

# Knickung der rechteckigen Platte bei veränderlicher Randbelastung.

Von Shizuo Ban.

## Inhaltsverzeichnis

- Einleitung
- Erster Abschnitt. Lösung durch Differenzgleichung.
- 1. Die Differentialgleichung der Knickfläche und ihre Anwendung auf die gleichmässig gedrückte Platte.
- 2. Uebergang zum Differenzenausdruck.
- 3. Berechnung der Knickkraft.

- Zweiter Abschnitt. Lösung nach der Arbeitsmethode.
- 4. Bedingungsgleichung der kleinsten Arbeit.
- 5. Anwendung der Arbeitsmethode.
- 6. Kleinste Knickkraft und zugehörige Anzahl der Halbwellen.
- Schlussfolgerung.

## Einleitung.

Wenn es sich um die Knickung der Platte handelt, beschränkt sich die Untersuchung stets auf das Problem, das hauptsächlich mit der lokalen Sicherheit der eisernen Bauteile zu tun hat. Neuerdings wird aber eine Schale oder Scheibe als neues Tragwerk in die Eisenbetonkonstruktion eingeführt, wodurch es ermöglicht ist, einen grossen Raum mit einer aussergewöhnlich leichten Konstruktion zu überdecken. Da dies Tragwerk sehr dünnwandig gebaut werden kann, verlangt bei dessen Entwurf die Frage der Stabilität besondere Beachtung, indem man zuweilen Knickungsfälle zu berücksichtigen hat, die so bei der eisernen Konstruktion selten vorkommen. Zum Beispiel werden in einer Teilscheibe des Falterwerks Normalspannungen und Schubspannungen zugleich hervorgehoben, deren Verteilung in Längs- und Querrichtung je für sich eine andere ist.<sup>1)</sup> Um die Stabilität des Falterwerks theoretisch verfolgen zu können, haben wir noch viele Knickprobleme in bezug auf die Platte unter verschiedenen Spannungszuständen und Randbedingungen in Betracht zu ziehen. Der Verfasser gibt vorliegend eine angenäherte Lösung für eine rechteckige Platte, die an einem Seitenpaar linear veränderlich belastet ist. Die Stützung der Platte ist so angenommen, dass sie an drei Seiten  $x=0$ ,  $y=0$  und  $y=b$  unbeweglich und an der vierten, der Belastung parallel laufenden Seite elastisch gestützt ist. (Abb. 1)

## Erster Abschnitt. Lösung durch die Differenzgleichung.

### 1. Die Differentialgleichung der Knickfläche und ihre Anwendung auf die gleichmässig gedrückte Platte.

Wir nehmen den Koordinatenursprung an einer Ecke der Platte und lassen sie von den Seiten  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$  und  $y=b$  begrenzt sein. Bezeichnen wir mit  $w$  die Durchbiegung der

Platte, mit  $N$  die Plattensteifigkeit und ferner mit  $n_y(x)$  die Belastung, die auf den Rändern  $y=0$  und  $y=b$  in  $y$ -Richtung wirkt, so lautet bekanntlich die Differentialgleichung der Knickfläche

$$N \Delta \Delta w = -n_y(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots \dots \dots (1)$$

wobei die Druckspannung als positiv gerechnet ist.<sup>2)</sup>

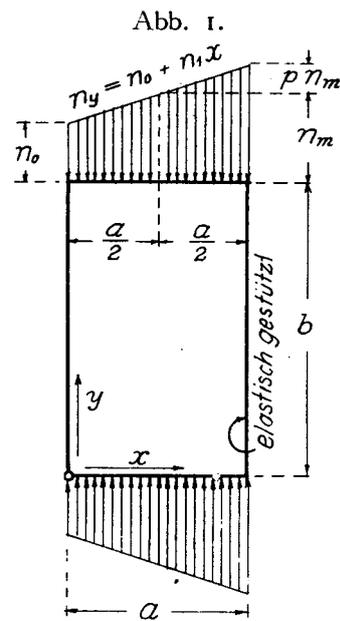


Abb. 1.

Da die Platte an den Rändern  $y=0$  und  $y=b$  gestützt ist, nehmen wir den Ansatz

$$w = X \cdot \sin \lambda y, \dots \dots \dots (2)$$

wo  $\lambda = \frac{m\pi}{b} \dots \dots \dots (3)$

und  $X$  eine Funktion von  $x$  ist. Die Fläche (2) befriedigt betreffs des Seitenpaars  $y=0$  und  $y=b$  die Grenzbedingungen. Die neu eingeführte Funktion  $X$  ist so zu wählen, dass sie der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^4 X = + \frac{n_y(x)}{N} \lambda^2 X \dots \dots (4)$$

1) Ueber die Verteilung der Spannung in Falterwerk geben folgende Aufsätze Auskunft:  
 Ehler. Beton und Eisen, 1930. S. 281. Craemer. Beton und Eisen, 1930. S. 276.  
 Gruber. I. Abhandlung d. I. V. B. H. 1932.

2) Nádai. Elastische Platten.

und den Grenzbedingungen bei dem Seitenpaar  $x=0$  und  $x=a$  genügt. Da die Platte an der Seite  $x=0$  aufliegend gestützt ist, folgen nachstehende Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} X|_{x=0} &= 0 \\ \frac{d^2 X}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

Wir stellen uns vor, dass die Platte bei  $x=a$  mit einer Bördelung eingefasst ist und letztere bei der Knickung elastischen Widerstand leistet. Ferner nehmen wir an, dass sowohl die Bördelung als auch die Platte an dem Rand  $x=a$  in dieselbe Sinuslinie

$$\zeta = X \sin \lambda y$$

verbogen werde. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie eines Balkens

$$EJ_b \frac{d^4 \zeta}{dy^4} = q(y)$$

erhalten wir die Belastung auf der Bördelung:

$$q(y) = EJ_b \cdot X \cdot \lambda^4 \cdot \sin \lambda y,$$

wobei  $J_b$  das Trägheitsmoment der Bördelung bedeutet. Diese Belastung muss mit der Stützkraft in dem Plattenschnitt  $x=a$  in Gleichgewicht sein, woraus folgt

$$N \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} = EJ_b X \lambda^4 \sin \lambda y$$

oder mit dem Ansatz (2)

$$\left. \frac{d^3 X}{dx^3} - \lambda^2(2-\nu) \frac{dX}{dx} \right|_{x=a} = \gamma \lambda^4 X|_{x=a} \dots\dots(6),$$

$$\left. \begin{aligned} (u_1^2 - \nu \lambda^2) \text{Sin } u_1 a \\ \{ u_1^3 - \lambda^2 u_1 (2-\nu) \} \text{Cos } u_1 a - \gamma \lambda^4 \text{Sin } u_1 a \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \{ u_2^3 + \lambda^2 u_2 (2-\nu) \} \text{cos } u_2 a + \gamma \lambda^4 \text{sin } u_2 a \end{aligned} \right\} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

Setzen wir  $\gamma = \infty$  in Gl. (11) ein, so erhalten wir die bekannte Knickbedingung für eine ringsum frei gestützte Platte:

$$\sin u_2 a = 0,$$

woraus sich für die Knickkraft

$$\frac{n}{N} a^2 = \pi^2 \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{b^2}{a^2} + 1 \right)^2 \dots\dots\dots(12)$$

ergibt. Falls die Seite  $x=a$  ganz frei ist, setzen wir einfach  $\gamma=0$  in Gl. (11) ein.<sup>4)</sup>

Numerische Rechnung mit  $\nu=0$  und  $a:b=1$  liefert

$$\frac{n}{N} a^2 = 4\pi^2 \quad \text{für } \gamma = \infty$$

$$\frac{n}{N} a^2 = 15,16 \quad \text{für } \gamma = 0$$

worin  $\gamma = EJ_b : N$  ist.

Zu der Voraussetzung, dass die Platte mit der Bördelung biegungsfrei verbunden sei, tritt noch die Bedingung hinzu

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} - \nu \lambda^2 X \right|_{x=a} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

Um eine Vergleichsmöglichkeit zu bieten, gibt der Verfasser zuerst die strenge Lösung für eine gleichmässig gedrückte Platte. Falls die Randbelastung gleichmässig verteilt ist, erhalten wir aus Gl. (4) eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + (\lambda^2 - \mu^2)\lambda^2 X = 0, \dots\dots\dots(8)$$

worin  $\mu^2 = \frac{n_y}{N} \dots\dots\dots(9)$

ist. Mit den Abkürzungen

$$u_1 = \sqrt{\lambda(\mu + \lambda)}, \quad u_2 = \sqrt{\lambda(\mu - \lambda)} \dots\dots\dots(10)$$

lässt sich die Lösung von Gl. (8) in der Form

$$X = A \text{Cos } u_1 x + B \text{Sin } u_1 x + C \text{cos } u_2 x + D \text{sin } u_2 x$$

ausdrücken.<sup>5)</sup> Infolge der Randbedingungen auf der Seite  $x=0$  verschwinden die Koeffizienten  $A$  und  $C$ . Der Ausdruck vereinfacht sich demnach zu

$$X = B \text{Sin } u_1 x + D \text{sin } u_2 x.$$

Eliminiert man die übrigen Koeffizienten  $B$  und  $D$  an Hand der beiden Grenzbedingungen (6) und (7), so erhält man die Knickbegingung:

$$(u_2^2 + \nu \lambda^2) \text{sin } u_2 a \left. \begin{aligned} \{ u_2^3 + \lambda^2 u_2 (2-\nu) \} \text{cos } u_2 a + \gamma \lambda^4 \text{sin } u_2 a \end{aligned} \right\} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

und  $\frac{n}{N} a^2 = 24,00$  für  $\gamma = 0,558a$ .

2. Uebergang zum Differenzenausdruck.

Sehen wir von der gleichmässig verteilten Belastung ab, so stossen wir auf Schwierigkeiten, die Grundgleichung (4) zu lösen. In einem solchen Fall empfiehlt es sich, die Gl. (4) in Differenzenausdruck zu bringen, wie man ihn bei Platten- oder Scheibenproblem seit Jahren verwendet.<sup>6)</sup> Mit diesem Ausdruck lässt sich die Knicklast nach der Methode der elastischen Gelenkkette errechnen, die Henky für die Knickung des Stabwerkes benutzt hatte.<sup>6)</sup> Da wir nur mit der Grundgleichung (4) zu tun haben, brauchen wir gar keine partielle Differenzengleichung zu nehmen, und die Berechnung wird darum so einfach, wie bei der Stabknickung.

3) Nádai. Elastische Platten.

4) Dieselbe Bedingung wurde 1913 von Timoschenko aufgestellt. Vgl. Z. Math. u. Phys. 1913.

5) H. Marcus. Elastische Gewebe. 1924. H. Bay. Ueber den Spannungszustand in hohen Trägern. 1931.

6) Henky. Der Eisenbau. 1920.

Für eine linear veränderliche Belastung

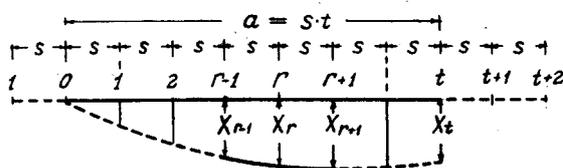
$$n_y(x) = n_0 + n_1 x \dots\dots\dots (13)$$

entsteht

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{n_0 + n_1 x}{N} \right) X = 0 \dots (14)$$

Um den Differentialquotienten als Differenzenquotient ausdrücken zu können, teilen wir die ganze Strecke  $a$  in  $t$  gleiche Intervalle  $s$  ein, und ersetzen eine beliebige Strecke der  $X$ -Kurve  $X_{r-1}$ ,  $X_r$ ,  $X_{r+1}$  durch eine Parabel, deren Gleichung lautet (Abb. 2)

Abb. 2



$$X = \frac{X_{r+1} - 2X_r + X_{r-1}}{2s^2} x^2 + \frac{X_{r+1} - X_{r-1}}{2s} x + X_r$$

Die ersten und zweiten Differenzenkoeffizienten dieser Ersatzkurve an der Stelle  $r$  sind genähert

$$X^I = \frac{dX}{dx} = \frac{X_{r+1} - X_{r-1}}{2s} \dots\dots\dots (15)$$

$$X^{II} = \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X_{r+2} - 2X_r + X_{r-1}}{s^2} \dots\dots\dots (16)$$

Eine analoge Ueberlegung führt weiter zu

$$X^{III} = \frac{d^3 X}{dx^3} = \frac{X_{r+2} - 2X_{r-1} - 2X_{r+1} + X_{r-2}}{2s^3} \dots\dots\dots (17)$$

$$X^{IV} = \frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{X_{r+2} - 4X_{r+1} + 6X_r - 4X_{r-1} + X_{r-2}}{s^4} \dots\dots\dots (18)$$

Damit ist es gelungen, die notwendigen Differentialquotienten in Differenzenausdruck zu geben.

Setzen wir Gl. (16) und (18) in Gl. (14) ein, so geht die letzte in eine Differenzengleichung über:

$$X_{r-2} - k_1 X_{r-1} + \left( k_2 - \lambda^2 s^4 \frac{n_0 + n_1 r s}{N} \right) X_r - k_1 X_{r+1} + X_{r+2} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{wo } \left. \begin{aligned} k_1 &= 4 + 2\lambda^2 s^2 \\ \text{und } k_2 &= 6 + 4\lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ist. In vorliegenden Untersuchungen werden wir stets die mittlere Druckspannung  $n_m$  berechnen, und es empfiehlt sich demnach, folgende Ansätze

$$\text{und } \left. \begin{aligned} n_m &= n_0 + n_1 \frac{st}{2} \\ p \cdot n_m &= n_1 \frac{st}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{oder umgekehrt } \left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{2n_m p}{st} \\ \text{und } n_0 &= (1-p)n_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

einzuführen. Wir bezeichnen mit  $p$  die Ungleichförmigkeit der Belastung. Unter  $p=0$  verstehen wir eine gleichmässige und unter  $p=1$  bzw.  $p=-1$  eine derartige Verteilung der Belastung, dass die letztere an dem Rand  $x=0$  bzw.  $x=a$  verschwindet. Mit den Ansätzen (22) und ferner mit

$$\frac{n_m}{N} = \mu^2 \dots\dots\dots (23)$$

erhalten wir aus Gl. (19)

$$\begin{aligned} X_{r-2} - k_1 X_{r-1} + \left[ k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 \left\{ 1 - \left( 1 - 2 \frac{r}{t} \right) p \right\} \right] X_r \\ - k_1 X_{r+1} + X_{r+2} = 0, \\ r = 1, 2, \dots, t \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

Zunächst wollen wir die Randbedingungen in Differenzenausdruck angeben. Wir denken uns die Knickfläche über die Grenzlinien  $x=0$  und  $x=a$  ausgedehnt und fügen noch die Teilpunkte  $-1$ ,  $t+1$  und  $t+2$  hinzu. Die Grenzbedingungen am Rand  $x=0$  fordern

$$X_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{X_{-1} - 2X_0 + X_1}{s^2} - \lambda^2 \nu X_0 = 0$$

$$\text{oder } X_0 = 0 \quad \text{und} \quad X_{-1} = -X_1 \dots\dots\dots (25)$$

Am anderen Rand  $x=a$  soll das Biegemoment verschwinden, d.h.

$$\left. \frac{d^2 X}{dx^2} - \nu \lambda^2 X \right|_{x=a} = 0$$

$$\text{oder } \frac{X_{t+1} - 2X_t + X_{t-1}}{s^2} - \lambda^2 \nu X_t = 0,$$

woraus folgt

$$X_{t+1} = (2 + \nu \lambda^2 s^2) X_t - X_{t-1} \dots\dots\dots (26)$$

Das Gleichgewicht der Stützkraft an dem Plattenende  $x=a$  bedingt

$$\begin{aligned} X_{t+2} - 2X_{t+1} + 2X_{t-1} - X_{t-2} \\ - (2 - \nu) \lambda^2 s^2 (X_{t+1} - X_{t-1}) = 2\gamma s^3 \lambda^4 X_t \end{aligned}$$

Setzen wir Gl. (26) in die obige ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} X_{t+2} = X_{t-2} - 2(k_1 - 2 + \nu \lambda^2 s^2) X_{t-1} \\ + \{ 2k_1 - 4 + \nu(2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2\gamma s^3 \lambda^4 \} X_t \dots (27) \end{aligned}$$

Nun schreiben wir bei Gl. (24) für jeden Teilpunkt  $r=1, 2, \dots, t$  und erhalten dadurch  $t$  Gleichungen, die jedoch  $t+4$  Unbekannte einschliesslich  $X_{-1}$ ,  $X_0$ ,  $X_{t+1}$  und  $X_{t+2}$  enthalten. Die vier Unbekannten lassen sich ohne weiteres an Hand der Gleichungen (25), (26) und (27) eliminieren. Es entstehen nun  $t$  Gleichungen mit  $t$  Unbekannten  $X_1, X_2, \dots, X_t$ , deren Elimination die Knickbedingung liefert.

3. Berechnung der Knickkraft.

Wir zeigen hier beispielsweise eine Anwendung des oben erwähnten Verfahrens mittels der Differenzgleichung, indem wir die Breite  $a$  in 4 Teile zerlegen. Wir setzen demnach  $s = \frac{a}{4}$  und  $t=4$  in Gl. (24) ein und wenden dieselbe auf die Teilpunkte 1, 2, 3 und 4 an.

Für  $r=1$ :

$$X_{-1} - k_1 X_0 + \{k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0.5p)\} X_1 - k_1 X_2 + X_3 = 0.$$

Wegen  $X_0=0$  und  $X_{-1} = -X_1$  erhalten wir

$$\{k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0.5p)\} X_1 - k_1 X_2 + X_3 = 0 \dots\dots\dots (a)$$

Für  $r=2$ :

$$-k_1 X_1 + (k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2) X_2 - k_1 X_3 + X_4 = 0 \dots (b)$$

$$\begin{vmatrix} k_2 - 1 - \psi_1 & -k_1 & 1 & 0 \\ -k_1 & k_2 - \psi_2 & -k_1 & 1 \\ 1 & -k_1 & k_2 - 1 - \psi_3 & -k_1 \\ 0 & 1 & -(k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) & \frac{1}{2} \{k_2 - 4 - \psi_4 - k_1 \nu s^2 \lambda^2 + \nu(2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2\gamma s^3 \lambda^4\} \end{vmatrix} = 0, \dots\dots\dots (28)$$

worin die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0.5p), \\ \psi_2 &= \lambda^2 s^4 \mu^2, \\ \psi_3 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0.5p), \end{aligned} \right\}$$

Für  $r=3$  und  $r=4$ :

$$X_1 - k_1 X_2 + \{k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0.5p)\} X_3 - k_1 X_4 + X_5 = 0$$

$$X_2 - k_1 X_3 + \{k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p)\} X_4 - k_1 X_5 + X_6 = 0$$

Durch Einsetzung der Randbedingungen gemäss Gl. (26) und (27), gehen die letzten zwei Gleichungen über in

$$X_1 - k_1 X_2 + \{k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0.5p)\} X_3 - (k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) X_4 = 0 \dots\dots\dots (c)$$

$$2X_2 - 2(k_1 - 2 + \nu s^2 \lambda^2) X_3 + \{k_2 - 4 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p) - k_1 s^2 \lambda^2 \nu + \nu(2 - \nu) \lambda^4 s^4 + 2\gamma s^3 \lambda^4\} X_4 = 0 \dots\dots\dots (d)$$

Durch Elimination der Unbekannten  $X_1, X_2, X_3$  und  $X_4$  in den Gl. (a), (b), (c) und (d) erhalten wir die gesuchte Knickbedingung:

$$\left. \begin{aligned} \psi_4 &= \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + p), \\ k_1 &= 4 + 2\lambda^2 s^2, \\ \text{und } k_2 &= 6 + 4\lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

eingeführt sind.

Numerische Berechnung mit  $\nu=0, a:b=1$  und  $\lambda=\pi:b$  liefert die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 7.8479 - (1 - 0.5p) \lambda^2 s^4 \mu^2 & -5.2337 & 1 & 0 \\ -5.2339 & 8.8479 - \lambda^2 s^4 \mu^2 & -5.2337 & 1 \\ 1 & -5.2337 & 7.8479 - (1 + 0.5p) \lambda^2 s^4 \mu^2 & -3.2337 \\ 0 & 1 & -3.2337 & 2.4240 - \frac{1}{2}(1 + p) \lambda^2 s^4 \mu^2 + \gamma s^3 \lambda^4 \end{vmatrix} = 0,$$

aus der die nachstehende Knickkraft errechnet wird.

$$\begin{aligned} \text{Für } \gamma = \infty, p = 0: & \frac{n_m a^2}{N} = 3.801 \quad \pi^2 = 37.51 \\ \gamma = 0, p = 0: & = 15.04 \\ \gamma = 0, p = 1: & = 10.06 \\ \gamma = 0.555a, p = 0: & = 24.00 \\ \gamma = 0.12575a, p = 1: & = 24.00 \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den genauen Werten ist

$$\begin{vmatrix} k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0.6p) & -k_1 & 1 & 0 \\ -k_1 & k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 - 0.2p) & -k_1 & 1 \\ 1 & -k_1 & k_2 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0.2p) & -k_1 \\ 0 & 1 & -k_1 & k_2 - 1 - \lambda^2 s^4 \mu^2 (1 + 0.6p) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

Nehmen wir  $a:b=1$  und demnach auch

$$k_1 = 4 + 2\lambda^2 s^2 = 4.78957$$

$$\text{und } k_2 = 6 + 4\lambda^2 s^2 + \lambda^4 s^4 = 7.73500$$

an, so berechnet sich die bessere Annäherung der Knicklast zu

$$\frac{n_m a^2}{N} = 3.870\pi^2 \quad \text{für } p=0$$

zu ersehen, dass der Unterschied zu der allseitig gestützten Platte ziemlich gross ist, was darauf beruht, dass die vier zeilige Determinante in diesem Fall in die drei zeilige übergeht. Für eine allseitig gelagerte Platte ist es empfehlenswert, die Breite in fünf gleiche Intervalle zu teilen, da die Knicklast ohne einen erhöhten Aufwand an Berechnung erhältlich ist. Mit  $\gamma = \infty$  und  $t=5$  erhalten wir die Knickbedingung:

und

$$\frac{n_m a^2}{N} = 3.762\pi^2 \quad \text{für } p=1.$$

Bemerkenswert ist, dass bei der allseitig gestützten Platte die mittlere Knicklast durch die Verteilung der Belastung nicht wesentlich beeinflusst wird.

**Zweiter Abschnitt. Lösung nach der Arbeitsmethode.**

4. *Bedingungsgleichung der kleinsten Arbeit.*

Um die Arbeitsmethode durchführen zu können, muss man zuerst die Biegungsfläche in nachstehender Form voraussetzen :

$$w = c_1 w_1(x,y) + c_2 w_2(x,y) + \dots \dots \dots (30)$$

Die in ihr auftretende Funktion  $w_k(x,y)$  wird zweckmässig so gewählt, dass sie für sich den Randbedingungen der Platte bereits genügt. Die Anwendung des Prinzips der kleinsten Arbeit führt bekanntlich zu der Bedingung :<sup>7)</sup>

$$\delta \iint \frac{n_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy = N \delta \iint \left[ \left( \frac{\Delta w}{2} \right)^2 - (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] + \delta e''_a \dots \dots (31)$$

In Gl. (31) ist wiederum die Druckkraft als positiv bezeichnet, und  $e''_a$  stellt die Energie der Randmomente und Randscherkräfte dar.

Wir kehren auf unser Problem zurück und nehmen den Ansatz

$$w = X \sin \lambda y, \dots \dots \dots (32)$$

worin

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots \dots$$

ist.  $X_k$  ist mithin eine Funktion von  $x$ , die die Randbedingungen an der Stelle  $x=0$  und  $x=a$  befriedigt. Führt man den Ansatz in Gl. (31) ein, so tritt  $\int_0^b \sin^2 \lambda y dy$  oder  $\int_0^b \cos^2 \lambda y dy$  aus jedem Doppelintegral aus. Da die Stützkraft an  $x=a$   $EJ_b X/x=a \lambda^4 \sin \lambda y$  und die Bewegung der Platte in der Krafrichtung  $X/x=a \sin \lambda y$  ist, so berechnet sich die Arbeit der Stützkraft zu

$$e''_a = \frac{1}{2} EJ_b \lambda^4 / X^2 / x=a \int_0^b \sin^2 \lambda y dy.$$

Wegen  $\int_0^b \sin^2 \lambda y dy = \int_0^b \cos^2 \lambda y dy$  wird das Integral in bezug auf  $y$  aus der Gleichung (31) ausgeschaltet und es verbleibt

$$\begin{aligned} & \delta \int \frac{1}{2} \frac{n_y}{N} \lambda^2 X^2 dx \\ & = \delta \left[ \int \frac{1}{2} (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \int X X'' dx \right. \\ & \quad \left. + (1-\nu) \lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} \gamma / X^2 / x=a \lambda^4 \right] \dots \dots (33) \end{aligned}$$

Die Bedingung (33) dient zur Bestimmung der Knicklast.

5. *Anwendung der Arbeitsmethode.*

Als Biegungsfläche nehmen wir eine Nähe-

rungsfunktion

$$w = c \left( x + \beta a \sin \frac{\pi}{a} x \right) \sin \lambda y \dots \dots \dots (34)$$

an, die den Randbedingungen an den Seiten  $x=0$ ,  $y=0$  und  $y=b$  völlig genügt. Die Randbedingungen an der Seite  $x=a$  werden durch eine passend ausgewählte Grösse von  $\beta$  hinreichend genau befriedigt.

Das Gleichgewicht der Randscherkräfte bedingt

$$N \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = EJ_b / X / x=a \lambda^4 \sin \lambda y$$

oder  $\left[ \frac{d^3 X}{dx^3} - \lambda^2 (2-\nu) X \right]_{x=a} = \gamma \cdot \lambda^4 \cdot a,$

woraus folgt

$$\beta = \frac{\lambda^2 a^2 \frac{\gamma}{a} + 2 - \nu}{\left( \frac{\pi^2}{\lambda^2 a^2} + 2 - \nu \right) \pi} \dots \dots \dots (35)$$

Aus der Gleichung für die Fläche (34) geht hervor, dass wir an der Seite  $x=a$  noch ein unausgeglichenes Randmoment  $-\nu \lambda^2 a$  haben, das durch die Krümmung  $c x \sin \lambda y$  verursacht ist. Um diese überstehenden Spannungen auszugleichen, müssen wir an demselben Rand eine Zusatzkraft anbringen. Unter der Voraussetzung, dass die Zusatzkraft keinen Einfluss ausübt, kann die Knicklast berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Arbeit der Zusatzkraft nicht in Rechnung gezogen wird, weil sie stets an Ort und Stelle ausgeglichen ist.

Da unsere Fläche (34) nur eine Konstante  $c$  enthält, reicht anstatt der Gl. (33) die Stabilitätsbedingung in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{n_y}{N} \lambda^2 X^2 dx \\ & = \frac{1}{2} \int (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu) \lambda^2 \int X X'' dx \\ & \quad + (1-\nu) \lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} \gamma / X^2 / a \lambda^4 \dots \dots (36) \end{aligned}$$

aus. Die Funktion  $X$  lautet aus Gl. (24)

$$X = c \left( x + \beta a \sin \frac{\pi}{a} x \right)$$

und kann in die Form

$$X = c (X_1 + \beta a X_2) \dots \dots \dots (37)$$

umgeschrieben werden, wo

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= x, \\ \text{und } X_2 &= \sin \frac{\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

ist. Durch Einsetzung der Gl. (37) lässt sich die rechte Seite der Gl. (36) in der Form

7) Nádai. Elastische Platten. S. 277.

$$c_1 = \frac{1}{2} \int (X'' - \lambda^2 X)^2 dx + (1-\nu)\lambda^2 \int XX'' dx + (1-\nu)\lambda^2 \int (X')^2 dx + \frac{1}{2} \gamma / X^2 / a \lambda^4 = c [A + B\beta a + C(\beta a)^2 + \frac{1}{2} \gamma a^2 \lambda^4]$$

schreiben, wo

$$A = \frac{1}{2} \int_0^a (X_1'' - \lambda^2 X_1)^2 dx + (1-\nu)\lambda^2 \left\{ \int_0^a X_1 X_1'' dx + \int_0^a (X_1')^2 dx \right\}$$

$$B = \int_0^a (X_1'' - \lambda^2 X_1)(X_2'' - \lambda^2 X_2) dx + (1-\nu)\lambda^2 \int_0^a (X_1 X_2'' + X_1'' X_2) dx + 2(1-\nu) \int_0^a (X_1' X_2') dx$$

und  $C = \frac{1}{2} \int_0^a (X_2'' - \lambda^2 X_2)^2 dx + (1-\nu)\lambda^2 \left\{ \int_0^a X_2 X_2'' dx + \int_0^a (X_2')^2 dx \right\}$

ist. Führt man die Ansätze (38) in obige Gleichungen ein, so erhalten wir

$$A = \frac{1}{6} a^2 \lambda^4 + (1-\nu)\lambda^2 a,$$

$$B = \frac{a^2}{\pi} \left( \lambda^4 + \nu \lambda^2 \frac{\pi^2}{a^2} \right),$$

$$C = \frac{1}{4} a \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2$$

und demnach

$$\frac{c_1}{c} = \frac{1}{6} a^2 \lambda^4 + (1-\nu)\lambda^2 a + \frac{\lambda^2 a^2}{\pi} \left( \lambda^2 + \nu \frac{\pi^2}{a^2} \right) \beta a + \frac{1}{4} a \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \beta^2 a^2 + \frac{1}{2} \gamma a^2 \lambda^4.$$

Anschliessend berechnen wir die linke Seite der Gl. (36). Da die Belastung  $n_y = n_0 + n_1 x$  ist, lässt sie sich in der Form

$$\frac{n_m a^2}{N} = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 + \gamma \lambda^2 a}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left\{ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right\}} \dots \dots \dots (40)$$

Denken wir uns den Fall, in dem  $\gamma = \infty$  und somit auch  $\beta = \infty$  ist, so erhalten wir aus Gl. (40) die mittlere Knickkraft:

$$\frac{n_m a^2}{N} = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Knickkraft einer allseitig gestützten Platte unabhängig von dem Ungleichförmigkeitsgrad  $p$  ist, was jedoch nur in erster Annäherung der Fall ist. Hätten wir die verbogene Fläche in der Form

$$c_2 = \int \frac{1}{2} \frac{n_y}{N} \lambda^2 (X)^2 dx = \frac{c}{2} \frac{n_0}{N} \lambda^2 \left\{ D + E\beta a + F(\beta a)^2 \right\} + \frac{c}{2} \frac{n_1}{N} \lambda^2 \left\{ D' + E'\beta a + F'(\beta a)^2 \right\}$$

ausdrücken, worin  $D, E$  usw. nachstehende Abkürzungen sind:

$$D = \int_0^a X_1^2 dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^2$$

$$E = 2 \int_0^a X_1 X_2 dx = \int_0^a x \sin \frac{\pi}{a} x dx = 2 \frac{a^2}{\pi}$$

$$F = \int_0^a X_2^2 dx = \int_0^a \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{a}{2}$$

$$D' = \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{4} a^4$$

$$E' = 2 \int_0^a x^2 \sin \frac{\pi}{a} x dx = 2 \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 (\pi^2 - 4)$$

$$F' = \int_0^a x \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{4}$$

Es ergibt sich demnach

$$\frac{c_2}{c} = \frac{1}{2} \frac{n_0}{N} \lambda^2 a^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{n_1 a}{N} \lambda^2 a^3 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} (\pi^2 - 4) \beta + \frac{1}{4} \beta^2 \right\}.$$

Ersetzt man die Belastungen  $n_0$  und  $n_1 a$  vermöge

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= (1-p)n_m \\ n_1 a &= 2p n_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

durch  $n_m$  und  $p$ , so entsteht

$$\frac{c_2}{c} = \frac{1}{2} \frac{n_m}{N} \lambda^2 a^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + p \left\{ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right\} \right].$$

Aus der Bedingung  $c_1 = c_2$  folgt der Näherungswert der Knickkraft:

$$w = \left( c_1 \sin \frac{\pi}{a} x + c_2 \sin \frac{2\pi}{a} x \right) \sin \lambda y$$

angenommen, so berechnet sich eine bessere Annäherung der Knickkraft aus<sup>8)</sup>

$$\left( \lambda^2 \frac{n_m}{N} \right)^2 \left\{ 1 - \left( \frac{32}{9\pi^2} p \right)^2 - \lambda^2 \frac{n_m}{N} \left\{ \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 + \left( 4 \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \right\} + \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \left( 4 \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 = 0 \dots \dots \dots (42)$$

8) Eing analoge Gleichung wurde von Timoschenko veröffentlicht. Vgl. Der Eisenbau. 1921.

Die so errechnete Knickkraft ist, wie nachstehender Vergleich zeigt, genau genug dem Wert

$$\frac{n_m}{N} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \lambda^2 \right)^2 \times \left\{ 1 - \left( 0,01 + 0,015 \frac{a^2}{b^2} \right) \rho^2 \right\} \dots \dots \dots (43)$$

angenähert.

Aus diesem Grund empfiehlt es sich den Faktor

$$\frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2$$

in Gl. (40) mit dem Koeffizienten

$$\frac{n_m a^2}{N} = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 k + \gamma \lambda^2 a}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + \rho \left\{ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right\}} \dots \dots \dots (45)$$

ermittelt.

Sonderfall 1. Falls  $\gamma = \infty$  und  $\rho = 0$  ist, stimmt die aus Gl. (45) erhaltene Knickkraft mit dem genauen Wert

$$\frac{n_m a^2}{N} = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \dots \dots \dots (46)$$

überein.

Sonderfall 2. Für  $\gamma = \infty$  erhalten wir die Knickkraft

$$\frac{n_m a^2}{N} = a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 k, \dots \dots \dots (47)$$

$$\frac{n_m a^2}{N} = \frac{\frac{1}{3} a^2 \lambda^2 + 2(1-\nu) + \frac{2}{\pi} (\lambda^2 a^2 + \nu \pi^2) \beta + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \left( \frac{\pi^2}{a^2 \lambda^2} + 1 \right)^2 \beta^2 k}{\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \beta + \frac{1}{2} \beta^2 + \rho \left\{ \frac{1}{6} + 2 \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\pi} \right\}} \dots \dots \dots (49)$$

Für  $\rho = 0$  gibt Gl. (49) eine bessere Annäherung als die von Timoschenko abgeleitete Formel:

$$\frac{n_m a^2}{N} = a^2 \lambda^2 + 6(1-\nu) \dots \dots \dots (50)^9)$$

Tabelle 1.

b : a	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$ aus Gl. (42)	7,59	4,88	4,06	3,91	4,05	4,39
$\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$ aus Gl. (43)	7,54	4,87	4,06	3,90	4,04	4,39

$$k = 1 - \left( 0,01 + 0,015 \frac{a^2}{b^2} \right) \rho^2 \dots \dots \dots (44)$$

zu multiplizieren. Die mittlere Knickkraft wird demnach aus

die eine verlässliche Genauigkeit besitzt.

Sonderfall 3. Falls die Platte an drei Rändern aufliegt, während sie an einem zur Belastung parallel laufenden Rand ganz frei gestützt ist, braucht man einfach  $\gamma = 0$  in Gl. (35) und (45) einzusetzen. Mit dem Beiwert

$$\beta = \frac{2-\nu}{\left( \frac{\pi^2}{\lambda^2 a^2} + 2-\nu \right) \pi} \dots \dots \dots (48)$$

berechnet sich die Knickkraft aus

Tabelle 3.

Mittlere Knickkraft ( $n_m a^2 / N$ ) der rechteckigen Platte mit einem freien Rand. ( $\nu = 0$ )

$\rho$	Methode	Werte für		
		b/a=2	b/a=1	b/a=0,5
0	Nach Timoschenko. Gl. 50	8,467	15,87	45,48
	Arbeitsmethode. Gl. 49	8,210	15,30	44,70
	Differentialgleichung. Gl. 11	8,096	15,16	44,50
1	Arbeitsmethode. Gl. 49	5,965	10,95	32,80
	Differenzgleichung. Gl. 28	5,240	10,07	28,72
-1	Arbeitsmethode. Gl. 49	14,69	25,00	69,7*
	Differenzgleichung. Gl. 28	14,25	23,95	53,3

(\* Grösser als die Knickkraft der allseitig gelagerten Platte.)

Der Tabelle 3 ist zu entnehmen, dass die Abweichung der Knickkraft nach der Arbeitsmethode

Tabelle 2.

Mittlere Knickkraft ( $n_m a^2 / N$ ) der quadratischen Platte ( $\nu = 0$ )

$\rho$	$\gamma$	Genauere Werte (Gl. 11)	Nach der Gelenkkettenmethode (Gl. 28)	Nach der Arbeitsmethode (Gl. 45)
0	0	4 $\pi^2$	3,85 $\pi^2$ *	4 $\pi^2$
	0,558	15,16	15,04	15,87
	0,555a	24,00	24,00	24,31
1	0	—	37,31*	38,50
	1,248a	—	10,07	10,58
	—	—	24,00	25,10
-1	0	—	37,31*	38,50
	0,647	—	23,95	25,00
	—	—	30,00	31,50

\* Berechnet aus Gl. (28, a).

9) Nadai. Elastische Platte. S. 284.

insbesondere für den negativen Wert von  $p$  an Wichtigkeit gewinnt, wenn das Seitenverhältnis  $b/a$  sehr klein wird.

6. *Kleinste Knickkraft und zugehörige Anzahl der Halbwellen.*

Bei der allseitig aufgestützten, gleichmässig gedrückten Platte geschieht die Knickung nicht immer in Halbwellen-Form. Wenn  $b:a = \sqrt{2}$  werden zwei, wenn  $b:a = \sqrt{6}$  drei Halbwellen sich bilden usw., und zwar auch bei grosser Annäherung, wenn die Belastung linear veränderlich verteilt ist. Falls dagegen eine zur Belastung parallel laufende Seite ganz frei ist, kommt die mehr-wellige Knickform gar nicht in Betracht. Demnach ist zu schliessen, dass die Wellenform, die die kleinste Knickkraft bestimmt, nicht nur von dem Seitenverhältnis  $b:a$ , sondern auch von der Steifigkeit der elastischen Stütze  $\gamma$  abhängig ist. Eine analoge Abhängigkeit wurde bereits bei der Stabknickung mit elastischen Zwischenstützen nachgewiesen.<sup>10)</sup> Um diese verwickelte Beziehung näher verfolgen zu können, berechnete der Verfasser zuerst die erste Knickkraft aus Gl. (45) für verschiedene Seitenverhältnisse und  $\gamma:a$ . Da es

sich hier um eine Eisenbetonplatte handelt, nimmt der Verfasser  $\nu=0,15$  an.<sup>11)</sup>

Die errechneten Werte von  $\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$  für  $p=0$ ,  $p=1$  und  $p=-1$  sind in Tabelle 4 zusammengestellt. Die fettgedruckten Werte unterscheiden sich von den anderen dadurch, dass sie keine kleinsten Knicklasten darstellen. Die Kurve 1 in Abb. 3 zeigt, wie der Wert  $\frac{n_m a^2}{N \pi^2}$  für  $p=0$  und  $\gamma=16a$  bei wachsendem Seitenverhältnis  $b:a$  sich verhält. Wird dieselbe Kurve mit 2, 3,..... fachen Abszissen eingetragen, so erhalten wir die Kurven II, III usw., die je der 2., 3,.....Knicklast entsprechen. Aus Abb. 3 ist zu ersehen, dass

- für  $b/a < 1.52$  die erste Knicklast,
  - für  $1.52 < b/a < 2.60$  die zweite,
  - für  $2.60 < b/a < 3.46$  die dritte.
- und für  $3.46 < b/a$  die erste wiederum

die kleinste Knickkraft bestimmend ist. Auf diese Weise lässt sich die kleinste Knickkraft feststellen. In Abb. 4, 5 und 6 ist die kleinste Knickkraft bildlich veranschaulicht. Aus den Abbildungen geht hervor, dass die zweite oder eine noch höhere Knickkraft gar nicht in Betracht kommt, solange

Tabelle 4.

Erste Knickkraft der rechteckigen Platte. ( $\nu=0,15$ )

$p$	$\gamma/a$	Werte $n_m a^2 / N \pi^2$ für $b:a =$										
		0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,25	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0	6,77	4,52	3,31	2,09	1,53	1,17	,97	,78	,64	,58	,56
	,5	8,19	5,87	4,58	3,20	2,46	1,89	1,53	1,13	,80	,68	,62
	1	8,30	6,05	4,83	3,57	2,91	2,37	1,98	1,45	,96	,77	,68
	2	8,36	6,14	4,97	3,84	3,33	2,94	2,60	2,00	1,27	,95	,80
	4	8,39	6,20	5,06	4,01	3,62	3,43	3,30	2,85	1,86	1,32	1,04
	8	8,41	6,22	5,10	4,11	3,80	3,78	3,88	<b>3,93</b>	2,91	2,01	1,50
	16	8,41	6,24	5,12	4,15	3,90	3,98	4,25	<b>4,81</b>	<b>4,52</b>	3,31	2,41
	32	8,42	6,24	5,13	4,19	3,95	4,09	<b>4,47</b>	<b>5,45</b>	<b>6,50</b>	<b>5,49</b>	<b>4,12</b>
	$\infty$	8,42	6,25	5,14	4,20	4,00	4,20	<b>4,70</b>	<b>6,25</b>	<b>11,11</b>	<b>18,07</b>	<b>27,04</b>
	1	0	4,93	3,29	2,40	1,51	1,09	,83	,68	,54	,43	,39
,5		7,16	5,19	4,02	2,69	1,97	1,44	1,13	,80	,55	,46	,42
1		7,35	5,47	4,39	3,16	2,47	1,91	1,52	1,04	,66	,52	,46
2		7,45	5,63	4,61	3,54	2,98	2,51	2,11	1,50	,89	,65	,54
4		7,49	5,73	4,74	3,78	3,37	3,10	2,85	2,25	1,32	,90	,70
8		7,53	5,77	4,80	3,92	3,62	3,54	3,54	3,27	2,15	1,40	1,03
16		7,53	5,79	4,84	3,99	3,75	3,82	4,02	<b>4,32</b>	3,53	2,37	1,67
32		7,55	5,80	4,86	4,03	3,83	3,97	<b>4,31</b>	<b>5,17</b>	<b>5,45</b>	<b>4,12</b>	2,92
$\infty$		7,55	5,81	4,88	4,06	3,90	4,12	<b>4,62</b>	<b>6,16</b>	<b>10,98</b>	<b>17,87</b>	<b>26,77</b>
-1		0	10,45	7,06	5,21	3,36	2,51	1,97	1,68	1,40	1,20	1,13
	,5	7,87	6,00	4,94	3,79	3,18	2,69	2,35	1,91	1,48	1,30	1,21
	1	7,72	5,91	4,91	3,89	3,42	3,06	2,79	2,33	1,75	1,47	1,32
	2	7,63	5,86	4,89	3,97	3,62	3,44	3,32	2,98	2,25	1,79	1,54
	4	7,59	5,84	4,88	4,01	3,74	3,72	3,80	<b>3,81</b>	3,12	2,42	1,98
	8	7,57	5,83	4,88	4,04	3,82	3,91	<b>4,16</b>	<b>4,65</b>	<b>4,48</b>	3,55	2,81
	16	7,55	5,82	4,88	4,05	3,86	4,01	<b>4,38</b>	<b>5,30</b>	<b>6,20</b>	<b>5,44</b>	<b>4,55</b>
	32	7,55	5,81	4,88	4,07	3,88	4,07	<b>4,50</b>	<b>5,77</b>	<b>7,92</b>	<b>8,12</b>	<b>6,97</b>
	$\infty$	7,55	5,81	4,88	4,06	3,60	4,12	<b>4,62</b>	<b>6,16</b>	<b>10,98</b>	<b>17,87</b>	<b>26,77</b>

10) S. Ban. Kenchiku Zasshi Bd. 45, Nr. 551, 1931.

B. Klemperer and H. B. Gibbons. Z. f. angew. Math. u. Mech. 1933, H. 4.

11) Im Bereich der zulässigen Beanspruchung ist  $m=\nu^{-1}=6$  bis 7 für Druckbeanspruchung und  $m=9\sim 10$  für Zugbeanspruchung. Vgl. Kongressbericht der I. V. f. M., Zürich, 1931. Gehler: Festigkeit, Elastizität und Schwinden von Beton.

Abb. 3.

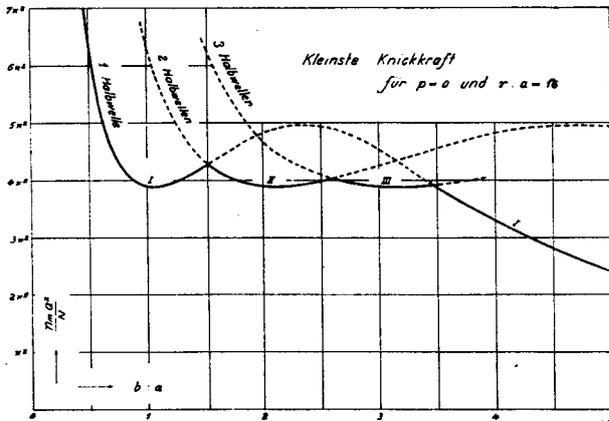


Abb. 5.

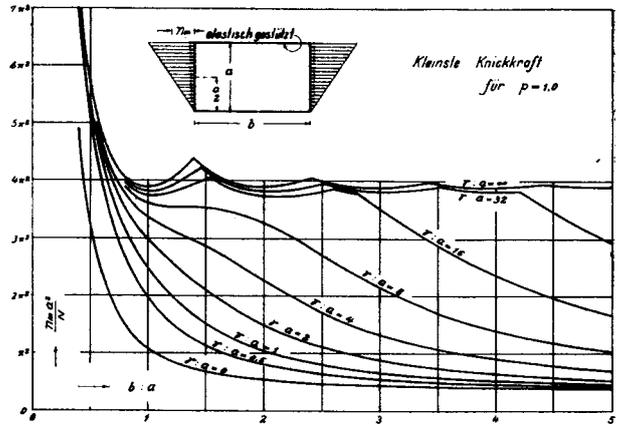


Abb. 4.

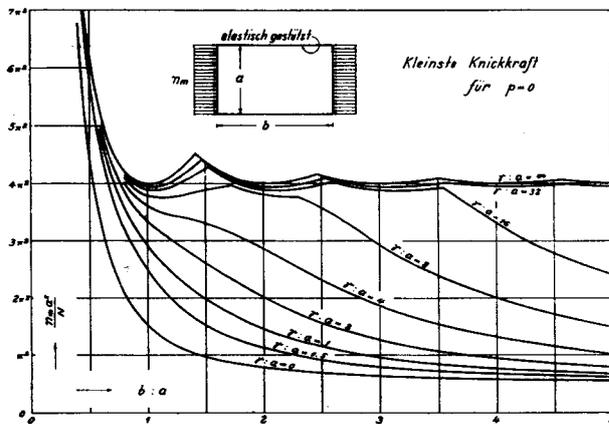
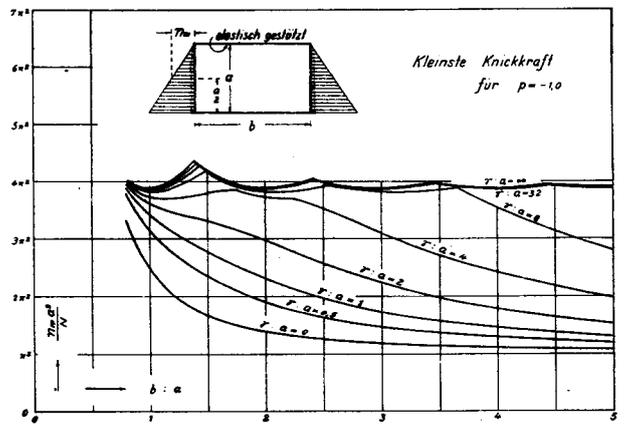


Abb. 6.



nicht  $\gamma/a$  ca. 4 überschreitet. Bei gewöhnlicher Bördelung überschreitet  $\gamma/a$  keinesfalls diese Grenzzahl, und die Berechnung der ersten Knicklast reicht zur Bestimmung der kleinsten Knicklast aus.

**Zusammenfassung.**

Bei Anwendung der Arbeitsmethode ist es in erster Linie notwendig, eine passende Krümmungsfläche anzunehmen, die den Randbedingungen genügt. Unter komplizierten Randbedingungen muss man sich aber damit begnügen, eine der Randbedingungen möglichst genügende Fläche anzunehmen. Obwohl die vom Verfasser angenommene Krümmungsfläche nicht ganz den Randbedingungen angepasst war, gelang es, die Knickkraft einer linear veränderlich gedrückten Platte mit elastischer Stützung hinreichend genau zu ermitteln. Es ist aber noch darauf hinzuweisen, dass die nach der Arbeitsmethode ermittelte Knickkraft für kleine Seitenverhältnisse  $b/a$  von dem genauen Wert abweicht. Bei der Methode der elastischen Glinkette nach Henky bedarf es keiner Voraussetzung bezüglich der Krümmungsfläche und stets führt dieselbe zu einer guten Annäherung.

Auf Grund seiner Studien über den hier behandelten Knickfall gelangte der Verfasser zu

folgenden Schlussfolgerungen.

1. Bei einer allseitig gelagerten Platte ist in erster Annäherung die mittlere Knickkraft  $n_m$  unabhängig von der Ungleichförmigkeit der Belastung.

2. Falls ein zur Belastung parallel laufender Rand ganz frei ist, vergrößert oder verkleinert sich die mittlere Knickkraft, je nachdem die Ungleichförmigkeit  $p$  negativ oder positiv ist.

3. Die Bördelung an einem freien Rand erhöht die Knickkraft um so mehr, je grösser deren Abmessung und je kleiner das Seitenverhältnis  $b/a$  wird. Ist aber die Bördelung sehr steif, so entscheidet die zweite oder dritte Knickung die kleinste Grenzlast und eine weitere Erhöhung der Steifigkeit der Bördelung vergrößert die Knickkraft nicht.

4. Die Anzahl der Halbwellen der Knickungsform, die die kleinste Knickkraft entscheidet, hängt von dem Seitenverhältnis  $b/a$  und ferner von der Steifigkeit der Bördelung und der Ungleichförmigkeit der Belastung ab.

5. Ueber die zahlenmässige Wiedergabe der Knickkraft je nach den verschiedenen Seitenverhältnissen, Steifigkeiten der Bördelung und Ungleichförmigkeiten der Belastung geben übersichtlich die Abb. 4, 5 und 6 Auskunft.