Isomorphisme et le problème de Cauchy pour un opérateur différentiel p-parabolique

Par

Takeshi KOTAKE*

(Réçu le 31 Juillet 1959)

Dans ce mémoire, nous avons démontré l'inégalité d'énergie pour un opérateur différentiel p-parabolique. A l'appui de cette inégalité nous avons discuté la différentiabilité de la solution et donné une autre démonstration du problème de Cauchy.

Introduction.

Suivant l'idée de M. J. Leray, M. S. Mizohata a réussi à résoudre le problème de Cauchy pour un opérateur p-parabolique par l'application de la théorie de semi-groupe.

D'autre part, dans son mémoire récent [3], M. L. Gårding a montré une méthode directs pour le problème de Cauchy de l'opérateur hyperbolique, sans supposer la théorie de l'existence locale de Cauchy-Kowalewski.

Nous nous proposons dans ce mémoire de démontrer comme dans [3] deux inégalités: inégalité d'énergie et inégalité duale. La première assure que l'opérateur $\mathcal{A}(x, D)$, considéré comme application continue d'un espace E dans un autre F munis de topologies convenables, est biunivoque et que l'application inverse est aussi continue. Or, la seconde se rattache à l'application transposée de $\mathcal{A}(x, D)$ et montre que c'est une application biunivoque de F' dans E' où E', F' sont les espaces duales de E et F; ainsi, selon la théorie générale de l'espace vectoriel topologique, on démontre l'isomorphie de E et F. Ennonçons notre résultat principal:

Soit $\mathcal{A}(x, D)$ un opérateur différentiel p-parabolique d'ordre $m+1$ à coefficients indéfiniment différentiables et uniformément bornés avec toutes leurs dérivées. Alors on peut étendre l'opérateur $\mathcal{A}(x, D)$ à un isomorphisme de $\mathcal{H}^{k+m+1,q}$ sur $\mathcal{H}^{k,q}$.

Voici le plan de ce mémoire.

Dans la section 1, 2, 3, nons allons donner les définitions de l'opérateur p-parabolique, quelques lemmes et les inégalités d'intégrale fondamentales. La section 4 est consacrée à la démonstration de l'inégalité d'énergie et la section 5 à l'inégalité

* Section de Mathématique et Physique Appliquées

duale. Dans notre méthode abstraite, la solution obtenue n'a pas en général des dérivées au sens classique. En vertu du lemme de Sobolev, pour démontrer la différentiabilité, il suffit d'avoir à priori majoration locale des dérivées de la solution par L^2-norme.

Ces questions sont traitées dans la section 6; nous y considérons aussi la régularité de la solution au bord, qui a l'importance dans le problème de Cauchy.

Comme conséquence des sections précédentes, nous donnons dans la section 7 la démonstration du problème de Cauchy.

Avant de terminer l'introduction, je veux exprimer mes vifs et cordiaux remerciments à Prof. Kunii pour l'encouragement continuel et les direction au cours de mes études. Je prie aussi Prof. Yamaguti et M. Tamano d'agréer mes sinsères gratitudes pour de maintes discussions et de suggestions qu'ils m'avaient apportées.

1. Préliminaires.

Soit R^{n+1} l'espace euclidien à $n+1$ dimension avec les coordonnées $(x_0, x_1, \cdots, x_m)$. $\mathcal{D}$ est une bande fermée dans R^{n+1} définie par $\mathcal{D}=\{x\in R^{n+1}: 0\leqslant x_0\leqslant 1\}$; $\mathcal{D}_t$, π_t, et $\mathcal{D}_t^*$ sont les parties de $\mathcal{D}$ correspondant respectivement à $0\leqslant x_0\leqslant t$, $x_0=t$ et $t\leqslant x_0\leqslant 1$. Soit E^{n+1} l'espace dual de R^{n+1} par rapport à la forme bilinéaire $\langle x, \xi\rangle=\sum_{j=0}^{n} x_j\cdot\xi_j$; α est un multi-indice aux composants de nombre entier positif pour lequel on associe deux normes: $|\alpha|=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j$ et $|\alpha|_p=\alpha_0 p+\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, où p est un entier défini ultérieurement. $C^{k,q}(\mathcal{D})$ est une famille des fonctions définies $\mathcal{D}$, à support compact, ayant les dérivées continues jusqu'à l'ordre α, où $\alpha_0\leqslant k$, $|\alpha|_p\leqslant kp+q$; $C^\infty(\mathcal{D})=\bigcap_{k,q} C^{k,q}(\mathcal{D})$.

Soit $\mathcal{A}(x, D)=\sum_{\alpha}\mathcal{A}_\alpha(x)D_{x_0}^{\alpha_0}\cdot D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$ un opérateur différentiale de type $(m+1, p)$ défini dans $\mathcal{D}$, c-à-d. avec α tel que $|\alpha|_p\leqslant(m+1)p$, $\mathcal{A}_0(x, D)=\sum\mathcal{A}_\alpha(x)D_{x_0}^{\alpha_0}D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$ sa partie principale formée des termes correspondant à $|\alpha|_p=(m+1)p$. $\mathcal{A}_0(x, i\xi)=\sum_{\alpha}\mathcal{A}_\alpha(x)(i\xi_0)^{\alpha_0}(i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}$ est la forme caractéristique de $\mathcal{A}(x, D)$. On entend par les racines caractéristiques de $\mathcal{A}(x, D)$ les nombres complexes λ_k satisfaisant ù l'équation $\mathcal{A}_0(x, i\xi)=0$, où $\lambda=i\xi_0$. Remarquons que λ_k sont les fonctions homogènes d'ordre p en $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$.

On dit alors avec M. Petrowsky que $\mathcal{A}(x, D)$ est régulièrement p-parabolique d'ordre $m+1$, si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $\mathcal{A}(x, D)$ est de type $(m+1, p)$ avec $\mathcal{A}_\alpha(x)=1$ pour $\alpha=(m+1, 0, \cdots, 0)$
2) il existe une constante $-\delta>0$ telle que $Re\,\lambda_k(x; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\leqslant-\delta\cdot S^{p/2}$, où $S^2=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2$.

Soit $\mathcal{B}(x, D)$ un opérateur différentiel défini par $\mathcal{B}(x, i\xi)=-iD_{\xi_0}\mathcal{A}(x, i\xi)$, qui est, comme on voit facilement, un opérateur p-parabolique d'ordre m. Soit $\tau_q=\sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\cdot D^\alpha$ où $\alpha_0=0$ et $|\alpha|_p\leqslant q$.

Pour simplifier, nous supposons dans la suite que les coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, ainsi que toutes leurs dérivées, soient uniformément bornés dans $\mathcal{B}$.

Lemme 1.1 (Gårding). Soient $r(t)$, $s(t)$, et $k(t)$ les fonctions non négatives définies dans l'intervalle $[0, 1]$. Supposons que $r(t)$ soit intégrable et que $k(t)$ soit non décroissant, alors l'inégalité :

$$r(t)+s(t)\leqslant c\int_0^t r(t)dt+k(t) \qquad c>0$$

entraîne :

$$r(t)+s(t)\leqslant k(t)e^{ct}.$$

Soit $D_{t,\lambda}=D_t-\lambda$ un opérateur différentiel en t, où λ est un nombre complexe dépendant des paramètres $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ de la façons suivantes 1) homogène d'ordre p et borné, 2) il existe une constante $\delta>0$, telle que $Re\,\lambda(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)<-\delta(\sum\xi_j^2)^{p/2}$. Alors on a le

Lemme 1.2. Pour tout $t\in[0, 1]$ et toute fonction f à valeur complexe, continûment différentiable dans $[0, 1]$, on a une constante $c>0$ telle que :

$$c[\sigma_t(f)^2+s^p\int_0^t\sigma_t(f)^2dt]-c^{-1}\cdot\sigma_0(f)^2$$
$$\leqslant|D_{t,\lambda}f|^2+s^p\int_0^t|D_{t,\lambda}f|^2dt$$

où $s^2=\sum_{j=1}^n\xi_j^2$ et $\sigma_t(f)^2=|D_tf|_t^2+|s^pf|_t^2$.

Démonstration. Posons $\lambda(\xi)=\mu(\xi)+i\nu(\xi)$. Par la substitution $f(t)\to\tilde{f}(t)=e^{i\nu\cdot t}f(t)$, la démonstration se ramène au cas de $\lambda(\xi)$ réel. Pour $\lambda(\xi)$ réel, on a l'identité :

$$|D_{t,\lambda}f|_t^2=|D_tf|_t^2+|\lambda(\xi)\cdot f|_t^2-\lambda(\xi)D_t(|f|^2)_t.$$

Par hypothèse, il existe une constante $\delta>0$ telle que $\lambda(\xi)<-\delta\cdot s^{p/2}$; donc, par intégration de cette identité dans l'intervalle $[0, t]$, on a : $s^{2p}|f|_t^2\leqslant c_1[s^p\int_0^t|D_{t,\lambda}f|^2dt+s^{2p}|f|_0^2]$, parce que $\lambda(\xi)$ est homogène d'ordre p et borné sur la sphère d'unité $\sum_{j=1}^n\xi_j^2=1$. Or, on a : $|D_tf|^2\leqslant c_2[|D_{t,\lambda}f|^2+s^{2p}|f|^2]$. Il résulte de ces majorations :

$$\sigma_t(f)^2\leqslant c_3[|D_{t,\lambda}f|^2+s^p\int_0^t|D_{t,\lambda}f|^2dt+s^{2p}|f|_0^2].$$

On peut procéder de même pour obtenir la majoration de $s^p\int_0^t\sigma_t(f)^2dt$.

Soit $D_{t,\lambda}^m=\prod_{k=1}^m(D_t-\lambda_k)$, un opérateur différentiel dont les λ_k satisfont aux conditions requises du lemme précédent.

Lemme 1.2'. Soit $f(t)$ une fonction à valeur complexe, m-fois continûment différentiable dans l'intervalle $[0, 1]$. Il existe alors une constante $c>0$ telle que

$$c[\sigma_t^m(f)^2+s^p\int_0^t\sigma_t^m(f)^2dt]-c^{-1}\cdot\sigma_0^m(f)^2$$
$$\leqslant|D_{t,\lambda}^mf|^2+s^p\int_0^t|D_{t,\lambda}^mf|^2dt$$

où $\sigma_t^m(f)^2=\sum_{k=1}^{m}|D_t^k s^{(m+k)p} f|^2$.

La démonstration se fait facilement par l'application itérée du lemme précédent.

2. Inégalités d'intégrale.

Définition. Soit k, q deux entiers positifs.

$$\sigma^{k,q}(f, g;\ U)=\sum_{(\alpha)}\int_U D^\alpha f\cdot\overline{D^\alpha g}dU$$

où la somme s'étend sur tout α avec $\alpha_0\leqslant k$ et $|\alpha|_p\leqslant kp+q$. Dans la suite, on prend pour U divers domaines (p. ex. $U=\mathcal{D}$, π_t $\cdots$).

$\sigma^{k,q}(f;U)$ est par définition $[\sigma^{k,q}(f, f;U)]^{1/2}$.

Dans cette section, nous prouvons le

Théorème 2.1. Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que de δ, q et des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, telle que

$$c\cdot[\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}\cdot[\sigma^{m,q+p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2 \\ +\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_0)^2]\leqslant Re\,\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f,\tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)$$

pour tout t et tout $f\in C^{m+1}(\mathcal{D})$.

Avant de faire la démonstration, nous commençons par nous préparer quelques lemmes.

Lemme 2.1. Soit $r<q$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $C(\varepsilon)>0$ ne dépendant que de k, q et ε, telle que

$$\sigma^{k,r}(f;\mathcal{D})\leqslant\varepsilon\cdot\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})+C(\varepsilon)\cdot\sigma^{k,0}\cdot(f;\mathcal{D})$$

où $f\in C^{k,q}(\mathcal{D})$.

Démonstration. Désignons par $f\to\hat{f}$ la transformation de Fourier par rapport aux coordonées spatiales $x'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$:

$$\hat{f}(t,\xi')=(2\pi)^n\int f(t,x')\exp(-i\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j)dx'$$

où nous écrivons t au lieu de x_0.

Par définition,

$$[\sigma^{k,r}(f,\mathcal{D})]^2=\sum_{(\alpha)}\int_{\mathcal{D}}D^\alpha f\cdot\overline{D^\alpha f}d\mathcal{D}$$

où la somme s'étend sur tout α avec $\alpha_0\leqslant k$ et $|\alpha|_p\leqslant kp+r$. Maintenant, selon l'identité de Parseval, cette intégrale est égale à

$$\sum_{(\alpha)}\int_{\hat{\mathcal{D}}}|D_t^{\alpha_0}(i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}\hat{f}|^2d\hat{\mathcal{D}}$$

où $\hat{\mathscr{D}}$ est une bande dans E^{n+1} définie par $0\leqslant\xi_0\leqslant t$. Donc on n'a qu' à remarquer qu'il existe une constante $C(\varepsilon)>0$ telle que

$$\begin{aligned}&\sum_{(\alpha)}|D_t^{\alpha_0}(i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}\hat{f}|^2\\ &\leqslant\sum_{(\gamma)}[\varepsilon|D_t^{\gamma_0}(i\xi_1)^{\gamma_1}(i\xi_2)^{\gamma_2}\cdots(i\xi_n)^{\gamma_n}\hat{f}|^2+C(\varepsilon)|D^{\gamma_0}\hat{f}|^2]\end{aligned}$$

où γ prend toutes les valeurs avec $\gamma_0\leqslant k$ et $|\gamma|_p\leqslant kp+q$, car, alors, l'identité de Parseval donne inversement le résultat à démontrer.

Remarque. Les majorations sont aussi valables pour $\mathscr{D}$ et π_t.

Soit $\mathscr{A}(D)$ un opérateur différentiel p-parabolique à coefficients constants, ne contenant que la partie principale. Alors on a le

Lemme 2. 2. Pour tout $f\in C^{m+1}(\mathscr{D})$, il existe une constante $c>0$ telle que

$$\begin{aligned}&c[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathscr{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m,0}(f;\mathscr{D}_t)^2\\ &\quad+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2]\leqslant Re\,(\mathscr{A}f,\mathscr{B}f;\mathscr{D}_t)\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Parce que $f\in C^{m+1}(\mathscr{D})$, la transformée de Fourier $f(t,\xi')$ est une fonction $(m+1)$ fois continûment différentiable en t dans l'intervalle $[0, 1]$.

Or, on a avec les racines caractéristiques $\lambda_j(\xi')$ de $\mathscr{A}(D)$

$$[\mathscr{A}(D)f]^\wedge=\prod_{j=1}^{m+1}(D_t-\lambda_j(\xi'))\hat{f}\,.$$

En vertu de l'identité de Parseval et de la définition de $\mathscr{B}(D)$, l'intégrale $Re\,(\mathscr{A}(D)f,\mathscr{B}(D)f;\mathscr{D}_t)$ peut s'écrire comme suit:

$$Re\,(\mathscr{A}(D)f,\mathscr{B}(D)f;\mathscr{D}_t)=\sum_{j=1}^{m+1}\int_{\hat{\mathscr{D}}_t}(D_t-Re\,\lambda_j)\,|\prod_{k\neq j}(D_t-\lambda_k)\hat{f}|^2dt\,d\xi'\,.$$

Posons $D_{t,k}^m=\prod_{j\neq k}(D_t-\lambda_k)$; alors, pour tout k, $D_{t,k}^m$ sont les opérateurs du lemme 1. 2'. Donc, avec les notations de la section précédente, on a une constante $c>0$, telle que

$$\begin{aligned}&c_1[\sigma_t^m(f)^2+s^p\int_0^t\sigma_t^m(f)^2dt]-c_1^{-1}\cdot\sigma_0^m(f)^2\\ &\leqslant\sum_k[|D_{t,k}^mf|^2+\int_0^t(-Re\,\lambda_k)|D_{t,k}^mf|^2dt]\,.\end{aligned}$$

L'intégration de cette inégalité par rapport à $\xi'=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ entraîne:

$$\begin{aligned}&c_2[\sum_{|\alpha|_p=mp}\int_{\mathscr{D}_t}|D^\alpha f|^2dx+\sum_{|\alpha|_p=mp+p/2}\int_{\mathscr{D}_t}|D^\alpha f|^2dx]-c_2^{-1}\cdot\sum_{|\alpha|_p=mp}\int_{\pi_t}|D^\alpha f|^2dx'\\ &\leqslant Re\,(\mathscr{A}(D)f,\mathscr{B}(D)\,;\mathscr{D}_t)\end{aligned}$$

où nous avons employé l'identité de Parseval ; ce qui donne immédiatement le lemme 2. 2.

Pour étendre ce lemme à l'opérateur de coefficients variables, nous ferons usage d'une partition de l'unité régulière.

Définition. Nous disons qu'une partition de l'unité $\{\varphi_\nu; \sum\varphi_\nu^2=1\}$ est régulière si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $\varphi_\nu \in C^\infty(\mathcal{D})$ et pour tout multi-indice il existe une constante $c_\alpha>0$ telle que $\sup_{(\mathcal{D})}[\sum_\nu |D^\alpha\varphi_\nu|]<c_\alpha$.

2) les supports $S(\varphi_\nu)$ forment un recouvrement d'ordre fini, c-à-d, pour N assez grand, l'intersection de N-supports de φ_ν arbitrirement choisis est toujours vide.

Comme exemple de cette partition de l'unité, on prend le système formé des translatés d'une fonction $\in C^\infty(\mathcal{D})$.

Lemme 2.3. Soit $\sum\varphi_\nu^2=1$ une partition de l'unité régulière. Il existe alors une constante $c>0$ telle que

$$1/4\,\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})-c\cdot\sigma^{k,0}(f;\mathcal{D})\leqslant\sum_{(\nu)}\sigma^{k,q}(\varphi_\nu\cdot f;\mathcal{D})$$

pour tout $f\in C^{k,q}(\mathcal{D})$.

Remarque. Le lemme est aussi valable pour π_t, $\mathcal{D}_t$, etc.

Démonstration.

$$\begin{aligned}[\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})]^2 &= \sum_{(\alpha)}\int_{\mathcal{D}} D^\alpha f\overline{D^\alpha f}\,d\mathcal{D}\\ &= \sum_{(\nu)(\alpha)}\int_{\mathcal{D}}\varphi_\nu\cdot D^\alpha f\,\overline{\varphi_\nu D^\alpha f}\,d\mathcal{D}.\end{aligned}$$

D'autre part $\varphi_\nu\cdot D^\alpha f=D^\alpha(\varphi_\nu f)+\sum\mathcal{A}_\gamma D^\gamma f$, où $|\gamma|_p\leqslant kp+q-1$ et les coefficients sont une dérivée de φ_ν. Donc on a une majoration de la forme suivante:

$$[\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})]^2\leqslant 2\sum_{(\nu)}[[\sigma^{k,q}(\varphi_\nu f;\mathcal{D})]^2+\sum_\gamma\int_{S(\varphi_\nu)}\mathcal{A}_\gamma^2|D^\gamma f|^2dx].$$

En tenant compte de ce que $|\gamma|_p\leqslant kp+q-1$ et de la régularité de $\sum\varphi_\nu^2=1$, on a pour uue constante $c_2>1$

$$\sum_{\nu,\gamma}\int_{S(\varphi_\nu)}A_\gamma^2 D^\gamma f\overline{D^\gamma f}\,d\mathcal{D}\leqslant c_2[\sigma^{k,q-1}(f;\mathcal{D})]^2.$$

Donc on a

$$[\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})]^2\leqslant 2\{\sum_{(\nu)}[\sigma^{k,q}(\varphi_\nu f;\mathcal{D})]^2+c_2[\sigma^{k,q-1}(f;\mathcal{D})]^2\},$$

ce qui entraîne immédiatement le lemme, grâce au lemme 2.1.

Soit $\mathcal{A}(x, D)$ un opérateur différentiel p-parabolique à coefficients variables, ne contenant que la partie principale.

Proposition 2.1. Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que de δ et des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, telle que

$$c[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2 \\ +\sigma^{m,0}(f,\pi_0)^2]\leqslant Re\,(\mathcal{A}f,\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)$$

pour tout $t\in[0,1]$ et tout $f\in C^{m+1}(\mathcal{D})$.

Démonstration. Nous faisons la démonstration en deux étapes.

(a) Soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition de l'unité régulière. On a alors pour tout $\varepsilon_1>0$ une constante $C(\varepsilon_1)$ telle que

$$|(\mathcal{A}f,\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)-\sum_{(\nu)}(\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\ \mathcal{B}(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{D}_t)| \\ \leqslant\varepsilon_1\cdot[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2]+C(\varepsilon_1)[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2].$$

Parce que $\sum_\nu \varphi_\nu^2=1$, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}f,\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)&-\sum_\nu(\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\mathcal{B}(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{D}_t)\\ &=\sum_\nu[(\varphi_\nu\mathcal{A}f,\ \varphi_\nu\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)-(\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\ \mathcal{B}(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{D}_t)]\\ &=\sum_\nu[(\varphi_\nu\mathcal{A}f-\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\ \varphi_\nu\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)+(\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\ \varphi_\nu\mathcal{B}f-\mathcal{B}(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{A}_t)]\\ &=\sum_{\nu,\alpha,\beta}\int_{\mathcal{D}_t}c^\nu_{\alpha,\beta}D^\alpha fD^\beta\bar f\,dx+\int_{\mathcal{D}_t}c^\nu_\gamma D_t^{m+1}fD^\gamma\bar f\,dx\end{aligned}$$

où α_0, $\beta_0\leqslant m$, $|\alpha|_p+|\beta|_p\leqslant(2m+1)p-1$ et $\gamma_0\leqslant m-1$, $|\gamma|_p\leqslant mp-1$. $c^\nu_{\alpha,\beta}$ et c^ν_γ sont les fonctions uniformément bornées dans $\mathcal{D}$, déterminées de φ_ν et des coefficients de $\mathcal{A}(x,D)$. Parce que $f\in C^{m+1}(\mathcal{D})$, et tenue compte de la propriété de la partition $\{\varphi_\nu\}$, l'intégration par parties donne une majoration de la forme:

$$|\sum_{\nu,\alpha,\beta}\int_{\mathcal{D}_t}c^\nu_{\alpha\beta}D^\alpha fD^\beta\bar f\,dx|\leqslant c_1\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)\sigma^{m,p/2-1}(f;\mathcal{D}_t)$$

de même

$$|\sum_{\nu,\alpha,\beta}\int_{\mathcal{D}_t}c^\nu_\gamma D_t^{m+1}fD^\gamma\bar f\,dx|\leqslant c_2[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)\sigma^{m-1,p-1}(f;\pi_t) \\ +\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)\sigma^{m,p/2-1}(f;\mathcal{D}_t)+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2].$$

Or, selon l'inégalité de Schwarz et le lemme 2.1, on a pour tout $\varepsilon_1>0$ une constante $C(\varepsilon_1)>0$ telle que

$$(2c_1+c_2)[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)\sigma^{m-1,p-1}(f;\pi_t)+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)\sigma^{m,p/2-1}(f;\mathcal{D}_t)] \\ \leqslant\varepsilon_1[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2]+C(\varepsilon_1)[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2].$$

Donc la majoration (a) se trouve démontrée

(b) Désignons par $\mathcal{A}^\nu(D)$ l'opérateur p-parabolique à coefficients constants défini par $\mathcal{A}^\nu(D)=\mathcal{A}(x_\nu,D)$ où x_ν est un point quelconque dans le support $S(\varphi_\nu)$. diam (φ) signifie le suprémum des diamètres de $S(\varphi)$. On a alors pour tout $\varepsilon_2>0$, deux contantes c_3, $c_4(\varepsilon_2)$, telles que

$$|\sum_\nu(\mathcal{A}(\varphi_\nu f),\mathcal{B}(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{D}_t)-(\mathcal{A}^\nu(\varphi_\nu f),\mathcal{B}^\nu(\varphi_\nu f)\ ;\mathcal{D}_t)| \\ \leqslant c_3(\mathrm{diam}\,(\varphi)+\varepsilon_2)[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2] \\ +c_4(\varepsilon_2)[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2]$$

où c_3 ne dépend que des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$.

Parce que $\mathcal{A}(x, D)=A_\alpha(x)D^\alpha$, $\mathcal{B}(x, D)=B_\beta(x)D^\beta$, on a

$$\sum_\nu[(\mathcal{A}(\varphi_\nu f), \mathcal{B}(\varphi_\nu f)\,;\mathcal{D}t)-(\mathcal{A}^\nu(\varphi_\nu f), \mathcal{B}^\nu(\varphi_\nu f)\,;\mathcal{D}_t)]$$
$$=\sum_{\nu,\alpha,\beta}\int_{S(\varphi_\nu)}[A_\alpha(x)B_\beta(x)-A_\alpha^\nu B_\beta^\nu]D^\alpha(\varphi_\nu f)\cdot D^\beta(\varphi_\nu f)dx$$

Par hypothèse, les coefficients $A_\alpha(x)$, $B_\beta(x)$ sont uniformément bornés dans $\mathcal{D}$, avec toutes leurs dérivées. Donc on peut trouver une constante $c>0$ indépendant de ν telle que

$$|A_\alpha(x)B_\beta(x)-A_\alpha^\nu B_\beta^\nu|\leqslant c\cdot\operatorname{diam} S(\varphi)$$

pour tout α, β, ν et tout $x\in S(\varphi_\nu)$.

Ainsi la majoration (b) se fait facilement comme dans (a) à l'aide de l'intégration par parties.

(c) Pour tout ν, $\mathcal{A}^\nu(D)$ est un opérateur p-parabolique à coefficients constants avec la même constante de parabolicité δ. Donc grâce à la proposition 2.1 et au lemme 2.3, il existe les constantes c_5, $c_6>0$ telles que

$$c_5[\sigma^{m,0}(f\,;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f\,;\mathcal{D}_t)^2]-c_6[\sigma^{m,0}(f\,;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f\,;\pi_0)^2]$$
$$\leqslant\sum_\nu Re\,(\mathcal{A}^\nu(\varphi_\nu f), \mathcal{B}^\nu(\varphi_\nu f)\,;\mathcal{D}_t)$$

où c_5 ne dépend que des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$.

De ces majorations (a), (b), et (c), il découle le théorème ; car, on prend ici une partition de l'unité tellement fine qu'on ait $c_3\operatorname{diam}(\varphi)\leqslant c_5/4$ et on réduit ε_1, ε_2 suffisamment petits de manière que $\varepsilon_1+c_3\varepsilon_2\leqslant c_5/4$, ce qui donne pour une constante $c_7>0$

$$c_5/2[\sigma^{m,0}(f\,;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f\,;\mathcal{D}_t)^2]-c_7[\sigma^{m,0}(f\,;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f\,;\pi_t)^2]$$
$$\leqslant Re\,(\mathcal{A}f, \mathcal{B}f\,;\mathcal{D}_t)\,.$$

Maintenant nous somme prêts à démontrer le théorème 2.1.

Par définition, $\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f\,;\tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f\,;\mathcal{D}_t)$ est la somme des termes $(D^\gamma\cdot\mathcal{A}f, D^\gamma\cdot\mathcal{B}f\,;\mathcal{D}_t)$ où $\gamma_0=0$, $|\gamma|\leqslant q+p/2$. Or, $D^\gamma\cdot\mathcal{A}f=\mathcal{A}D^\gamma f+\sum'$ où l'ordre des termes dans $\sum'$ se trouve diminué au moins d'une unité en p-norme et il est de même pour l'opérateur $\mathcal{B}(x, D)$. De ces remarques, il est aisé de voir que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $C(\varepsilon)>0$ telle que

$$\sum_\gamma|(D^\gamma\mathcal{A}f, D^\gamma\mathcal{B}f\,;\mathcal{D}_t)-(\mathcal{A}(D^\gamma f), \mathcal{B}(D^\gamma f)\,;\mathcal{D}_t)|$$
$$\leqslant\varepsilon[\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\pi_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f\,;\mathcal{D}_t)^2]+C(\varepsilon)[\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\pi_0)^2]\,.$$

Evidemment, $[\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\pi_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f\,;\mathcal{D}_t)^2]\leqslant c_2\sum_\gamma[\sigma^{m,0}(D^\gamma f\,;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(D^\gamma f\,;\mathcal{D}_t)^2]$ où $\gamma_0=0$ et $|\gamma|\leqslant q+p/2$; par conséquent,, appliqué à $D^\gamma f$, le théorème 2.2 entraine immédiatement le théorème 2.1.

3. Traces.

$\varepsilon^{k,q}(\mathcal{D})$ est un espace complété de $C^{k,q}(\mathcal{D})$ par rapport à la norme. $\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})$; $C^{\infty}(R^n)$ signifie une famille des fonctions indéfiniment différentiables dans R^n ; $\mathcal{G}^q$ est un espace complété de $C^{\infty}(R^n)$ par rapport à la norme $\sigma^q(f;R^n)=\left[\int_{R^n}\tau_q f\cdot\bar{f}\,dx\right]^{1/2}$; désignons par ${}^k\mathcal{G}^q$ l'espace produit de $\mathcal{G}^q$: ${}^k\mathcal{G}^q=\prod_{\gamma=1}^{k}\mathcal{G}^{q+\gamma\cdot p}$. Alors nous montrons qu'il existe pour tout $t\in[0,1]$ une application $Tr(f;t)$ de $\varepsilon^{k,q}(k\geqslant 1)$ dans ${}^{k-1}\mathcal{G}^{q+p/2}$.

Soit $\omega(\tau)$ une fonction définie sur la droite réelle, indéfiniment différentiable, identiquement 1 sur $|\tau|\leqslant 1/4$, s'aunulant pour $|\tau|\geqslant 1/2$; $\omega(t)=\omega(\tau-t)$.

Soit $f\in C^{k,q}(\mathcal{D})$, $r<k$ et $t<1/2$, on a alors

$$\int_{\pi_t}|D_t^r D_x^{q+p/2}f|^2dx=\int_{\mathcal{D}_t^*}D_t|\omega(t)D_t^r D_x^{q+p/2}f|^2dx\,.$$

En remarquant que f s'annule en dehors d'un compact de $\mathcal{D}$, on a donc

$$\int_{\pi_t}|D_t^r D_x^{q+p/2}f|^2dx=\sum_{\alpha,\beta}\int_{\mathcal{D}_t^*}c_{\alpha\beta}D^\alpha f D^\beta\bar{f}\,dx$$

où $|\alpha|_p$, $|\beta|_p\leqslant(r+1)p+q$, d'où il vient pour une constante $c>0$,

$$\sigma^{q+p/2}(D^\gamma f(t)\,;R^n)\leqslant c\cdot\sigma^{r+1,q}(f\,;\mathcal{D})\,.$$

Prenons $f\in\varepsilon^{k,q}$, auquel est attachée une suite de Cauchy (f_j) convergeant vers f dans $\varepsilon^{k,q}$. D'aprés l'inégalité ci-dessus la suite $(D^r f_j)$ $(r<k)$ forme une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}^{q+p/2+(k-r)p}$, qui converge donc vers un élément $D^r f(t)$ de $\mathcal{G}^{q+p/2+(k-r)p}$ (cette limite ne dépend pas du choix de (f_j), représentant de f). Par conséquant, il existe une application de $\varepsilon^{k,q}$ dans ${}^{k-1}\mathcal{G}^{q+p/2}$: $f\to(f(t),Df(t),\cdots,D^{k-1}f(t))$ et nous appelons cette image $Tr(f,t)$ la trace d'une fonction $f\in\varepsilon^{k,q}$ sur π_t. (Il en est de même pour $t<1/2$, si on considère $\mathcal{D}_t$ au lieu de $\mathcal{D}_t^*$).

Proposition 3.1. L'application $Tr(f,t)$ de $\varepsilon^{k,q}$ dans ${}^{k-1}\mathcal{G}^{q+p/2}$ est séparément continue.

C'est presque évident d'après la définition.

4. Inégalité d'énergie.

Dans cette section, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4.1. Soit $\mathcal{A}(x,D)$ l'opérateur régulièrement p-parabolique avec la constante de parabolicité δ. Alors il existe une constante $c>0$ telle que

$$\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\pi_t)+\sigma^{m+1,q}(f\,;\mathcal{D}_t)\leqslant c[\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f\,;\mathcal{D}_t)+\sigma^{m,q+p/2}(f\,;\pi_0)]$$

pour tout $t\in[0,1]$ et tout $f\in\varepsilon^{m+1,q}(\mathcal{D})$, où la constante c ne dépend que de δ et des coefficients de $\mathcal{A}(x,D)$.

Démonstration. D'après ce qui précède, les membres de deux côtés sont continues sur $\varepsilon^{m+1,q}(\mathcal{D})$; par conséquant, il suffit de le démontrer pour $f\in C^{m+1,q}(\mathcal{D})$. Or, selon le théorème 2.1, il existe une constante $c_1>0$ ne dépendant que de δ et des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, telle que

$$c_1[\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c_1^{-1}[\sigma^{m,q+p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2 \\ +\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_0)^2]\leqslant Re\, \sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \tau_{p/2}\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)\,.$$

Employons ici l'inégalité de Schwarz, ce qui donne pour tout $\varepsilon>0$

$$Re\, \sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)\leqslant \varepsilon^{-1}\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f;\mathcal{D}_t)^2+\varepsilon\cdot\sigma^{0,q}(\tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)^2\,.$$

Evidemment $\sigma^{0,q}(\tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)^2$ est majoré par $c_2\cdot\sigma^{m,q+p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2$; or, $D_t^{m+1}f=\mathcal{A}f+\sum A_{\alpha'}(x)D^{\alpha'}f$ avec $\alpha'_0\leqslant m$ et $|\alpha'|_p\leqslant(m+1)p$, ainsi, selon la définition de $\sigma^{m+1,q}(f;\mathcal{D}_t)$ on a

$$\sigma^{m+1,q}(f;\mathcal{D}_t)^2\leqslant c_3[\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f;\mathcal{D}_t)^2]\,.$$

Donc en choisissant ε suffisamment petit, on a

$$c_4[\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,q+p}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c_4^{-1}[\sigma^{m,q+p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2 \\ +\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_0)^2]\leqslant \sigma^{0,q}(\mathcal{A}f;\mathcal{D}_t)^2\,.$$

où la constante c_4 ne dépend que de δ et des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$. Ainsi, si on remarque que $\sigma^{m,q+p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2=\int_0^t\sigma^{m,q+p/2}(f;\pi_t)dt$, le lemme 1.1 nous donne immédiatement le théorème à démontrer.

Remarque 1. Le théorème 4.1 est aussi valable sous la condition moins restrictive sur les coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$: il suffit de supposer que $A_\alpha(x)$ et $D^\gamma A_\alpha(x)$ avec $\gamma_0=0$, $|\gamma|\leqslant q+p/2$ sont uniformément bornés et uniformément Lipshitziennes dans $\mathcal{D}$.

Remarque 2. Le théorème est aussi vrai avec la même constante $c>0$ pour les opérateurs dont les coefficients correspondant sont suffisamment voisins.

5. Inégalité duale.

Soit $C_0^\infty(\mathcal{D})$ sous ensemble de $C^\infty(\mathcal{D})$ formé des fonctions s'annulant au voisinage de π_0. Désignons par $\mathcal{H}^{k,q}$ l'adhérence de $C_0^\infty(\mathcal{D})$ dans $\varepsilon^{k,q}$; alors c'est une sous famille de $\varepsilon^{k,q}$ avec $Tr(f;0)=0$. Soit $\mathcal{H}^{-k,-q}$ l'espace dual de $\mathcal{H}^{k,q}$, mis en dualité par rapport à la forme bilinéaire $\langle f, \varphi\rangle$, qui est l'extension de l'intégrale $\int_{\mathcal{D}}f\cdot\bar{\varphi}dx$ pour $f\in\mathcal{H}^{k,q}$, $\varphi\in L^2$. Munissons cet espace de la norme définie par

$$\sigma^{-k,-q}(f;\mathcal{D})=\sup_{f\in C_0^\infty}|\langle f, \varphi\rangle|\,|\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})|^{-1}\,.$$

De ce que $\mathcal{H}^{k,q}$ est un espace hilbertien, il existe une application isométrique de $\mathcal{H}^{-k,-q}$ sur $\mathcal{H}^{k,q}$ que nous désignons par $\mathcal{U}$;

$$\sigma^{-k,-q}(f\,;\mathcal{D}) = \sigma^{k,q}(\mathcal{U}f\,;\mathcal{D})\,.$$

Soit $\mathcal{A}^*$ l'application transposée de $\mathcal{A}(x, D)$, application de $\mathcal{H}^{0,-q}$ dans $\mathcal{H}^{-m-1,q}$, qui coïncide avec $\mathcal{A}^*(\varphi) = \sum' (-1)^{|\alpha|}\cdot D^\alpha(\overline{\mathcal{A}}_\alpha \varphi)$ pour une fonction φ suffisamment régulière s'annulant au voisinage de π_1.

Posons

$$\sigma^{-m-1,-q}(\mathcal{A}^*\varphi\,;\mathcal{D}_t^*) = \sup_{f\in C_t^\infty} |\langle \mathcal{A}f, \varphi\rangle|\,|\sigma^{m+1,q}(f\,;\mathcal{D}_t^*)|^{-1}$$

où C_t^∞ signifie une sous famille de $C^\infty(\mathcal{D})$ formée des fonctions s'annulant au voisinage de $\mathcal{D}_t$.

Nous allons démontrer le

Théorème 5.1. Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que de δ et des coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$ telle que

$$\sigma^{0,-q}(\varphi\,;\mathcal{D}_t^*) \leqslant c\cdot\sigma^{-m-1,-q}(\mathcal{A}^*\varphi\,;\mathcal{D}_t^*)$$

pour tout $t\in[0, 1]$ et tout $\varphi\in\mathcal{H}^{0,-q}$.

Démonstration. Maintenant, en posant $g = \mathcal{U}\varphi$, l'application $\mathcal{U}$ nous permet d'écrire l'inégalité ci-dessus sous forme équivalente:

$$\sigma^{0,q}(g\,;\mathcal{D}_t^*) \leqslant c\cdot\rho(t)$$

où $\rho(t) = \sup_{f\in C_t^\infty} \sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, g\,;\mathcal{D}_t^*)\,|\sigma^{m+1,q}(f\,;\mathcal{D}_t^*)|^{-1}$ et $g\in\mathcal{H}^{0,q}$.

D'autre part, $\sigma^{0,q}(g\,;\mathcal{D}_t^*)$ et $\rho(t)$ sont continues sur $\mathcal{H}^{0,q}$, il suffit de démontrer cette inégalité pour $g\in C_0^\infty(\mathcal{D})$, partie partout dense de $\mathcal{H}^{0,q}$.

Soit $\mathcal{L}^*$ un opérateur différentiel p-parabolique d'ordre $m+1$, à coefficients constants. $\mathcal{L}$ est son adjoint formel, qui est donc p-antiparabolique. Or, la transformation de Laplace entraîne que $\mathcal{L}^*\mathcal{H}^{m+1,q}\supset C_0^\infty(\mathcal{D})$, et ainsi le théorème 4.2 est vrai pour l'opérateur à coefficients constants; ce qui montre qu'il existe une fonction indéfiniment différentiable $h\in\varepsilon^{m+1,q}$, s'annulant au voisinage de π_1, qui satisfait à $\mathcal{L}h=g$. (par suite du changement $t\to 1-t$, on applique le théorème 4.2 à $\mathcal{L}$).

Maintenant, si on remarque que $f\in C_t^\infty$ et que h s'annule au voisinage de π_1, on obtient par suite de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}|\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \mathcal{L}h\,;\mathcal{D}_t^*) - \sigma^{0,q}(\overline{\mathcal{A}^*\bar{h}}, \mathcal{L}^*\bar{f}\,;\mathcal{D}_t^*)| \\ \leqslant c_1\sigma^{m,q+p}(f\,;\mathcal{D}_t^*)\cdot\sigma^{m,q+p-1}(h\,;\mathcal{D}_t^*)\end{aligned}$$

pour une constante $c_1>0$.

D'autre part, selon la définition de $\rho(t)$, on a pour tout $f\in C_t^\infty$

$$\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \mathcal{L}h\,;\mathcal{D}_t^*) \leqslant \rho(t)\cdot\sigma^{m+1,q}(f\,;\mathcal{D}_t^*)\,.$$

Il en résulte donc;

$$\sigma^{0,q}(\bar{\mathcal{A}}^*\bar{h}, \mathcal{L}^*f ; \mathcal{D}_t^*) \leqslant \sigma^{m+1,q}(f ; \mathcal{D}_t^*)[\rho(t)+c_1\cdot\sigma^{m,q+p-1}(h ; \mathcal{D}_t^*)] .$$

D'après le théorème 5.2, $\mathcal{L}^*C_t^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}^{0,q}(\mathcal{D}_t^*)$; par conséquant, il existe une suite (f_j) des éléments $\in C_t^\infty$, qui converge vers $\bar{\mathcal{A}}^*\bar{h}$ au sens de la topologie de $\mathcal{H}^{0,q}$. En se servant de l'inégalité d'énergie pour l'opérateur $\mathcal{L}^*$ dans $\mathcal{D}_t^*$, on obtient:

$$\overline{\lim}\, \sigma^{m+1,q}(f_j ; \mathcal{D}_t^*) \leqslant c_2\cdot\sigma^{0,q}(\bar{\mathcal{A}}^*\bar{h} ; \mathcal{D}_t^*) .$$

Ces inégalités entraînent:

$$\sigma^{0,q}(\bar{\mathcal{A}}^*\bar{h}, \bar{\mathcal{A}}^*\bar{h} ; \mathcal{D}_t^*) \leqslant c_2\cdot\sigma^{m+1,q}(h ; \mathcal{D}_t^*)[\rho(t)+c_1\cdot\sigma^{m,q+p-1}(h ; \mathcal{D}_t^*)] .$$

Ainsi en remarquant que $\bar{\mathcal{A}}^*$ est un opérateur p-antiparabolique, le même argument dont nous sommes servis dans le paragraphe 4 entraîne:

$$\sigma^{m,q+p/2}(\bar{h} ; \pi_t)+\sigma^{m+1,q}(\bar{h} ; \mathcal{D}_t^*) \leqslant c\cdot\rho(t) .$$

Parce que $g=\mathcal{L}h$, ce n'est que l'inégalité cherchée.

Théorème 5.2. L'application $\mathcal{A}(x, D)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}^{k+m+1,q}(\mathcal{D})$ sur $\mathcal{H}^{k,q}(\mathcal{D})$.

Démonstration. Supposons d'abord $k=0$. Le théorème 4.1 montre que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+1,q}$ dans $\mathcal{H}^{0,q}$; donc l'image $\mathcal{A}\cdot\mathcal{H}^{m+1,q}$ est fermée dans $\mathcal{H}^{0,q}$. Maintenant pour que $\mathcal{A}$ soit surjective, il suffit de montrer que $\mathcal{A}C_0^\infty(\mathcal{D})$ est partout dense dans $\mathcal{H}^{0,q}$. Mais c'est une conséquence immédiate du théorème 4.1, affirmant que l'application transposée $\mathcal{A}^*$ est biunivoque dans $\mathcal{H}^{0,-q}$.

Le cas k positif. Soit P un opérateur p-parabolique d'ordre k, alors la composée $P\cdot\mathcal{A}$ est régulièrement p-parabolique d'ordre $k+m+1$, donc d'après ce qui précède, $P\cdot\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{k+m+1,q}$ sur $\mathcal{H}^{0,q}$, tandis que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{k+m+1,q}$ dans $\mathcal{H}^{k,q}$ (1) selon le théorème 4.1, ce qui entraîne que $\mathcal{A}$ est surjective; ainsi le théorème se trouve démontré.

6. Différentiabilité.

Dans cette section, on démontre la différentiabilité de la solution, en s'appuyant sur le lemme bien connu de Sobolev.

Soit Ω une boule ouverte dans R^{n+1} ; $n'=[n+1/2]$ la partie entière de $n+1/2$; $L^2(\Omega)$ est la famille de fonctions carrées sommables à valeurs complexes.

Nous donnons ici sans démonstration le

(1) Note ajoutée: En tenant compte de l'équation $\mathcal{A}f=g$ et de l'inégalité d'énergie (Th. 4.1), on montre facilement:

$$\sigma^{m+k+1,q}(f ; \mathcal{D}_t) \leqq \sigma^{k,q}(g ; \mathcal{D}_t)$$

pour une constante $c>0$, où $f\in\mathcal{H}^{m+k+1,q}$, ce qui entraîne que l'application $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+k+1,q}$ dans $\mathcal{H}^{k,q}$.

Lemme 6.1. Supposons que $f\in L^2(\Omega)$ admette des dérivées $D^\alpha f\in L^2(\Omega)$ jusqu'à l'ordre α avec $|\alpha|\leqslant n'+k+1$ au sens de distribution, alors f est équivalente dans $L^2(\Omega)$ à une fonction k-fois continûment différentiable dans Ω, et ses dérivées sont conitnues dans $\bar{\Omega}$.

Remarque. Le lemme est aussi valable pour tout Ω, ayant la propriété de cône (Nirenberg [8]).

Théorème 6.1. Soit $\Omega_a(\Omega_a\subset\Omega\subset\mathcal{D})$ une boule ouverte. Il existe alors pour tout $f\in\varepsilon^{m+1,0}$ une constante $c>0$ ne dépendant que de q, Ω_a et Ω, telle que

$$c\cdot\sigma^{m+1,q}(J_\varepsilon f;\Omega_a)-c^{-1}\cdot\sigma^{m+1,0}(f;\Omega)\leqslant\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f;\Omega)$$

où J_ε est un régulalisateur.

De ce théorème et du lemme 6.1, il découle immédiatement la différentiabilité de la solution: supposons que $D^\alpha(\mathcal{A}f)=D^\alpha g\in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha|_p\leqslant k$; en vertu du théorème 6.1 (où $q=kp$), la famille $D^\alpha J_\varepsilon f$ avec $\alpha_0\leqslant m+1$, $|\alpha|_p\leqslant(m+k+1)p$ est une partie bornée dans $L^2(\Omega_a)$. Or, $L^2(\Omega_a)$ est hilbertien, donc sa partie bornée est faiblement relativement compact, de sorte qu'on peut en extraire une sous famille convergeant faiblement vers un élément de $L^2(\Omega_a)$, qui coïncide dans Ω_a avec la dérivée $D^\alpha f$ au sens de distribution. Maintenant en se servant de l'équation $\mathcal{A}f=g$, on peut exprimer les dérivées $D_t^{\alpha_0}f$ avec $\alpha_0\leqslant m+k+1$ par la combinaison linéaire de $D^\gamma g(|\gamma|_p\leqslant k)$ et des termes $D^\alpha f(\alpha_0\leqslant m+1,\ |\alpha|_p\leqslant(m+k+1)p)$.

Par conséquant, on a $D^\alpha f\in L^2(\Omega_a)$ pour tout α avec $|\alpha|_p\leqslant(m+k+1)p$; d'où résulte, grâce au lemme 6.1, le

Théorème 6.2. Si g et suffisamment régulière dans Ω, la solution $f\in\varepsilon^{m+1,0}$ de $\mathcal{A}f=g$ est aussi suffisamment régulière et ainsi f est la solution au sens ordinaire.

Remarque. Si g est indéfiniment différentiable dans Ω, f est aussi indéfiniment différentiable dans Ω.

Avant de démontrer le théorème 6.1, nous faisons ici quelques préparations.

Soit Ω une boule ouverte dans $\mathcal{D}$, $\bar{\Omega}$ son adhérence; $d(x,y)$ est la distance euclidienne de R^{n+1}. $\Omega_a=\{x\in\Omega;\ d(x,y)>a,\ y\in\bar{\Omega}-\Omega\}$; $C^\infty(\Omega)$ est une famille de fonctions indéfiniment différentiables à support dans Ω. Posons $\eta_\varepsilon=\varepsilon^{-n-1}\cdot\eta(x/\varepsilon)$ où $\eta(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable, non négative, qui satisfait dans R^{n+1} à $\eta(x)=0$ pour $|x|\geqslant 1$, $\eta(x)=\eta(-x)$ et $\int_{R^{n+1}}\eta(x)dx=1$.

Définissons maintenant un régularisateur J_ε par

$$J_\varepsilon f(x)=\int_\Omega\eta_\varepsilon(x-x')f(x')dx'$$

où $f\in L^2(\Omega)$.

Alors il est facile de voir que $J_\varepsilon f(x)$ est indéfiniment différentiable dans Ω et que lorsque $\varepsilon\to 0$, $J_\varepsilon f\to f$ dans $L^2(\Omega)$; de plus, si la dérivèe au sens de distribution $D^\alpha f$ est à $L^2(\Omega)$, on a $D^\alpha J_\varepsilon f(x)=J_\varepsilon D^\alpha f(x)$ pour $\varepsilon<a$ et $x\in\Omega_a(x)$, car pour tout $\varphi\in C^\infty(\Omega)$, on a $\int_\Omega D^\alpha f(x')\varphi(x')dx'=\int_\Omega f(x')(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(x')dx'$, ainsi il suffit de poser $\varphi(x')=\eta_\varepsilon(x-x')$ qui est à $C^\infty(\Omega)$ pour tout $x\in\Omega_a$, si $\varepsilon<a$.

Soit $M=\sum c_j(x)D_j$ un opérateur différential d'ordre 1, où $c_j(x)$ est continûment différentiable dans R^{n+1} et satisfait à $\sup_{x\in R^{n+1}}\sum_{k,j}|D_kc_j(x)|<c$.

Lemme 6.2. Il existe une constante $c>0$ ne dependant que des $c(x)$ telle que

$$\int_\Omega[M(J_\varepsilon f)\cdot\bar{g}-Mf\cdot J_\varepsilon\bar{g}]dx\leqslant c\|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $f\in C^\infty(\Omega_a)$ et tout $g\in L^2(\Omega)$.

La démonstration est facile. (p. ex. on verra dans [3])

Revenons maintenant à la démonstration du theorème 6.1, que nous allons faire par l'induction mathématique sur q.

(a) Cas où $q=0$.

Si $f\in\varepsilon^{m+1,0}$ et $\varepsilon<a$, on a $D^\alpha J_\varepsilon f(x)=J_\varepsilon D^\alpha f(x)$ pour $x\in\Omega_a$ et α avec $|\alpha|_p\leqslant(m+1)p$; d'autre part, selon definition de J_ε, on a $\|J_\varepsilon D^\alpha f\|_{L^2(\Omega_a)}\leqslant\|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega_a)}$, ce qui donne immédiatement le résultat.

(b) Cas général.

Remarquons que l'hypothèse de récurrence entraîne $\zeta_1 f\in\varepsilon^{m+1,q-1}$ pour tout $\zeta_1\in C^\infty(\Omega)$. Si $\alpha_0\leqslant m+1$, $|\alpha|_p\leqslant(m+1)p+q-1$, on a $D^\alpha f\in L^2(\Omega_a)$ pour tout Ω_a, ce qui est équivalent à $D^\alpha(\zeta_1 f)\in L^2(\Omega)$ pour tout $\zeta_1\in C^\infty(\Omega)$; or, parce que $S(\zeta_1)\subset\Omega$, pour ε suffisamment petit, on a $S(J_\varepsilon\zeta_1 f)\subset\Omega$ et $J_\varepsilon D^\alpha J_\varepsilon(\zeta_1 f)=D^\alpha J_\varepsilon(\zeta_1 f)$ dans Ω, de plus, $J_\varepsilon D^\alpha(\zeta_1 f)$ converge vers $D^\alpha(\zeta_1 f)$ dans $L^2(\mathcal{D})$. Donc, on a $\zeta_1 f\in\varepsilon^{m+1,q}$.

Prenons $\zeta\in C^\infty(\Omega_{a/2})$, $\zeta_1\in C^\infty(\Omega_{a/8})$ identiquement 1 sur Ω_a, et sur $\Omega_{a/4}$ respectivement. Alors, si $\varepsilon<a/4$, $\varphi=\tau_q J_\varepsilon\zeta\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)$ est dans $C^\infty(\Omega_{a/4})$. Maintenant, $\mathcal{A}f=g$ dans $L^2(\mathcal{D})$ et $\zeta_1=1$ sur le support de φ, on a

$$I_1=\int_\Omega\mathcal{A}\zeta_1 f\cdot\tau_q J_\varepsilon\bar{\varphi}dx=\int_\Omega g\cdot\tau_q J_\varepsilon\bar{\varphi}dx\,.$$

Maintenant, l'expression $\int_\Omega[\mathcal{A}(\zeta_1 f)\cdot\tau_q J_\varepsilon\bar{\varphi}-\mathcal{A}(J_\varepsilon\zeta_1 f)\cdot\tau_q\bar{\varphi}]dx$ peut s'écrire comme suit:

$$I_2=\sum\int_\Omega[M(J_\varepsilon(D^\gamma\bar{\varphi})D^\alpha(\zeta_1 f)-M(D^\gamma\bar{\varphi})\cdot J_\varepsilon D^\alpha(\zeta_1 f)]dx$$

où $|\alpha|_p\leqslant(m+1)p+q-1$, $\gamma_0=0$, $|\gamma|\leqslant q$ et M est un opérateur différentiel d'ordre 1 à coefficients continûment différentiables et uniformément bornés avec ses derivées ; ainsi le lemme 6.2 est applicable et l'intégrale se majore par $c_1\sigma^{m+1,q-1}(\zeta_1 f;\Omega)\cdot\sigma^{0,q}(\varphi;\Omega)$.

Or, en tenant compte de ce que $S(\zeta J_\varepsilon f)\subset\Omega$ et que $J_\varepsilon(\zeta_1 f)=J_\varepsilon f$ sur $\Omega_{a/2}$, on a

$$I_3 = \int_\Omega [\mathcal{A}(J_\varepsilon f)\tau_q \zeta \overline{\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)} - \mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\tau_q \cdot \overline{\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)}]dx$$
$$\leqslant c_2 \cdot \sigma^{m+1,q-1}(\zeta_1 f\,;\,\Omega)\sigma^{0,q}(\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\,;\,\Omega)\,.$$

De ces majorations, on obtient:

$$\sigma^{0,q}(\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\,;\,\Omega)^2 = \int_\Omega \mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\tau_q \cdot \overline{\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)}dx$$
$$\leqslant I_1 + I_2 + I_3$$
$$\leqslant c_3 \sigma^{0,q}(\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\,;\,\Omega)[\sigma^{0,q}(g\,;\,\Omega) + \sigma^{m+1,q-1}(\zeta_1 f\,;\,\Omega)]\,.$$

Maintenant, $\zeta J_\varepsilon f$ s'annule en dehors de Ω, et selon le théorème 4. 1, on a $\sigma^{m+1,q}(\zeta J_\varepsilon f\,;\,\Omega) \leqslant c_4 \sigma^{0,q}(\mathcal{A}(\zeta J_\varepsilon f)\,;\,\Omega)$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence nous donne $\sigma^{m+1,q-1}(\zeta_1 f\,;\,\Omega) \leqslant c_5[\sigma^{0,q}(g\,;\,\Omega) + \sigma^{m+1,0}(f\,;\,\Omega)]$; donc le théorème se trouve démontré.

Régularité au bord.

On verra que sous certaines conditions la solution se prolonge continûment sur π_0.

Soit ω une hémisphère dont le bord se compose d'une partie Γ_1 de π_0 et de semi-circonférence Γ_2; $\omega_a = \{X \in \omega : d(x, y) > a\,; y \in \Gamma_2\}$. Considérons $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m-1} \cdot \eta(X/\varepsilon)$ où $\eta(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable dans R^{n+1}, non négative, s'annulant en dessous d'une petite sphère autour d'un point $y \in R^{n+1}$ avec $y_0 > 0$. En posant $f(x) = 0$ en dehors de ω, on définit

$$J_\varepsilon^\pm f(x) = \int f(x \mp x')\eta_\varepsilon(x')dx'\,.$$

Ici, nous entendons par $C^\infty(\omega_a)$ la famille de fonctions indéfiniment différentiables à support dans ω_a. Alors, comme dans ce qui precède, on voit facilement que pour $f \in L^2(\omega)\, J_\varepsilon^\pm f \in C^\infty(\bar{\omega})$ et que $J_\varepsilon^\pm f \to f$ dans $L^2(\omega)$; de plus $J_\varepsilon^+ f$ s'annule au voisinage de Γ_1. Supposons que $f \in C^\infty(\omega_a)$, alors on a $J_\varepsilon^- D^\alpha f = D^\alpha J_\varepsilon^- f$ pour tout α et tout $\varepsilon < a$; d'autre part, pour $f \in \mathcal{H}^{m+1,0}$ tel que $S(f) \subset \omega_a$, on a $D^\alpha J_\varepsilon^+ f = J_\varepsilon^+ D^\alpha f$ où $|\alpha|_p \leqslant (m+1)p$.

De même que pour J_ε, on a le

Lemme 6. 3. Si $g \in L^2(\omega)$ et $f \in C^\infty(\omega_a)$ s'annule identiquement au voisinage Γ_1, on a

$$\int_\Omega [M(J_\varepsilon^+ f) \cdot \bar{g} - Mf \cdot J_\varepsilon^- \bar{g}]dx \leqslant c\|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

où la constante ne dépend que des coefficients de M.

Grâce à ce lemme, nous pouvons démontrer le théorème 6. 3.

Mais parce que le procédé est analogue, nous ne répétons pas sa démonstration.

Théorème 6. 3. Soit $\omega_a \subset \omega$ et $f \in \mathcal{H}^{m+1,0}$, alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de q, telle que

$$c\sigma^{m+1,q}(J_\varepsilon^+ f\,;\omega_a) - c^{-1}\sigma^{m+1,0}(f\,;\omega) \leqslant \sigma^{0,q}(\mathcal{A}f\,;\omega)\,.$$

De ce théorème et du lemme de Sobolev, il découle le

Théorème 6. 4. Soit $f \in \varepsilon^{m+1,q}$. Si $g = \mathcal{A}f$ est suffisamment régulière dans $\mathcal{D}$, alors la solulion f a des dérivées continues dans $\overline{\mathcal{D}}$.

Remarque. Si g est indéfiniment différentiable, f est aussi indéfiniment différentiable et ses dérivées sont continues dans $\overline{\mathcal{D}}$.

7. Problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy est un problème de trouver une fonction f telle que $\mathcal{A}f = g$ dans $\mathcal{D}$ et $Tr(f\,;0) = h$, où g et h sont les fonctions données.

Théorème 7. 1. $g \in \mathcal{H}^{0,q}$ et $h \in {}^m\mathcal{Q}^{q+p/2}$ étant donnés, il existe alors une solution unique f dans $\varepsilon^{m+1,q}$ telle que $\mathcal{A}f = g$ et $Tr(f\,;0) = h$.

Démonstration. La solution f est la somme de deux fonctions f_1, f_2 telles que $\mathcal{A}f_1 = g$ et $Tr(f_1\,;0) = 0$, $\mathcal{A}f_2 = 0$, $Tr(f_2\,;0) = h$.

Maintenant selon le théorème 5. 2, l'existence de f_1 est immédiate.

Supposons que $h = (h_1, h_2, \cdots, h_m) \in {}^m\mathcal{Q}^{q+p/2}$ soit indéfiniment différentiable et à support compact dans R^n. Considérons $\tilde{h}(t, x) = \sum_j \zeta(t) t^{j-1} h_j(x)$, où $\zeta(t)$ est une fonction définie et indéfiniment différentiable sur la droite réelle et identiquement 1 au voisinage de 0. Alors $\tilde{h}(t, x) \in C^\infty(\mathcal{D})$ et satisfait à $Tr(\tilde{h}, 0) = h$.

Posons $g = \mathcal{A}\tilde{h}$; d'après ce qui precède, on a une fonction $f \in \mathcal{H}^{m+1,q}$ telle que $\mathcal{A}\tilde{f} = g$ dans $\mathcal{D}$ et $Tr(\tilde{f}\,;0) = 0$. Soit $f = \tilde{h} - \tilde{f}$, on a alors $\mathcal{A}f = 0$ dans $\mathcal{D}$ et $Tr(f\,; 0) = h$.

Supposons maintenant que $h \in {}^m\mathcal{Q}^{q+p/2}$, il existe alors une suite (h_ν) convergent vers h dans ${}^m\mathcal{Q}^{q+p/2}$ et avec les composants $(h_\nu)_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, fonctions à support compact, définies et indéfiniment différentiables dans R^n. Pour tout h_ν, on peut trouver une solution f_ν indéfiniment différentiable telle que $\mathcal{A}f_\nu = 0$ et $Tr(f_\nu\,;0) = h_\nu$.

Or, le théorème 4. 1 applique à $f_\nu - f_{\nu'}$ montre que

$$\sigma^{m+1,q}(f_\nu - f_{\nu'}\,;\mathcal{D}) \leqslant c\cdot\sigma^{0,q}(h_\nu - h_{\nu'}\,;\pi_0)$$

ce qui entraîne que la famille (f_ν) forme une suite de Cauchy dans $\varepsilon^{m+1,q}$, et converge donc vers un élément f de $\varepsilon^{m+1,q}$.

En vertu de la continuité de l'application $\mathcal{A}$ et $Tr(f\,;0)$ (Proposition 3. 1), on a $\mathcal{A}f = 0$ et $Tr(f\,;0) = h$.

L'unicité de la solution ainsi obtenue est immédiate d'après l'inégalite d'énergie (Theorème 4. 1).

Theorèmes 6. 2 et 6. 4 répondent respectivement à la différentiabilite de la solution dans $\mathcal{D}$ et à la régularité au bord.

Références

1) F. Browder; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **42**, 914 (1956).
2) S. D. Eidelman; Math. Sb., **38**, 51 (1956).
3) L. Gårding; Colloque International du C.N.R.S. sur la Théorie des Equations aux Dérivées Partielles, 71 (1956).
4) ——————; Math. Scand., **1**, 55 (1953).
5) J. Leray; Hyperbolic Equation (cours miméographié), Inst. Adv. Study, Princeton, 1951-1952.
6) O. A. Ladyzenskaya; Dokl. Acad. Nauk SSSR, **97. 3**, 398 (1954).
7) S. Mizohata; Jour. Math. Soc. Japan, **8**, 269 (1956).
8) L. Nirenberg; Comm. Pure. Appl. Math., **8**, 648 (1956).
9) I. G. Petrowski; Bull. Univ. d'Etat Moscou, Sér. A, no. 7, 1 (1938).
10) L. Schwartz; Théorie des Distributions, I-II, Hermann et Cie, Paris (1950-1951).