Eine praktische Spannungsberechnung der vieleckigen Kuppel mit Binderscheiben

Prof. Shizuo Ban

Kioto University

(Eingegangen am 11. Mai 1953)

1 Vorwort

In dieser Arbeit legt der Verfasser eine angenäherte Berechnung der quadratischen Translationsschale vor, die mit vier Binderscheiben versteift und durch vier Ecksäulen gestützt ist. Die Erzeugende kann beliebig geformt sein aber die Schale soll quadratischen Grundriss haben, und symmetrisch belastet werden. Das hier erläuterte Verfahren ermöglicht die spannung annäherungsweise zu ermitteln, ohne dass man die Differentialgleichung aufzulösen braucht. Für die Spannung in einem ausgewählten Querschnitt gibt der Verfasser einen algebraischen Ausdruck mit einigen Unbekannten an, die aus Rand- und Gleichgewichtsbedingungen ohne weiteres ermittelt werden können.

Die ausgerechnete Spannung wurde mit dem Ergebnis von W. Flügge[1] verglichen, wobei es sich erwies, dass Näherungswert in praktischer Hinsicht zulässig ist.

Zur Ergänzung ist es dem Verfasser gelungen, dasselbe Verfahren auf den Fall der ausgeschnittenen Rotationsschale über einem regelmässig vieleckigen Grundriss auszudehnen. Hierbei ist zu beachten, dass die Meridiankurve beliebig gewählt werden kann.

Dieses Verfahren versagt jedoch, wenn der Grundriss kein regelmässiges Vieleck bildet, oder die Belastung unsymmetrisch aufgebracht ist. Handels sich es anderseits um eine besondere Schale über rechteckigem oder verzerrten vieleckigen Grundriss handelt, so gestattet das Prinzip des statischen Massenausgleiches nach F. Dischinger[2] die Spannungsermittelung.

---

1. W. Flügge: Statik und Dynamik der Schalen. 1934.
2. F. Dischinger: Der Bauing., 1936 Ht. 23/24 u. 27/28.

I. Quadratische Translationsschale mit einer beliebigen Erzeugenden unter symmetrischer Belastung

§ 1. Grundgedanke des Rechnungsgangs

Wir bezeichnen die Normalschnittkraft in einem zur Erzeugenden parallel laufenden Schnitt mit N_φ bezw. N_θ. Diese Normalschnittkraft ist bekanntlich in der Richtung der anderen Erzeugenden gerichtet, befindet sich also im allgemeinen schiefwinklich zur Schnittebene.

Zuerst sei darauf hingewiesen, dass für einige bestimmte Stellen, wo entweder $N_\varphi = N_\theta$, $N_\varphi = 0$ oder $N_\theta = 0$ von vornherein bekannt sind, sich die Normalschnittkraft aus nachstehender Beziehung ergibt.

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi \cos\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta \cos\theta} = Z\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}\,, \tag{1}$$

worin Z die Belastund in lotrechter Richtung, bezogen auf die Flächeneinheit, bedeutet. Diese Gleichung ist von dem Gleichgewicht des Schalenelements gegen Verschieben in lotrechter Richtung abgeleitet.

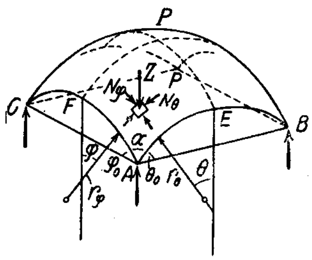

Abb. 1

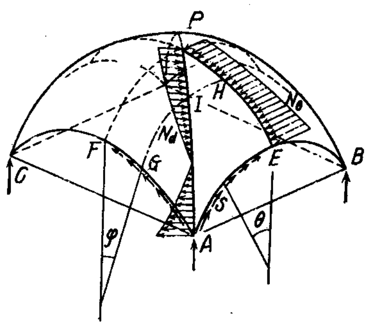

Abb. 2

Abb. 2 stellt eine quadratische Translationsschale mit einer beliebigen Erzeugenden dar. In dieser Arbeit beschränken wir uns darauf, je die beiden zur Binderscheibe parallel laufenden Erzeugenden als gleich zu betrachten. Hierdurch entsteht Symmetrie in bezug sowohl auf den Mittelschnitt als auch auf den Diagonalschnitt. Die Belastung muss diese Bedingung ebenfalls erfüllen. Aus dieser Symmetriebedingung lässt sich entnehmen dass in der Schnittfläche längs der Diagonale sowie der Mittelerzeugenden nur die Normalschnittkräfte vorhanden sind, die in wagerechter Richtung gerichtet sind. Wegen der Randbedingund entsteht entlang des Randes nur die Schubspannung, die von der Binderscheibe aufgenommen wird. Der Spannungszustand an einem Schalenausschnitt AEP ist aus Abb. 2 ersichtlich. Da der Krümmungshalbmesser am

Scheitel gegeben ist, ergibt sich die schnittkraft an derselben Stelle aus der Gl. (1) zu

$$N_0 = \frac{1}{2} \rho_0 Z_0 \tag{2}$$

wobei ρ_0 den Krümmungshalbmesser und Z_0 die lotrechte Komponente der Flächenlast bedeuten.

Um die Verteilung der Schnittkräfte N_a in dem Diagonalschnitt zu ermitteln, setzen wir annäherungsweise voraus

$$N_a' = N_a / \cos\varphi = N_0 + a\xi^2 + b\xi^4 , \tag{3}$$

worin N_a' die auf die ξ-Achse projizierte Schnittkraft bedeutet und ferner a und b die noch zu bestimmenden Beiwerte sind. Wir schreiben nun einfach die Gleichgewichtsbedingung für die schalenhälfte hin, was für die Spannungsermittelung einen Anhalt gewährleistet. (Abb. 3). Die erste Gleichung bedingt das Gleichgewicht der wagerechten Kräfte und die zweite ist die Momentengleichung in bezug auf die Diagonale des Grundrisses. Aus diesen Gleichungen kann man in einfacher Weise die beiden Beiwerte a und b bestimmen.

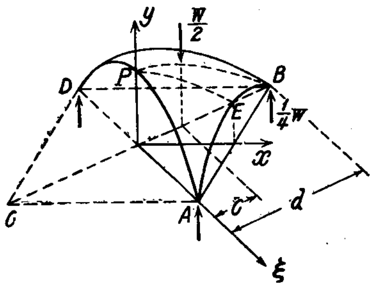

Abb. 3

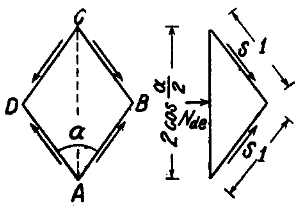

Abb. 4

Mit $\xi = d$ erhalten wir die Normalschnittkraft N_{de} an der Ecke. Betrachten wir zunächst das Gleichgewicht des unendlich kleinen Schalenelements an der Ecke, so erhalten wir sofort die Eckschubkraft:

$$S_e = -N_e \cot \frac{\alpha}{2} \tag{4}$$

wobei α den von den beiden Rändern gebildeten Winkel bedeutet. Da vorausgesetzt ist, dass die Binderscheibe senkrecht in ihrer Tragfläche keine Kräfte aufnimmt, berücksichtigt der Verfasser auf die Randnormalkraft, die nach W. Flügge ausnahmsweise dicht an den Ecken gedacht ist, nicht. Diese Zusatzspannung ist meines Erachtens ihrer Grösse und Verteilungslänge nach unzuverlässig, denn ihr Höchstwert ist umso grösser und Verteilung umso schmaler, je genauer die

Berechnung durchgeführt wird.

Für die Randschubkraft nehmen wir den Ausdruck:

$$S = m_1\,\theta + m_2\,\theta^3\,, \tag{5}$$

wo θ den Öffnungswinkel bedeutet. Die Beiwerte m_1 und m_2 werden dadurch bestimmt, dass mit $\theta = \theta_0$ S den wert S_e gemäss Gl. (4) annimmt und das Gleichgewicht der lotrechten Kräfte unbedingt beibebhalten wird.

Für die Normalkraft in dem Mittelschnitt bedienen wir uns des Ausdrucks:

$$N = N_0 + n_1\,\varphi^2 + n_2\,\varphi^4\,, \tag{6}$$

wobei $N_0 = \frac{1}{2}\,\rho_0\,Z_0$ ist wie früher und n_1 und n_2 die noch zu bestimmenden Beiwerte sind. Um sie zu bestimmen, stehen zwei Bedingungen zur Verfügung:

1. Das Gleichgewicht des Schalenausschnittes AEP muss in wagrechter Richtung entstehen.
2. N muss einen bestimmten Wert am Rand, wo wegen der Stützbedingung die Normalspannung senkrecht zur Binderscheibe verschwindet, haben. Demnach

$$N = Z\rho \qquad \text{für } \varphi = \varphi_0\,. \tag{7}$$

An Hand obigen Verfahrens können wir alle in Abb. 2 eingetragenen Schnittkräfte ermitteln. Die Schnittkräfte in einem beliebigen Querschnitt parallel zur Erzeugenden lassen sich in ähnlicher Weise aus den Gleichgewichtsedingungen ermitteln.

Abgesehen von den richtigen Schnittkräften, die unmittelbar aus der Gl. (1) errechnet werden, sind die übrigen Schittkräfte zwar nicht richtig aber genau genug in technischer Hinsciht.

§ 2. Quadratische Translationsschale mit einer kreisförmigen Erzeugenden.

Um das Berechnungsverfahren eingehend zu beschreiben, legt der Verfasser nachstehend ein Beispiel vor, in dem eine quadratische Translationsschale mit einer kreisförmigen Erzeugenden unter Eigengewicht in Betracht gezogen ist.

Wir nehmen die y-Achse in lotrechter Richtung und die ξ-Achse in der Richtung der Diagonale des Grundrisses an. Der Koordinatenanfangspunkt befindet sich in der Mitte des Grundrisses. Dann lautet die Gleichung des diagonalen Schnittes der Schale

$$y = 2r(\cos\varphi - \cos\varphi_0),\ \ \xi = \sqrt{2}\,r\sin\varphi\,, \tag{8}$$

wo r den Krümmungshalbmesser der Erzeugenden darstellt. Eliminiert man φ aus den beiden Gleichungen und bezeichnet die Pfeilhöhe mit f, so erhält man

$$y^2 + 2(2r-f)y - f(4r-f) + 2\xi^2 = 0, \tag{9}$$

oder bei Reihenentwicklung

$$y = f - \frac{\xi^2}{2r} - \frac{\xi^4}{16r^3} - \frac{\xi^6}{64r^5} - \frac{5}{1024}\frac{\xi^8}{r^7}\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{10}$$

Die Neigung der Tangente ist

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{2}{y+2r-f} = -\sqrt{2}\tan\varphi. \tag{11}$$

a) Die Schnittkraft in dem diagonalen Schnitt

Wir bezeichnen die Länge der Diagonale des Grundrisses mit $2d$ und die Gesamtlast mit W. Zuerst betrachten wir das Moment der äusseren Lasten in bezug auf die Diagonale. Die Belastung auf der Schalenhälfte hat das Teilmoment $-Wc/2$ und die Auflagerkraft $Wd/4$. Demnach ist das Moment der äusseren Lasten

$$M = \frac{1}{4}Wd - \frac{1}{2}Wc,$$

wobei c der Abstand der resultierenden Kraft $W/2$ von der Diagonale ist. Dies Moment muss durch die Normalschnittkraft in dem Diagonalschnitt aufgenommen werden. Wir bezeichnen nun die auf die ξ–Achse projizierte Normalschnittkraft mit N_a' und geben deren Ausdruck in der Form:

$$N_a' = N'_{a0} + k_1\xi^2 + k_2\xi^4.$$

Da N die Normalschnittkraft am Scheitel ist, erhalten wir aus Gl. (2) ohne weiteres

$$N'_{a0} = rg/2. \tag{12}$$

Die Momentengleichung bedingt

$$2\int_0^d (N'_{a0} + k_1\xi^2 + k_2\xi^4)\, y d\xi = \frac{1}{4}Wd - \frac{1}{2}Wc. \tag{13}$$

Es ist noch eine Bedingund hinzuzufügen, nämlich das Gleichgewicht der wagerechten Kräfte:

$$2\int_0^d (N'_{a0} + k_1\xi^2 + k_2\xi^4)\, d\xi = 0\,, \tag{14}$$

Durch Einsetzen von y gemäss Gl. (10) gehen diese Gleichungen über in

$$N'_{a0} + \frac{1}{3}k_1 r^2\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}k_2 r\left(\frac{d}{r}\right)^4 = 0$$

und

$$\left(\frac{1}{8}Wd-\frac{1}{4}Wc\right)\frac{1}{dr}+N'_{a0}\left(\frac{d}{r}\right)^2\left\{\frac{1}{6}+\frac{1}{80}\left(\frac{d}{r}\right)^2+\frac{1}{448}\left(\frac{d}{r}\right)^4+\frac{5}{7776}\left(\frac{d}{r}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$+k_1r^2\left(\frac{d}{r}\right)^4\left\{\frac{1}{10}+\frac{1}{112}\left(\frac{d}{r}\right)^2+\frac{1}{576}\left(\frac{d}{r}\right)^4+\frac{5}{9504}\left(\frac{d}{r}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$+k_2r^4\left(\frac{d}{r}\right)^6\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{144}\left(\frac{d}{r}\right)^2+\frac{1}{704}\left(\frac{d}{r}\right)^4+\frac{5}{11232}\left(\frac{d}{r}\right)^6+\cdots\right\}=0$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich k_1 und k_2 ermitteln. Die Grundschnittkraft in dem Diagonalschnitt ist demnach

$$N_a=\frac{1}{\sqrt{1+2\tan^2\varphi}}N'd. \tag{15}$$

b) Die Randschubkraft

Wie oben erwähnt ist die Normalschnittkraft an der Ecke bekannt und wir bezeichnen sie mit N_{ae}. Wir wollen nun aus dieser die Eckschubkraft bestimmen. Der von den beiden Rändern gebildete winkel α berechnet sich aus der geometrischen Beziehung:

$$\cos\alpha=\sin^2\varphi_0\,,$$

oder

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+2\tan^2\varphi_0}\,. \tag{16}$$

Aus Gl. (4) erhalten wir sofort

$$S_e=-N_{ae}\cot\frac{\alpha}{2}\,,$$

oder durch Einsetzen von Gl. (16)

$$S=N'_{ae}\,. \tag{17}$$

Wegen der antisymmetrischen Eigenschaft der Schubspannung ist es nun zweckmässig anzunehmen

$$S=m_1\theta+m_2\theta^3\,.$$

Um die unbekannten Beiwerte m_1 und m_2 zu bestimmen, sind zwei Bedingungen vorhanden:

$$S=S_e \text{ für } \theta=\theta_0$$

$$\int_0^{\theta_0}S\sin\theta r\,d\theta=\frac{1}{8}W$$

Die zweite Gleichung bedingt das Gleichgewicht der lotrechten Kräfte, die der Schalenausschnitt APE aufzunehmen hat.

Wegen der Gl. (5) erhalten wir

$$S_e = m_1\theta_0 + m_2\theta_0^3,$$

$$rm_1(\sin\theta_0 - \theta_0\cos\theta_0) + rm_2\theta_0^5\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{42}\theta_0^2 + \frac{1}{1080}\theta_0^4 - \frac{1}{55440}\theta_0^6 + \cdots\cdots\right\} = \frac{1}{8}W. \quad (19)$$

Aus diesen Gleichungen berechnen sich die Unbekannten.

c) Die Normalschnittkraft in dem Mittelschnitt

Wegen der Symmetrie lässt sich die Normalschnittkraft in der Form darstellen

$$N_\theta = N_{\theta 0} + n_1\varphi^2 + n_2\varphi^4,$$

wobei $N_{\theta 0} = \frac{1}{2}rg$, wie früher. Mit $N_{\theta r}$ bezeichnen wir die Schnittkraft am Rand, die mit den Ansätzen $N_\varphi=0$ und $\theta=0$ aus der Gl. (1) ermittelt wird als:

$$N_{\theta r} = rg.$$

Daraus folgt

$$N_{\theta r} = N_{\theta 0} + n_1\varphi_0^2 + n_2\varphi_0^4 = rg. \quad (20)$$

Ferner betrachten wir das Gleichgewicht der Schalenhälfte gegen Verschieben in wagerchter Richtung. Dabei ist zu beachten, dass die Schnittkraft in dem Diagonalschnitt nicht in Frage kommt, denn sie entfällt von selbst.

Demnach erhalten wir

$$\int_0^{\theta_0} S\cos\theta r\,d\theta = \int_0^{\varphi_0} N_\theta\,d\varphi.$$

Durch Einsetzen von S gemäss Gl. (5) und N gemäss Gl. (6) erhalten wir schliesslich

$$m_1(\theta_0\sin\theta_0 + \cos\theta_0 - 1) + m_2\theta_0^4\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\theta_0^2 + \frac{1}{192}\theta_0^4 - \frac{1}{7200}\theta_0^6 + \cdots\cdots\right\}$$

$$= N_{\theta 0}\,\varphi_0 + \frac{1}{3}n_1\,\varphi_0^3 + \frac{1}{5}n_2\,\varphi_0^5. \quad (21)$$

Aus Gl. (20) und (21) lassen sich die unbekannten Grössen n_1 und n_2 ermitteln.

d) Die Schnittkraft in einem beliebigen Parallelschnitt

In einem beliebigen Parallelschnitt sind sowohl Normalspannung als auch Schubspannung vorhanden. Für die gesuchten Schnittkräfte nehmen wir die nachstehende Ausdrücke an:

$$S = s_1\,\theta + s_2\,\theta^3, \quad (22)$$

$$N_\varphi = N_{\varphi h} + t_1\,\theta^2 + t_2\,\theta^4. \quad (23)$$

Die unbekannten Beiwerte s_1 und s_2 werden folgendermassen bestimmt. Für

$\theta=\theta_0$ muss S mit der aus Gl. (5) errechneten Randschubschnittkraft übereinstimmen, d. h.

$$s_1\,\theta_0+s_2\,\theta_0^3=m_1\,\varphi_c+m_2\,\varphi_c^3\,. \tag{24}$$

Die zweite Bedingung wird durch das Gleichgewicht des Schalenausschnitts AEHG gegen Verschieben in wagrechter Richtung dargestellt:

$$\int_0^{\theta_0} S\cos\theta r\,d\theta=\int_0^{\varphi_c} N_\theta\,r\,d\varphi$$

oder

$$S_1(\theta_0\sin\theta_0+\cos\theta_0-1)+S_2\,\theta_0^4\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\theta_0^2+\frac{1}{192}\theta_0^4-\frac{1}{7200}\theta_0^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$=N_0\,\varphi_c+\frac{1}{3}\,n_1\,\varphi_0^3+\frac{1}{5}\,n_2\,\varphi_c^5\,. \tag{25}$$

Durch Auflösung der Gl. (24) und (25) erhalten wir s_1 und s_2.

Schliesslich gehen wir weiter auf die Gl. (23) ein, die Verteilung der Normalschnittkraft in dem Schnitt GIH darstellt. Aus Gl. (1) lässt sich die Normalschnittkraft an drei bestimmten Stellen berechnen, nämlich an dem Punkt G, wo $N_\theta=0$, I, wo $N_\theta=N_\varphi$ und H, wo $N_\theta=N_0+n_1\,\varphi_c^2+n_2\,\varphi_c^4$ ist. Die so berechneten Schnittkräfte sind nachstehend zusammengestellt, und zwar je mit einem anhängenden Suffix, das sich auf die betreffende Stelle bezieht.

$$\left.\begin{aligned} N_{\varphi h}&=(Zr-N_0-n_1\,\varphi_c^2-n_2\,\varphi_c^4)\cos\varphi_c\,,\\ N_{\varphi i}&=\frac{1}{2}\,r\cos\varphi_c\,Z\sqrt{1-\sin^4\varphi_c}\,,\\ N_{\varphi g}&=rZ\cos\,\varphi_c\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Bestimmungsgleichungen für t_1 und t_2 sind demnach

$$\left.\begin{aligned} t_1\theta_0^2+t_2\theta_c^4&=N_{\varphi i}-N\varphi_h\,,\\ t_1\theta_0^2+t_2\theta_0^4&=N_{\varphi g}-N_{\varphi h}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Auflösung der Gl. (26) nach t_1 und t_2 stellt die Verteilung der Schnittkraft fest.

Es empfiehlt sic hierauf noch, die Normalschnittkraft N_φ durch das Gleichgewicht des Schalenausschnitts gegen Verschieben in der x-Richtung nachzuprüfen.

§ 3 Zahlenbeispiel

Im Folgenden soll als Beispiel für die Spannungsermittlung eine Kreisbogenkuppel betrachtet werden, für welche W. Flügge nach seinem Verfahren die

Spannung berechnet hat. Es sind nun gegeben:

$$r = 30\,\text{m},\ \varphi_0 = 30°,\ d = 21{,}2\,\text{m},\ d/r = 0{,}707,\ p = 300\,\text{kg/m}^2$$

und

$$g = \frac{p}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}}.$$

Um die Gesamtlast und den Abstand der Resultante $\frac{1}{2}W$ von der ξ-Achse zu berechnen, wird die Schale in Teilflächen mit $\Delta\varphi = \Delta\theta = 5°$ geteilt, woraus erfolgt

$$W = 295\text{t} \quad \text{und } c = 7{,}2\text{m}.$$

Mit $N'_{d0} = \frac{1}{2} r g = 4{,}5\text{t/m}$ gehen die Gl. (13a) und (14a) über in

$$4{,}5 + \frac{1}{3}k_1 r^2 \times 0.5 - \frac{1}{5}k_2 r^4 \times 0.250 = 0,$$

$$\frac{250.6}{30\times 21.2} + 4.5\times 0.5\times 0.17347 + k_1 r^2 \times 0.250\times 0.10489 + k_2 r^4 \times 0.125 \times 0.07525 = 0,$$

woraus wir erhalten

$$k_1 r^2 = -12{,}19, \quad k_2 r^4 = -48{,}81,$$

und ferner

$$N_d' = 4.5 - 12.19\left(\frac{\xi}{r}\right)^2 - 48.81\left(\frac{\xi}{r}\right)^4.$$

An der Ecke erhalten wir

$$N'_{de} = -13{,}80\,\text{t/m} \ (\text{oder } N_{de} = -10{,}68\,\text{t/m}),$$

und

$$S_e = 13{,}80\,\text{t/m}.$$

Die Eckschubkraft ist um 11% kleiner als die nach Flügge. Auf eine weitere Berechnung lasse ich hier nicht ein, sondern gebe nur die Ergebnisse.

Für die Randschubkraft:

$$S = 26.37\theta - 0.044\theta^3.$$

Für die Normalschnittkraft in dem Mittelschnitt:

$$N = 4.5 + 21.756\varphi^2 - 41.436\varphi^4.$$

In dem Schnitt mit $\varphi_c = 0.1745$:

$$S = 4360\theta + 16.153\theta^3,$$

$$N_\varphi = 3.6369 + 26.970\theta^2 - 28.842\theta^4. \tag{28}$$

In dem Schnitt mit $\varphi_e = 0.3491$

$$S = 12.614\theta + 18.089\theta^3,$$

$$N_\varphi = 1.6286 + 18.486\theta^2 + 23.431\theta^4. \tag{29}$$

Die ausgerechneten Spannungen sind in Abb. 5 eingetragen. Die Spannungen werden dann für ein dreifach verschiedenes Verhalten untersucht:

1. Gleichgewicht des Schalenausschnitts PAE gegen Drehen in bezug auf die lotrechte Achse im Scheitel.
2. Gleichgewicht des Schalenausschnittes PHGF gegen Verschieben in senkrechter Richtung.
3. Ubereinstimmung der berechneten werte von N_d', die sich einerseits aus der Gl. (27) und anderseits mittels N_φ und S gemäss Gl. (28) oder (29) ermitteln lassen.

Es ergab sich, dass die Nachprüfung keine nennenswerte Abweichung zeigte.

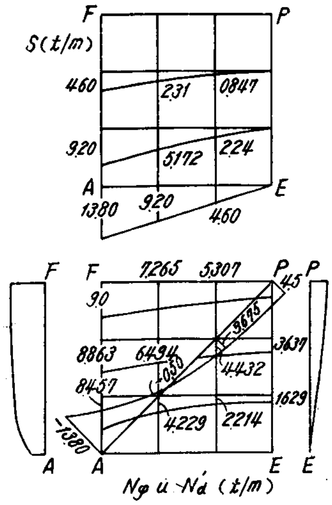

Abb. 5

II Rotationsschale über regelmässig vieleckigem Grundriss

§ 4. Rotationsschale über regelmässig vieleckigem Grundriss.

Was über die quadratische Translationsschale gesagt ist, gilt auch für die Rotationsschale über einem regelmässig vieleckigen Grundriss. Wir bezeichnen mit n die Anzahl der Ecken. Falls n gerade ist, wendet man dasselbe Verfahen wie früher an, indem man das Gleichgewicht der Schalenhälfte betrachtet. Falls n dagegen ungerade ist, so ist es nicht zweckmässig, sich aus die Schalenhälfte zu beziehen, weil die Binderscheibe notwendigerweise abgeschnitten wird und derer Spannungszustand noch unerreichbar ist. Zweckmässigerweise teilen wir im allgemeinen die Schale in n gleiche Teilflächen ab, ohne die Binderscheibe zu schneiden, wie in Abb. 6 ersichtlich ist. Da alle Meridianschnitte gleichwertig sind, folgt derselbe Spannungszustand in jedem Schnitt. Der Symmetrie wegen ist keine Schubspannung vorhanden, und die Normalspannung ist in wagerechter Richtung gerichtet. Bei senkrechter Belastung muss die resultierende Schnittkraft im Schnitt AP oder BP entfallen. Wir nehmen nun an, dass die Meridiankuve durch die Form gegeben ist:

$$y = f(x)$$

und ferner betrachten wir anstatt N die auf den Grundriss projizierte Schnittkraft

N'. Mit N' lautet die oben erwähnte Bedingung

$$\int_0^{x_0} N' dx = 0 . \tag{30}$$

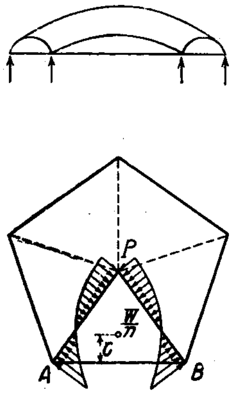

Abb. 6

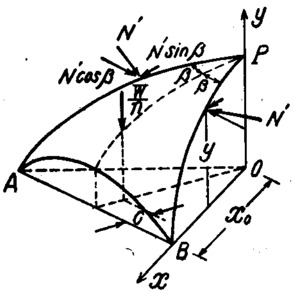

Abb. 7

Wir bezeichnen die Gesammtlast mit W. Die von dem Schalenausschnitt aufgenommene Teilbelastung beträgt demnach W/n, derer Abstand von der Seite AB mit c bezeichnet wird. Die Normalschnittkraft N' wird in $N' \cos \beta$ und $N' \sin \beta$ zerlegt, wobei β der halbe Zentriwinkel ist. Nun betrachten wir das Gleichgewicht des Schalenteils nebst der Binderscheibe gegen Drehen in bezug auf die Achse AB. Da das Moment infolge $N \cdot \cos \beta$ entfällt, erhalten wir

$$2 \int_0^x N' y \sin \beta dx = \frac{W}{n} c . \tag{31}$$

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, kann man in guter Annäherung annehmen:

$$\left. \begin{aligned} N' &= N_0' + a x^2 + b x^4 , \\ \text{oder} \qquad N' &= N_0' + a' x + b' x^2 . \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

wobei $N_0' = \frac{1}{2} Z r$. Durch Einsetzen von Gl, (32) in Gl. (30) und (31) lassen sich die Unbekannten errechnen.

Die Berechnung sowohl der Eckschubkraft S_e aus N_e' als auch der Schubverteilung erfolgt in derselben Weise wie früher.

Je nachdem n gerade oder ungerade ist, lässt sich die projizierte Schnittkraft in dem Mittelschnitt wie folgt darstellen:

$$N' = N_0' + n_1 x^2 + n_2 x^4 ,$$

oder

$$N' = N_0' + n_0 x + n_1' x^2 + n_2' x^3 .$$

webei wiederum $N_0' = \frac{1}{2}rZ$. Die letzte Gleichung enthält drei Unbekannte. Um diese zu bestimmen, fügen wir den früheren zwei Bedingungen noch eine weitere hinzu, nämlich, dN'/dx am Scheitel muss stetig sein, woraus entsteht

$$n_0 = a' .$$

Die übrigen Unbekannten sind ohne weiteres aus den schon angegebenen Bedingungen zu ermitteln.

Schlussfolgerung

In vorstehender Arbeit legt der Verfasser ein praktisches Berechnungsverfahren für eine quadratische Translationsschale vor. Die Erzeugende kann beliebig gekrümmt sein. Der Grundgedanke des Rechnungsvorgangs liegt darin, dass man die Schnittkraft in einem Diagonalschnitt in einer mit einigen Unbekannten verbundenen algebraischen Formel angibt, und dass man die Unbekannten mittels der Gleichgewichtsbedingungen der Schalenhälfte ermittelt. Zur Ergänzung fügte der Verfasser noch den Fall der ausgeschnittenen Rotationsschale über vieleckigem Grundriss hinzu. Da man keine Differentialgleichung aufzulösen braucht, ist das Verfahren sehr praktisch und zwar sei darauf hingewiesen, dass die so errechnete Spannung in technischer Hinsicht, was ihre Geranigkeit betriffte, durchaus genügt.

Das Verfahren setzt aber voraus, dass der Grundriss ein regelmässiges Vieleck bildet und dass die Schale symmetrisch belastet wird. Wenn es sich um eine besondere Schale über einem rechteckigen oder veszerrten vieleckigen Grundriss handelt, ermöglicht die Theorie der affinen Schale nach F. Dischinger die Ermittelung der Spannung.