem Verhältnis  $P:p$ , sondern streng bedingt, dass die Belastung im Vergleich zur Knicklast sehr klein sein muss.

Nebenbei ist auch zu bemerken, dass zur Ermittlung der Eigenschwingungszahl die angenäherte Theorie vielleicht weniger Abweichung bei einem Rahmen als bei einem Stab zeigen wird, da der Riegel keine wesentliche zentrische Belastung hat, und der Ständer wegen des Vorhandenseins des Biegemoments steif entworfen ist.

## 5

Aus der Tatsache, dass das Verhältnis der Werte  $\frac{\beta^2 l}{g}$  für den Konsolträger zu denjenigen für den Ständer von den Werten  $\frac{pl^2}{2EJ}$  sehr wenig beeinflusst wird, schloss ich, dass die Kurven in Abb. 4 die Kurven in Abb. 1 beinahe decken könnten, wenn die Abszissen der ersteren mit einem den einzelnen Kurven entsprechenden Koeffizienten multipliziert werden. Diese Koeffizienten können aus Gl. (31) bestimmt werden. Die angenäherte Frequenzgleichung des belasteten Stabes lautet dann:

$$\frac{\beta^2 l}{g} \frac{pl^2}{2EJ} = \frac{\lambda^4}{3} \frac{\lambda_1^3 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}, \quad (32)$$

wobei  $\lambda_1^2 = \frac{Pl^2}{EJ}$  und  $\lambda$  die Wurzel der Gleichung

$$\frac{P}{p} = \frac{1 + \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda}{\lambda (\text{Cos } \lambda \cdot \sin \lambda - \text{Sin } \lambda \cdot \cos \lambda)} \quad (33)$$

ist. Für  $P=0$  liefert die Gl. (33)  $1 + \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda = 0$ , wonach  $\lambda = 1,875$ . Durch Einsetzung in die Gl. (32) und mit Berücksichtigung von

$$\text{Lim}_{\lambda_1=0} \frac{\lambda_1^3 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1} = 3$$

erhält man die Gleichung

$$\frac{\beta^2 l}{g} \cdot \frac{pl^2}{EJ} = 1,875^4,$$

woraus die Eigenschwingungszahl berechnet wird. Ferner für  $\beta=0$  erhält man aus Gl. (32) unmittelbar die Knickbedingung  $\cos \lambda_1 = 0$ . Betrachten wir schliesslich den Fall, in dem das Gewicht des Stabes unendlich klein ist, so erhalten wir aus Gl. (33)  $\lambda=0$ . Die Gleichung (32) muss dann in die Form

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{\lambda^4}{3} \cdot \frac{P}{p} \frac{\lambda_1 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1},$$

oder

$$\frac{\beta^2 l}{g} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{1 + \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda}{\text{Cos } \lambda \cdot \sin \lambda - \text{Sin } \lambda \cdot \cos \lambda} \frac{\lambda_1 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}$$

umgeschrieben werden. Für  $\lambda=0$  erhalten wir

$$\frac{\beta^2 L}{g} = \frac{\lambda_1 \cos \lambda_1}{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1},$$

da eine Beziehung

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^3 (1 + \cos \lambda \cdot \text{Cos } \lambda)}{\text{Cos } \lambda \cdot \sin \lambda - \text{Sin } \lambda \cdot \cos \lambda} = 3$$

vorhanden ist.

Ein derartiges Annäherungsverfahren wird für jeden Stab mit anders eingespannten Enden aufgestellt.

### Literaturverzeichnis

- (1) E. H. SALMON, Columns. u. Handbuch der Physik. Bd VI. S 278.
- (2) W. ENGLER, Untersuchung der Knickfestigkeit und des Spannungsverhältnisses von Balken auf dynamischem Wege. 1922.  
W. ENGLER, Eine neue Methode zur Untersuchung der Knickfestigkeit und des Spannungsgrads. Der Bauingenieur. 1926. S 343.
- (3) L. FÖPPL, Bestimmung der Knicklast eines Stabes aus Schwingungsversuchen. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. 1924.
- (4) A. G. GREENHILL, On the Stability of a Rotating Shaft. Proc. I. M. E. 1883.
- (5) A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik. Bd IV. S 301.
- (6) J. PRESCOTT, Applied Elasticity. p 239.
- (7) F. BLEICH, Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen. Der Eisenbau 1919. S 27.
- (8) A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik. Bd IV. Fünfte Auf. S 256.
- (9) E. SCHEIDER, Mathematische Schwingungslehre. S 25.
- (10) FR. ENGESSER, Über Knickfragen. Schweiz. Bauzeitung, Bd XXVI. S 24. 1895.
- (11) W. PRAGER, Berechnung der Eigenschwingung von Rahmenfundamenten. Bauingenieur 1927. Heft 8.
- (12) T. KOHNO, The Theory of the Vibration of Rectangular Frames. Journal of the Institute of Japanese Architects. 1927 p. 1363.
- (13) R. v. MISES und J. RATZERSDORFER, Die Knicksicherheit von Rahmentragwerken. Z. S. f. angew. Math. u. Mech. 1926. S 181.
- (14) J. PRESCOTT, Applied Elasticity. p. 214.