Une étude sur les travaux de Bogolioubov et Mitropolsky à propos du fondement de la méthode de l'équation, à caractère de moyenneté

Par

Masaya YAMAGUTI* et Kyuzo HAYASHI**

(Reçu 4 juillet 1961)

Cet article présente une méthode, pour prouver l'existence de la variété intégrale, de Bogolioubov et Mitropolsky, du système des équations différentielles, utilisant seulement les matrices réelles.

Introduction

Pour les problèmes de physique et de technologie, la question de la stabilité des solutions du système des équations différentielles non-linéaires, est très importante. Il existe de nombreux travaux sur cette question, depuis que Poincaré 1) a fondé la théorie du petit paramètre. Birkoff 2) et Liapounov 3) ont succédés aux recherches de Poincaré. Parmi de nombreux travaux récents, on peut citer celui de Bogolioubov 4) qui, en trouvant la notion de variété intégrale, a reussi complètement à résumer la théorie locale, des solutions périodiques de Liapounov-Poincaré. Le livre 5) de Bogolioubov et Mitropolsky présente une méthode assez concrète pour prouver la variété intégrale du système des équations non-linéaires.

Cette étude, qui n'est qu'une modification d'une partie de la théorie, indiquera une autre voie, pour arriver à la notion de variété intégrale. Mais il ne semble pas inutile de la publier, car l'avantage de notre méthode, prouve que l'on peut toujours se limiter à traiter des expressions réelles.

Dans le numéro 1, on prépare une variante du théorème de Floquet et Liapounov. Au numéro 2, en se servant du résultat du numéro 1, on fera une transformation du système (2.1), qui nous emmènera à l'établissement de la variété intégrale.

* Section de Mathématique et Physique Appliquées.
** Institut de Mathématique, Collège de Yoshida, Université de Kyôto.

1. Modification de la théorie de Floquet

Considérons un système des équations différentielles homogènes, soit :

$$\frac{dx}{dt} = Q(t) \tag{1.1}$$

où t est une variable réelle, x représente un n-vecteur réel. Nous supposons que $Q(t)$ est une matrice carrée réelle, d'ordre n qui a une période $\alpha(>0)$ par rapport à t. C'est à dire, $Q(t+\alpha)=Q(t)$.

Dans ce problème, nous construisons une matrice réelle $P(t)$, grâce à laquelle nous pourrons mettre le système (1.1) dans une forme assez convenable, pour illustrer la suite de notre théorie.

Soit $\Phi(t)$, système fondamentale des solutions du système (1.1). On sait qu'il existe une matrice réelle constante C de n ligne et de n colonne telle que

$$\Phi(t+\alpha) = \Phi(t)C.$$

Il est facile de voir, qu'en choisissant convenablement $\Phi(t)$, on peut mettre C sous la forme :

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

où C_1 est une matrice carrée, pour laquelle il existe une matrice réelle H_1, telle que $e^{\alpha H_1} = C_1$. Il existe de nombreuses matrices qui possèdent cette propriété. Nous fixons C_1, une matrice d'ordre le plus élevé (disons n_1) parmi elles. Donc H_1 est aussi d'ordre n_1. Il est évident que les déterminants de C et C_1 sont tous deux positifs. Par voie conséquence, le déterminant de C_2 doit être lui aussi positif. Or, on voit bien que les racines caractéristiques de C_2 sont toutes négatives. Donc C_2, est une matrice carrée réelle, d'ordre pair (disons $2n_2$). On aura alors $n=n_1+2n_2$. De là, on pourra construire une matrice réelle, H_2, telle que $e^{\alpha H_2} = -C_2$. H_2 sera donc d'ordre $2n_2$.

Nous remarquons ici que l'ensemble des parties réelles des racines caractéristiques de H_1 et H_2 est identique aux exposants caractéristiques du système (1.1).

Considérons maintenant une matrice $S(\varphi)$ d'ordre $2n_2$ définie par

$$S(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & & & & & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & & & & & \\ & & \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\ & & \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ & & & & & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Elle possèdera les propriétées suivantes:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \det S(\varphi) = 1, \\ S(\varphi+\pi) = -S(\varphi), \\ \dfrac{d}{d\varphi}S(\varphi) = S(\varphi)M = MS(\varphi). \end{cases}$$

$$(1.4)\qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse $S^{-1}(\varphi)$ de $S(\varphi)$ possèdera ces mêmes propriétées:

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &\det S^{-1}(\varphi) = 1, \\ &S^{-1}(\varphi+\pi) = -S^{-1}(\varphi), \\ &\frac{d}{d\varphi}S^{-1}(\varphi) = M^{-1}S^{-1}(\varphi) = S^{-1}(\varphi)M^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin, nous définirons $P(t)$ par (1.6),

$$(1.6)\qquad P(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} e^{-tH_1} & 0 \\ 0 & e^{-tH_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & S^{-1}\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right) \end{pmatrix}$$

où E est la matrice d'unité d'ordre n_1. On a $P(t+\alpha)=P(t)$. C'est à dire, $P(t)$ est une matrice réelle non singulière, qui possède la même période α que celle de $Q(t)$. En supposant que y_1 soit n_1-vecteur réel et que y_2 soit $2n_2$-vecteur réel, nous considérerons la transformation de la variable x comme suivant:

$$(1.7)\qquad x = P(t)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} e^{-tH_1} & 0 \\ 0 & e^{-tH_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right) y_2 \end{pmatrix}.$$

Par ce changement de variable, le système (1.1) se réduira à (1.8)

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} = H_1 y_1, \\ &\frac{d}{dt}\left\{S^{-1}\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right) y_2\right\} = H_2 S^{-1}\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right) y_2. \end{aligned}$$

Aussi, on pourra le mettre sous la forme:

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dt} = H_1 y_1, \\ &\frac{dy_2}{dt} = F(t)\, y_2, \end{aligned}$$

où $F(t)=S\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right)\left\{H_2-\frac{\pi}{\alpha}M^{-1}\right\}S^{-1}\left(\frac{\pi}{\alpha}t\right)$. Evidemment $F(t+\alpha)=F(t)$.

2. Modification de la théorie de Bogolioubov et Mitropolsky

Considérons le système suivant, soit

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \tag{2.1}$$

où ε est un paramètre positif, t une variable réelle, x un n-vecteur. On suppose que la fonction vectorielle réelle $X(t, x)$ soit suffisamment différentiable en t et x. De plus, $X(t, x)$ et ses dérivées partielles par rapport aux x_i (composants de x) sont bornées sur $R^1\times D$, et uniformément continues par rapport à x; ce qui revient précisément à dire, que pour tous ε positifs, il existe une constant positive δ tel que $|x'-x|<\delta$ entraîne $|X(t, x')-X(t, x)|<\varepsilon$, $|X_{x_i}(t, x')-X_{x_i}(t, x)|<\varepsilon$ ($i=1, 2, \cdots, n$) pour $(t, x, x')\in R^1\times D\times D$ (ici D désigne un domaine dans R^n).

Nous supposons enfin, qu'il existe une fonction $X_0(x)$, telle, qu' à chaque $x\in D$, on a $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X(t, x)dt\to X_0(x)$ uniformément par rapport à $t\in R^1$, si T tends vers $+\infty$.

Maintenant, conformément à la théorie de Bogolioubov et Mitropolsky, considèrons le système des équations différéntielles, que Mitropolsky a appellé (5) équation à caractère de moyenneté:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x) \quad \text{où} \quad \frac{dx}{d\tau} = X(x) \quad (\tau = \varepsilon t)\,. \tag{2.2}$$

Nous supposons que le système (2.2), possède une solution périodique non constante $x=p(\omega\tau)$ ($p(\varphi+2\pi)=p(\varphi)$). L'équation variationnelle, par rapport à cette solution s'écrit:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial X_0\{p(\omega\tau)\}}{\partial x}\xi \tag{2.3}$$

où $\frac{\partial X_0\{p(\omega\tau)\}}{\partial x}$ signifie conformément à 5) le gradient de X_0. On a

$$\omega p'(\varphi) = X_0\{p(\varphi)\} \quad \text{où} \quad p'(\varphi) = \frac{dp(\varphi)}{d\varphi}\,. \tag{2.4}$$

On voit bien que $\xi=p'(\omega\tau)$ est une solution périodique de (2.3).

Nous supposons qu'il y a un seule exposant caractéristique 0 pour (2.3). Ainsi selon le résultat du numéro 1, on peut dire qu'il est possible, qu'en choisissant une matrice $A(\varphi)$ de n ligne et de $n-1$ colonnes, qui est une matrice réelle fonctionnelle de φ, continuement différentiable en φ ($A(\varphi)$ est périodique à période 2π), on peut réduire le système (2.3) à une autre forme (2.6) assez maniable, par le changement de variable:

$$\xi = [p'(\omega\tau)\ A(\omega\tau)] \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{du_0}{d\tau} = 0, \\ &\frac{du_1}{d\tau} = H_1 u_1, \\ &\frac{d}{d\tau}\left\{S^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)u_2\right\} = H_2 S^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)u_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où u_0 est une variable scalaire, u_1 est n_1-vecteur réel, u_2 est $2n_2$-vecteur réel $(n=1+n_1+2n_2)$, H_1 est la matrice carrée réelle d'ordre n_1, H_2 est la matrice carrée réelle d'ordre $2n_2$. $S(\varphi)$ a déjà été définie dans le numéro 1, par (1.2). Il faut ajouter, que la matrice carrée $[p'(\omega\tau)\ A(\omega\tau)]$ d'ordre n est non singulière et que l'ensemble des parties réelles des racines caractéristiques de H_1 et de H_2, est identique aux parties réelles des exposants caractéristiques non zéro du système (2.3).

Posons

$$A(\varphi) = B(\varphi) \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

(2.5) s'écrit:

$$\xi = [p'(\omega\tau)\ B(\omega\tau)] \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)u_2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul facile démontre:

$$\omega B'(\varphi) + B(\varphi) \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial X_0\{p(\varphi)\}}{\partial x} B(\varphi) \tag{2.7}$$

où $B'(\varphi) = \dfrac{dB(\varphi)}{d\varphi}$.

Nous ferons le changement de variable $x \to \begin{pmatrix} \varphi \\ b \end{pmatrix}$:

$$x = p(\varphi) + A(\varphi)b = p(\varphi) + B(\varphi) \begin{pmatrix} b_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

où b est un $(n-1)$-vecteur réel, b_1 est n_1-vecteur réel, b_2 est $2n_2$-vecteur réel,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

On aura facilement:

$$\det\left[p'(\varphi)+A'(\varphi)b\ \ A(\varphi)\right]_{b=0} = \det\left[p'(\varphi)\ \ A(\varphi)\right] \neq 0 .$$

Donc, si Ω signifie R^1 considéré modulo 2π, et si U_δ signifie la boule de rayon δ, convenablement choisie, dont le centre $b=0$ dans R^{n-1}, la transformation (2.8) établit une correspondance biunivoque entre le domaine $\Omega\times U_\delta$ et le voisinage d'une courbe $x=p(\varphi)$ $(0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$ dans D.

D'après (2.8)

$$\left(p'(\varphi)+B'(\varphi)\begin{pmatrix} b_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\end{pmatrix}\right)\frac{d\varphi}{dt}+B(\varphi)\begin{pmatrix}\frac{db_1}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left\{S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\right\}\end{pmatrix} = \varepsilon X(t, p(\varphi)+A(\varphi)b) .$$

En tenant compte de (2.4) et (2.7), on obtient

$$\left(p'(\varphi)+B'(\varphi)\begin{pmatrix} b_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\end{pmatrix}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}-\varepsilon\omega\right)+B(\varphi)\begin{pmatrix}\frac{db_1}{dt}-\varepsilon H_1b_1 \\ \frac{d}{dt}\left\{S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\right\}-\varepsilon H_2S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$= \varepsilon X\{t,\ p(\varphi)+A(\varphi)b\}-\varepsilon X_0\{p(\varphi)\}-\varepsilon\frac{\partial X_0\{p(\varphi)\}}{\partial x}A(\varphi) .$$

Posons

$$D(\varphi, b) = \det\left(p'(\varphi)+B'(\varphi)\begin{pmatrix} b_1 \\ S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\end{pmatrix}\ \ B(\varphi)\right).$$

Alors

$$D(\varphi, 0) = \det\left[p'(\varphi)\ \ B(\varphi)\right] = \det\left[p'(\varphi)\ \ A(\varphi)\right]\det S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \det\left[p'(\varphi)\ \ A(\varphi)\right]\neq 0 .$$

Donc, si on prend δ suffisamment petit, $D(\varphi, b)$ ne s'anulle pas dans $\Omega\times U_\delta$. Par conséquent, on peut résoudre (2.9) dans $\Omega=U_\delta$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega+\varepsilon W(t, \varphi, b_1, b_2) ,\\
&\frac{db_1}{dt} = \varepsilon H_1b_1+\varepsilon B_1(t, \varphi, b_1, b_2) ,\\
&\frac{d}{dt}\left\{S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2\right\} = \varepsilon H_2S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)b_2+\varepsilon S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)B_2(t, \varphi, b_1, b_2) .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

La matrice

$$A(\varphi) = B(\varphi)\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

possède la période 2π par rapport à φ. Evidemment

$$B'(\varphi)\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

possède aussi la même période. Donc, tous les coefficients de l'équation linéaire (2. 9), [par conséquent les termes $W_1(t, \varphi, b_1, b_2)$, $B_1(t, \varphi, b_1, b_2)$, $B_2(t, \varphi, b_1, b_2)$] ont tous, la même période 2π par rapport à φ. De plus, on peut montrer facilement que ces fonctions possèdent les mêmes propriétées énumérées à la page 341 dans 5) des fonctions $W(t, \varphi, b)$, $B(t, \varphi, b)$.

On pourra donc écrire (2. 10) sous la forme:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon W(t, \varphi, b_1, b_2), \\ (2.11) \qquad &\frac{db_1}{dt} = \varepsilon H_1 b_1 + \varepsilon B_1(t, \varphi, b_1, b_2), \\ &\frac{db_2}{dt} = \varepsilon F_2(\varphi) b_2 + \varepsilon \bar{B}_2(t, \varphi, b_1, b_2), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &F_2(\varphi) = S\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(H_2 - \frac{\omega}{2} M^{-1}\right) S^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right), \\ (2.12) \qquad &\bar{B}_2(t, \varphi, b_1, b_2) = B_2(t, \varphi, b_1, b_2) - \frac{1}{2} W(t, \varphi, b_1, b_2) M^{-1} b_2, \end{aligned}$$

M est égale à la matrice définie par (1. 4).

On voit clairement que $F_2(\varphi)$ a la période 2π par rapport à φ, et que $\bar{B}_2(t, \varphi, b_1, b_2)$ possède les même propriétées que celles $B_2(t, \varphi, b_1, b_2)$.

Références

1) A. Poincaré, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Paris, 1892, pp. 58–61.
2) G. B. Birkhoff, "Dynamical systems," N. J., 1927.
4) A. Liapounov, "Problème général de la stabilité du mouvement", Annals of Math. Studies 17, Princeton, 1949.
4) N. Bogolioubov, "Sur certaines méthodes statiitiques en physique mathématique", Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev, 1945.
5) N. Bogolioubov, Ju. Mitropolsky, "Méthodes asymptotiques dans la théorie des oscillations non linéaires", Fizmatguiz, Moscou, 1958. 2ème Ed.