

Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung

Von

Ichiro KONISHI* und Nobuyoshi TAKAOKA*

(Received January 29, 1962)

In der nachstehenden Arbeit handelt es sich um das Verhalten der Hängebrücken unter dem Einfluß waagerechter Belastungen des beliebigen Verteilungsverlaufes. Die gewöhnlich vernachlässigte Verformung der Pylonen wurde in dieser Arbeit berücksichtigt. Bei der Auflösung der Differentialgleichung wurde die Fourier-Reihe eingeführt, um Berechnung bequemer durchzuführen. Das unten dargelegte Verfahren genügt für praktische Bedürfnisse, womit man die Verformungen und Schnittgrößen mit leichter Mühe berechnen kann.

1. Einleitung

Seit kurzem ist bei uns die Rede von der Überbrückung großer Stützweiten wie zwischen Honshu und Shikoku und dementsprechend ist das Stabilitätsproblem der Hängebrücken in der Mittelpunkt wissenschaftlicher Untersuchungen gerückt. Da die Hängebrücken eine starke Neigung zu Schwingungen haben, ist es erforderlich, daß man bei der Hängebrückenkonstruktion nicht nur die statische, sondern auch dynamische Berechnung durchführt. Unglücklicherweise wird Japan von Naturkatastrophen wie Erdbeben und Taifunen häufig heimgesucht. Es ist deshalb sehr wichtig, die dynamischen Eigenschaften der Hängebrücken zu untersuchen. In dieser Hinsicht haben die Verfasser schon einige Arbeiten veröffentlicht über die Schwingungen der Hängebrücken beim Einwirken der in der Brückenachse-richtung angreifenden Erdbebenkraft^{1,2,3}). Bis heute wurde das Verhalten der Hängebrücken unter dem Einfluß waagerechter Kräfte (z. B. Wind- oder Erdbebenkräfte), die senkrecht zur Brückenachse einwirken, nicht weiter als für vertikale Belastungen untersucht. Die Verwicklung des Tragsystems verhindert die Lösung dieser baupraktisch wichtigen Probleme. Als erster Schritt wurde im folgenden die Untersuchung des Verhaltens von Hängebrücken bei der Einwirkung der statischen waagerechten Windbelastung unternommen.

Bei der bisherigen Behandlung waagerechter Belastungen wurde gewöhnlich die durch gleichmäßig verteilte waagerechte Belastung vollbelastete Hängebrücke

* Institut für Bauingenieurwesen

betrachtet^{4,5)}. Unter Berücksichtigung der Anwendung der Theorie auf weitgespannte Hängebrücken wurde in der nachstehenden Ausführungen das Verhalten der durch Einzellasten und Streckenlasten belasteten Hängebrücken behandelt. Die bei der bisherigen Berechnung gewöhnlich vernachlässigte Verformung der Pylonen wurde in dieser Arbeit berücksichtigt.

Es wurde dabei angenommen, daß die Tragkabel in senkrechten Ebenen liegen, so daß die waagerechten Kabelausbiegungen untereinander gleich sind. Ferner hat die Annahme, daß der Horizontalzug der beiden Kabel sich vor und nach der Verformung des Tragsystems nicht ändert, Anwendung gefunden.

Für die nachstehenden Formeln werden folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. Abb. 1):

- H : $= \frac{g l^2}{8f}$ Horizontalzug der beiden Kabel (t),
 $g(x)$: $= g$ const ständige Last (t/m),
 $h(x)$: Länge der Hängestange (m),
 $f_K(x)$: Winddruck auf die beiden Kabel (t/m),
 $f_T(x)$: Winddruck auf den Versteifungsträger (t/m),
 l : Länge der Öffnung der Hängebrücke (m),
 $v_K(x)$: waagerechte Durchbiegung des Kabels (m),
 $v_T(x)$: waagerechte Durchbiegung des Versteifungsträgers (m),
 δ_K : waagerechte Verschiebung des Pylonenkopfs (m),
 δ_T : waagerechte Verschiebung der Stütze des Versteifungsträgers (m).

2. Rechnungsgang

Die Grundgleichungen für die waagerechten Ausbiegungen des Kabels und des Versteifungsträgers sind gemäß Abb. 1 durch Gln. (1) und (2) gegeben:

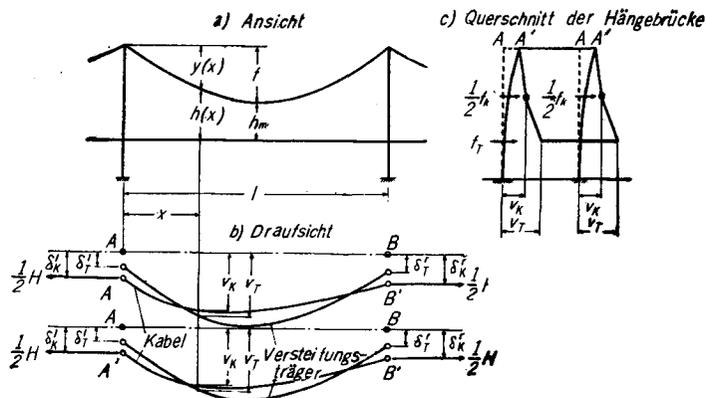


Abb. 1. Bezeichnungen und Verformung der Hängebrücke.

$$\frac{1}{2} f_K(x) + \frac{1}{2} H v_K''(x) + \frac{1}{2} \{v_T(x) - v_K(x)\} \frac{g(x)}{h(x)} = 0, \quad (1)$$

$$f_T(x) - EI v_T'''(x) - \{v_T(x) - v_K(x)\} \frac{g(x)}{h(x)} = 0. \quad (2)$$

Aus Gl. (1) ergibt sich für beide Kabel

$$f_K(x) + H v_K''(x) + \{v_T(x) - v_K(x)\} \frac{g(x)}{h(x)} = 0. \quad (3)$$

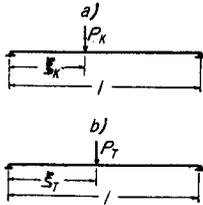
2.1 Einzellasten

Bei der Einwirkung der Einzellast, P_K , auf die Tragkabel (Abb. 2-a) beschreibt sich die Winddruckintensität auf beide Tragkabel

$$f_K(x) = P_K \cdot U_i(x - \xi_K), \quad (4)$$

wobei $U_i(x - \xi_K)$ die Diracsche Delta-Funktion ist⁶⁾. Es wird nun folgender Ansatz eingeführt⁷⁾:

$$\frac{g(x)}{h(x)} \{v_T(x) - v_K(x)\} = \sum_{i=1}^k C_i \sin \alpha_i x \quad (5)$$



mit

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l}.$$

Abb. 2. Einzellasten.

Mit Benutzung von Gln. (4) und (5) geht die Gl. (3) über in

$$P_K \cdot U_i(x - \xi_K) + H v_K''(x) + \sum_{i=1}^k C_i \sin \alpha_i x = 0. \quad (6)$$

Durch zweimaliges Integrieren der Gl. (6) unter den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} v_K(0) &= \delta_K^l & \text{für } x = 0, \\ v_K(l) &= \delta_K^r & \text{für } x = l \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ergibt sich

$$v_K(x) = \mu \{ (1 - \eta_K) \eta - (\eta - \eta_K) U(x - \xi_K) \} + \{ \delta_K^l + (\delta_K^l - \delta_K^r) \eta \} + \sum_{i=1}^k \frac{n}{i^2} C_i \sin \alpha_i x, \quad (8)$$

mit Abkürzungen

$$\mu = \frac{P_K l}{H}, \quad \eta = \frac{x}{l}, \quad \eta_K = \frac{\xi_K}{l}, \quad n = \frac{l^2}{\pi^2 H}.$$

In der Gl. (8) bedeutet

$$U(x - \xi_K) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \xi_K, \\ 1 & \text{für } x \geq \xi_K. \end{cases}$$

Für die Berechnung des Pylons sind die Querkräfte erforderlich, die für jedes Trakabel folgendermaßen berechnet werden,

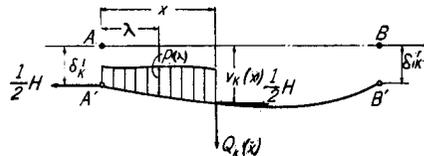


Abb. 3. Querkraft des Kabels,

Gemäß Abb. 3 ergibt die Gleichgewichtsbedingung gegen Verdrehen um den Punkt A' folgende Gleichung:

$$x \cdot Q_K(x) - \frac{1}{2} H \{v_K(x) - \delta_K^i\} + \int_0^x p(\lambda) \cdot d\lambda = 0,$$

wobei

$$p(\lambda) = \frac{1}{2} P_K \cdot U_i(\lambda - \xi_K) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k C_i \sin \alpha_i \lambda$$

ist. Daraus ergibt sich endlich unter Berücksichtigung

$$\int_0^x \lambda \cdot U_i(\lambda - \xi_K) d\lambda = U(x - \xi_K)$$

die folgende Gleichung:

$$Q_K(x) = \frac{1}{2} P_K [(1 - \eta_K) - U(x - \xi_K)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{l} \cdot (\delta_K^r - \delta_K^i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x. \quad (9)$$

Bei Belastung des Versteifungsträgers infolge einer Einzellast, P_T (Abb. 2-b), beschreibt sich die Winddruckintensität auf den Versteifungsträger

$$f_T(x) = P_T \cdot U_i(x - \xi_T). \quad (10)$$

Führt man Gln. (5) und (10) in die Gl. (2) ein und integriert unter den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} v_T(0) &= \delta_T^i, & v_T'(0) &= 0 & \text{für } x &= 0, \\ v_T(l) &= \delta_T^r, & v_T'(l) &= 0 & \text{für } x &= l, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

so erhält man

$$v_T(x) = \nu [\eta(1 - \eta_T) \{1 - \eta^2 - (1 - \eta_T)^2\} + (\eta - \eta_T)^3 \cdot U(x - \xi_T)] - \sum_{i=1}^k \frac{m}{i^4} C_i \sin \alpha_i x, \quad (12)$$

mit

$$\nu = \frac{P_T l^3}{6EI}, \quad \eta_T = \frac{\xi_T}{l}, \quad m = \frac{l^4}{\pi^4 EI}.$$

Durch Differenzieren nach x und Benutzung der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} M_T(x) &= -EI v_T''(x), \\ Q_T(x) &= -EI v_T'''(x) \end{aligned} \right\}$$

folgen aus Gl. (12) das Biegemoment und die Querkraft des Versteifungsträgers an der Stelle x :

$$M_T(x) = P_T l \{ (1 - \eta_T) \eta - (\eta - \eta_T) \cdot U(x - \xi_T) \} - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i x; \quad (13)$$

$$Q_T(x) = P_T \{ (1 - \eta_T) - U(x - \xi_T) \} - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x. \quad (14)$$

Um die Festwerte C_i des Ansatzes (5) zu bestimmen, werden die Ausbiegungen (8) und (12) in die Gl. (5) eingesetzt, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{m}{i^4} + \frac{n}{i^2} + \frac{h(x)}{g(x)} \right) \cdot C_i \sin \alpha_i x = R(x), \quad (15)$$

wobei folgende Abkürzung eingeführt wurde:

$$\begin{aligned} R(x) = & \nu[\eta(1-\eta_T)\{1-\eta^2-(1-\eta_T)^2\} + (\eta-\eta_T)^3 \cdot U(x-\xi_T)] \\ & - \mu[(1-\eta_K)\eta - (\eta-\eta_K) \cdot U(x-\xi_K)] + \{\delta_T^l + (\delta_T^r - \delta_T^l)\eta\} \\ & - \{\delta_K^l + (\delta_K^r - \delta_K^l)\eta\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Berechnet man die Gl. (15) für Schnitte $x=x_1, x_2, \dots, x_k$, so erhält man das Gleichungssystem von k linearen Gleichungen für ebenso viele Unbekannte C_i , aus dem k unbekannte Festwerte C_i eindeutig festgelegt werden können.

Nimmt $h(x)/g(x)$ in Gl. (15) einen konstanten Wert γ an, so ergeben sich die Festwerte C_i unter Benutzung der Orthogonalität der Sinus-Funktionen aus

$$\begin{aligned} C_i \left(\frac{m}{i^4} + \frac{n}{i^2} + \gamma \right) \cdot \frac{l}{2} &= \int_0^l R(x) \sin \alpha_i x dx, \\ C_i &= \frac{2 \int_0^l R(x) \sin \alpha_i x dx}{\frac{m}{i^4} + \frac{n}{i^2} + \gamma}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen nimmt $h(x)/g(x)$ nicht einen konstanten Wert an, weil $h(x)$ von x abhängig ist. Somit gilt die obige Formel auch nicht.

2.2 Streckenlasten

Berücksichtigt man die Lastfälle gemäß Abb. 4, so lauten die Winddruckintensitäten auf beide Kabel und auf den Versteifungsträger

$$f_K(x) = f_K \{U(x-\xi_K^l) - U(x-\xi_K^r)\}; \quad (17)$$

$$f_T(x) = f_T \{U(x-\xi_T^l) - U(x-\xi_T^r)\}. \quad (18)$$

Durch Einsetzen von Gln. (5) und (17) in die Gl. (3) ergibt sich

$$f_K \{U(x-\xi_K^l) - U(x-\xi_K^r)\} + H v_K''(x) + \sum_{i=1}^k C_i \sin \alpha_i x = 0. \quad (19)$$

Mit den Randbedingungen (7) erhält man für die Ausbiegung des Tragkabels

$$\begin{aligned} v_K(x) = & \lambda \eta \{ (1-\eta_K^l)^2 - (1-\eta_K^r)^2 - \lambda \{ (\eta-\eta_K^l)^2 \cdot U(x-\xi_K^l) \\ & - (\eta-\eta_K^r)^2 \cdot U(x-\xi_K^r) \} + \{ \delta_K^l + (\delta_K^r - \delta_K^l)\eta \} + \sum_{i=1}^k \frac{n}{i^2} C_i \sin \alpha_i x \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\lambda = \frac{f_K l^2}{2H}, \quad \eta_K^l = \frac{\xi_K^l}{l}, \quad \eta_K^r = \frac{\xi_K^r}{l}.$$

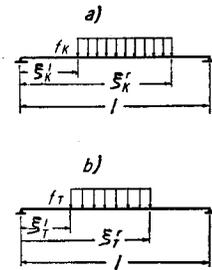


Abb. 4. Streckenlasten.

Ähnlich wie in dem vorhergehenden Abschnitte wird die Querkraft für jedes Trakabel durch Gl. (21) gegeben:

$$Q_K(x) = \frac{f_K l}{4} \{(1-\eta_K^l)^2 - (1-\eta_K^r)^2\} + \frac{f_K l}{2} \{(\eta-\eta_K^r) \cdot U(x-\xi_K^r) - (\eta-\eta_K^l) \cdot U(x-\xi_K^l)\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x + \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{l} (\delta_K^r - \delta_K^l). \quad (21)$$

Führt man Gl. (5) und (18) in die Gl. (2) ein, so erhält man unter Benutzung von den Randbedingungen (11) folgende Ausdrücke:

$$f_T \{U(x-\xi_T^l) - U(x-\xi_T^r)\} - EI v_T''''(x) - \sum_{i=1}^k C_i \sin \alpha_i x = 0; \quad (22)$$

$$v_T(x) = \rho \eta \{(1-\eta_T^r)^2 - (1-\eta_T^l)^2\} \{2(\eta^2 - 1) + (1-\eta_T^r)^2 + (1-\eta_T^l)^2\} + \rho \{(\eta-\eta_T^l)^4 \cdot U(x-\xi_T^l) - (\eta-\eta_T^r)^4 \cdot U(x-\xi_T^r)\} + \{\delta_T^l + (\delta_T^r - \delta_T^l) \eta\} - \sum_{i=1}^k \frac{m}{i^4} C_i \sin \alpha_i x \quad (23)$$

mit

$$\rho = \frac{f_T l^4}{24EI}.$$

Hieraus folgen durch Differenzieren nach x das Biegemoment und die Querkraft des Versteifungsträgers:

$$M_T(x) = \frac{f_T l^2}{2} \eta \{(1-\eta_T^l)^2 - (1-\eta_T^r)^2\} + \frac{f_T l^2}{2} \{(\eta-\eta_T^r)^2 \cdot U(x-\xi_T^r) - (\eta-\eta_T^l)^2 \cdot U(x-\xi_T^l)\} - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i x; \quad (24)$$

$$Q_T(x) = \frac{f_T l}{2} \{(1-\eta_T^l)^2 - (1-\eta_T^r)^2\} + f_T l \{(\eta-\eta_T^r) \cdot U(x-\xi_T^r) - (\eta-\eta_T^l) \cdot U(x-\xi_T^l)\} - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x. \quad (25)$$

Um die Festwerte C_i zu bestimmen, werden die Ausbiegungen (20) und (23) in die Gl. (5) eingesetzt, was ergibt:

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{m}{i^4} + \frac{n}{i^2} + \frac{h(x)}{g(x)} \right) \cdot C_i \sin \alpha_i x = R(x), \quad (26)$$

wobei

$$R(x) = \rho \eta \{(1-\eta_T^r)^2 - (1-\eta_T^l)^2\} \{2(\eta^2 - 1) + (1-\eta_T^r)^2 + (1-\eta_T^l)^2\} + \rho \{(\eta-\eta_T^l)^4 \cdot U(x-\xi_T^l) - (\eta-\eta_T^r)^4 \cdot U(x-\xi_T^r)\} + \{\delta_T^l + (\delta_T^r - \delta_T^l) \eta\} - \lambda \eta \{(1-\eta_K^l)^2 - (1-\eta_K^r)^2\} + \lambda \{(\eta-\eta_K^l)^2 \cdot U(x-\xi_K^l) - (\eta-\eta_K^r)^2 \cdot U(x-\xi_K^r)\} - \{\delta_K^l + (\delta_K^r - \delta_K^l) \eta\} \quad (27)$$

ist.

Wie aus der Gl. (26) ersichtlich ist, besitzt sie einen ähnlichen Aufbau wie die Gl. (15). Die Festwerte C_i können dadurch in gleicher Weise wie in dem vorhergehenden Abschnitte bestimmt werden.

Als Sonderfall folgen aus Gln. (20), (21), (23), (24) und (25) die folgenden Gleichungen für die Ausbiegungen und Schnittgrößen bei der Vollbelastung, wenn man $\xi_K^l = \xi_T^l = 0$, $\xi_K^r = \xi_T^r = l$, $\eta_K^l = \eta_T^l = 0$ und $\eta_K^r = \eta_T^r = 1$ einsetzt:

$$v_K(x) = \lambda\eta(1-\eta) + \{\delta_K^l + (\delta_K^r - \delta_K^l)\eta\} + \sum_{i=1}^k \frac{n}{i^2} C_i \sin \alpha_i x; \quad (28)$$

$$Q_K(x) = \frac{f_K l}{2} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x; \quad (29)$$

$$v_T(x) = \rho(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) + \{\delta_T^l + (\delta_T^r - \delta_T^l)\eta\} - \sum_{i=1}^k \frac{m}{i^4} C_i \sin \alpha_i x; \quad (30)$$

$$M_T(x) = \frac{1}{2} f_T l^2 \eta(1-\eta) - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i^2} \sin \alpha_i x; \quad (31)$$

$$Q_T(x) = f_T l \left(\frac{1}{2} - \eta \right) - \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{\alpha_i} \cos \alpha_i x, \quad (32)$$

und

$$R(x) = \rho(\eta^4 - 2\eta^3 + \eta) - \lambda\eta(1-\eta) + \{\delta_T^l + (\delta_T^r - \delta_T^l)\eta\} - \{\delta_K^l + (\delta_K^r - \delta_K^l)\eta\}. \quad (33)$$

Für Schnitte $x = \frac{2}{8}l$, $\frac{3}{8}l$ und $\frac{4}{8}l$ ergibt sich aus Gl. (33):

$$\left. \begin{aligned} &\text{Schnitt } x = \frac{2}{8}l: \\ &R\left(\frac{2}{8}l\right) = \frac{57}{256}\rho - \frac{3}{16}\lambda + \frac{3\delta_T^l + \delta_T^r}{4} - \frac{3\delta_K^l + \delta_K^r}{4}; \\ &\text{Schnitt } x = \frac{3}{8}l: \\ &R\left(\frac{3}{8}l\right) = \frac{1185}{4096}\rho - \frac{15}{64}\lambda + \frac{5\delta_T^l + 3\delta_T^r}{8} - \frac{5\delta_K^l + 3\delta_K^r}{8}; \\ &\text{Schnitt } x = \frac{4}{8}l: \\ &R\left(\frac{4}{8}l\right) = \frac{5}{16}\rho - \frac{1}{4}\lambda + \frac{\delta_T^l + \delta_T^r}{2} - \frac{\delta_K^l + \delta_K^r}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

3. Zahlenbeispielen

Für numerisch zu untersuchende Hängebrücke werden folgende Daten angenommen⁸⁾:

$$\begin{aligned} l &= 230 \text{ m}, \quad g(x) = 15,60 \text{ t/m} = \text{const}, \quad f = 25 \text{ m}, \quad h_m = 6 \text{ m}, \\ H &= 4492,8 \approx 4493 \text{ t}, \quad EI = 42 \cdot 10^6 \text{ tm}^2 \text{ (waagerechtes Trägheitsmoment} \\ &\text{des Versteifungsträgers: } I = 2,00 \text{ m}^4). \end{aligned}$$

Durch die Gleichung

$$h(x) = f + h_m - 4f\eta(1-\eta) \quad (35)$$

erhält man die Hängestanglängen an den Stellen $x = \frac{2}{8}l, \frac{3}{8}l, \frac{5}{8}l$ und $\frac{6}{8}l$:

$$h\left(\frac{2}{8}l\right) = h\left(\frac{8}{6}l\right) = \frac{1}{4}f + h_m = 12,25 \text{ m},$$

$$h\left(\frac{3}{8}l\right) = h\left(\frac{5}{8}l\right) = \frac{1}{16}f + h_m = 7,5625 \text{ m}.$$

Beispiel 1. Einzellast

Zunächst sollen die Verformungen und Schnittgrößen bei Einwirkung einer einzigen Einzellast $P_T = 1 \text{ t}$ an der Stelle $\xi_T = 0,4l$ ermittelt werden. Der Vereinfachung wegen werden δ_K und δ_T als Null angenommen und bedient man sich des Ansatzes

$$q \equiv \sum_{i=1}^5 C_i \sin \alpha_i x.$$

Durch Einsetzen bekannter Werte in die Gln. (15) und (16) erhält man folgendes Gleichungssystem für die Festwerte C_1, C_2, C_3, C_4 und C_5 , indem man die Gln. (15) und (16) für Schnitte $x = \frac{2}{8}l, \frac{3}{8}l, \frac{4}{8}l, \frac{5}{8}l$ und $\frac{6}{8}l$ berechnet:

$$\begin{array}{l} x=2/8l: \\ x=3/8l: \\ x=4/8l: \\ x=5/8l: \\ x=6/8l: \end{array} \begin{pmatrix} 2,047175 & 1,160673 & 0,664393 & 0 & -0,592917 \\ 2,397155 & 0,608248 & -0,244578 & -0,569126 & -0,205895 \\ 2,494501 & 0 & -0,538953 & 0 & 0,437870 \\ 2,397155 & -0,608248 & -0,244578 & 0,569126 & -0,205895 \\ 2,047175 & -1,160673 & 0,664393 & 0 & -0,592917 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,752002 \cdot 10^{-3} \\ 6,163717 \cdot 10^{-3} \\ 6,473145 \cdot 10^{-3} \\ 5,754860 \cdot 10^{-3} \\ 4,265144 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} C_1 &= 2,439709 \cdot 10^{-3}, & C_2 &= 0,209732 \cdot 10^{-3}, & C_3 &= -0,588421 \cdot 10^{-3}, \\ C_4 &= -0,135049 \cdot 10^{-3}, & C_5 &= 0,160220 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Durch Gln. (8), (9), (12), (13) und (14) berechnen sich die aus Abb. 5 ersichtlichen Verläufe der Ausbiegungen und Schnittgrößen. Die vom Versteifungsträger aufgenommene Windbelastung folgt aus

$$q_T(x) = P_T \cdot U_i(x - \xi_T) - \sum_{i=1}^5 C_i \sin \alpha_i x. \quad (36)$$

Beispiel 2. Gleichmäßig verteilte Vollbelastungen

In diesem Falle werden $\delta_K^l = \delta_K^r = 0,12 \text{ m}$, $\delta_T^l = \delta_T^r = 0,02 \text{ m}$, $f_T = 0,675 \text{ t/m}$ und $f_K = 0,150 \text{ t/m}$ zugrunde gelegt. Andere Daten sind schon oben angegeben.

Bei symmetrischer Brücke und symmetrischer Belastung, was bei diesem Beispiel der Fall ist, verschwinden die Festwerte C_{2i} ($i=1, 2, \dots$). Das die Festwerte bestimmende Gleichungssystem mit den Unbekannten C_1, C_3 und C_5 ergibt sich aus Gln. (26) und (34):

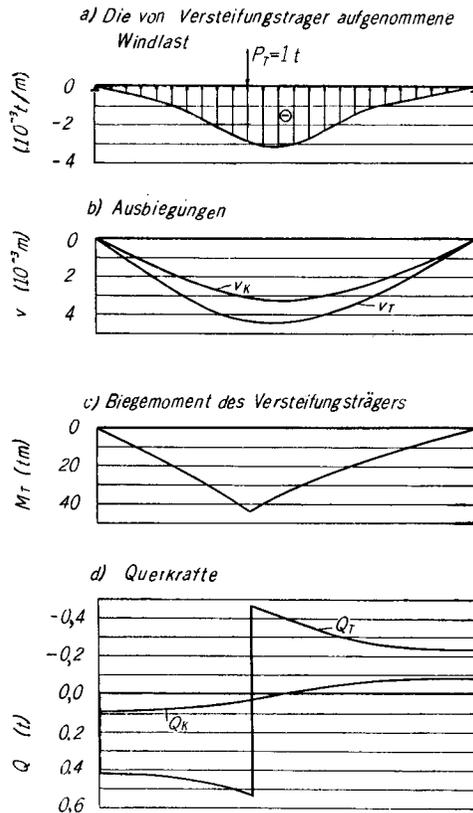


Abb. 5. Zahlenbeispiel 1.

$$\begin{array}{l}
 x = 2/8l: \\
 x = 3/8l: \\
 x = 4/8l:
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 2,047175 & 0,664393 & -0,592917 \\
 2,397155 & -0,244578 & -0,205895 \\
 2,494501 & -0,538953 & 0,437870
 \end{pmatrix}
 \cdot
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_3 \\
 C_5
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0,214390 \\
 0,317395 \\
 0,353501
 \end{pmatrix}$$

mit nachstehenden Lösungen :

$$C_1 = 0,127025, \quad C_3 = -0,060487, \quad C_5 = 0,009,220.$$

Die aus Gln. (28) bis (32) berechneten Größen sind in Abb. 6 aufgetragen.

Ein Teil von der den Versteifungsträger angreifenden Windlast wird durch Hängestangen auf beide Kabel übertragen. Diese Übertragung ist stärker in der Brückemitte als an anderen Stellen des Versteifungsträgers, wie sie aus Abb. 5 und 6 ersichtlich ist. Abb. 7 zeigt ein anderes Zahlenbeispiel an weitgespannter Hängebrücke. Bei Hängebrücken mit großen Spannweiten ist im Bereich der Brückenmitte die durch die Hänger auf Kabel übertragene Kraft größer als die den Versteifungsträger angreifende Windlast, so daß das Biegemoment des Versteifungsträgers dort sich etwas verringert.

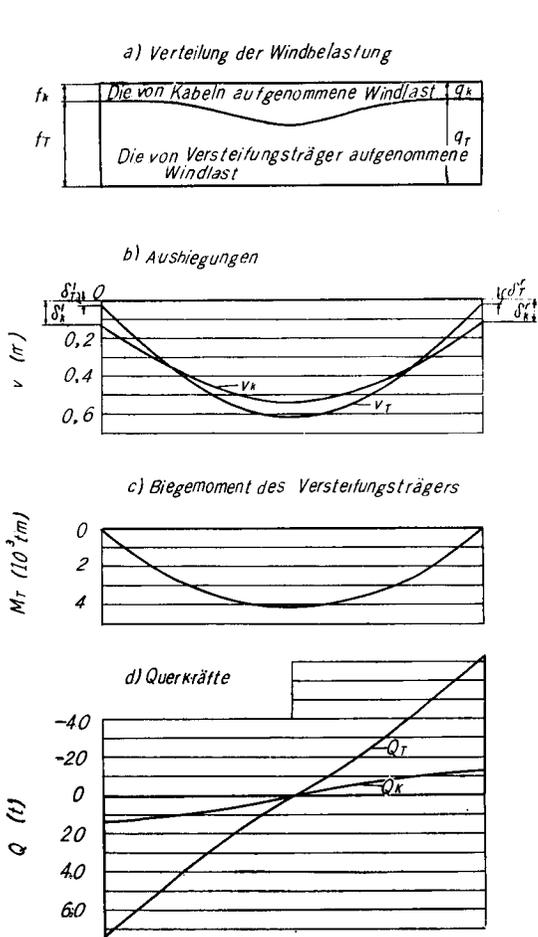


Abb. 6. Zahlenbeispiel 2.

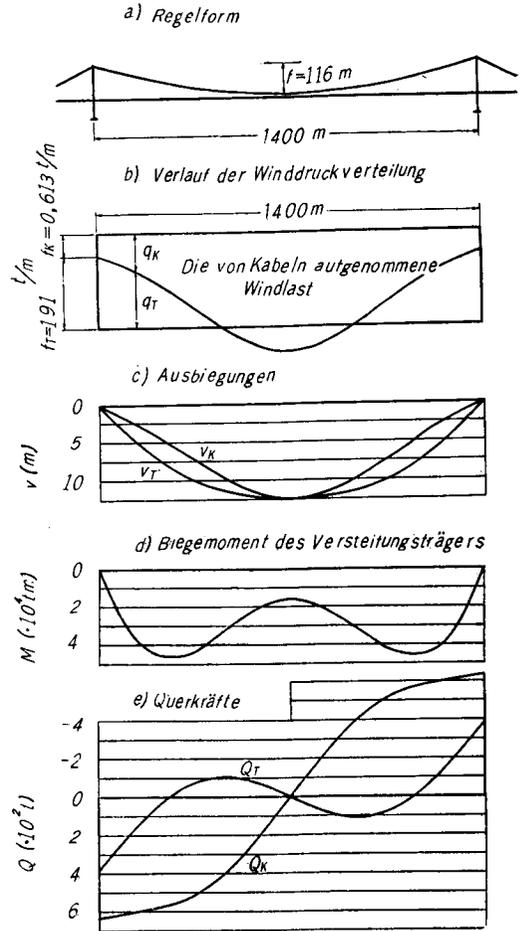


Abb. 7. Zahlenbeispiel an weitgespannter Brücke.

Tabelle 1. Einfluß der Verformung des Pylons.

	Verformung des Pylons (m)	in Spannmitte			auf Stütze	
		v_T (m)	v_K (m)	M_T (tm)	Q_T (t)	Q_K (t)
(1)	$\delta_K=0,12, \delta_T=0,02$	0,6107	0,5346	4078	72,695	13,152
(2)	$\delta_K=0, \delta_T=0$	0,5555	0,4687	3838	68,902	15,050
(3)	(1)/(2) (%)	109,9	114,1	106,3	105,5	87,4

Größere Pfeilhöhe verursacht die Verkleinerung des Übertragungsgrads.

Bei der Berücksichtigung der Verformung des Pylons nehmen die Ausbiegung, das Biegemoment und die Querkraft des Versteifungsträgers und die Kabelausbiegung zu, während die Querkraft der Kabel dagegen abnimmt. In Tabelle 1, Zeile (1) sind die Ergebnisse des Beispiels 2 angegeben. Zeile (2) enthält entsprechende Werte in dem Falle, wo die Verformung des Pylons vernachlässigt wird.

Aus Tabelle 1 ergibt sich die Erkenntnis, daß es nötig ist, in der Praxis die Verformung des Pylons zu berücksichtigen.

Durch Verkleinerung der waagerechten Biegesteifigkeit des Versteifungsträgers erfolgen die Abnahme des Biegemomentes und der Querkraft des Versteifungsträgers und die Zunahme der Versteifungsträgers- und Kabelausbiegung und der Querkraft der Kabel, wie es Tabelle 2 zeigt. Dabei wurden die Daten des Beispiels 2 zugrunde gelegt.

Tabelle 2. Einfluß der Biegesteifigkeit des Versteifungsträgers.

	Biegesteifigkeit EI (tm^2)	in Spannmitte			anf Stütze	
		v_T (m)	v_K (m)	M_T (tm)	Q_T (t)	Q_K (t)
(1)	$21 \cdot 10^6$	0,9218	0,7642	3046	60,782	19,109
(2)	$42 \cdot 10^6$	0,6107	0,5346	4078	72,695	13,152
(3)	(1)/(2) (%)	150,9	142,9	74,8	83,6	145,3

4. Einflußlinien

Es ist unmöglich, unter Benutzung der im Abschnitte 2.1 abgeleiteten Formeln die baupraktisch so wichtigen Einflußlinien zu ermitteln, weil die Festwerte C_i von den Laststellen ξ_T und ξ_K abhängig sind. Es ist jedoch möglich, die erforderlichen ungünstigsten Laststellungen unter Verwendung von den Quasieinflußlinien zu bestimmen. Man kann die Quasieinflußlinien erhalten, indem man die Berechnung, wie sie im Beispiel 1 dargestellt ist, für verschiedene Laststellen ξ_T und ξ_K durchführt. Abb. 8 zeigt die Quasieinflußlinien für den Schnitt $x=0,5l$. Dabei wurden die Laststellen $\xi_T, \xi_K=0,1l, 0,2l, 0,3l, 0,4l$ und $0,5l$ und $\delta_T=\delta_K=0$ zugrunde gelegt. Die Ausbiegungen und das Biegemoment, die aus den Einflußlinien ermittelt wurden, bei Vollbelastung mit $f_T=0,675 \text{ t/m}$ und $f_K=0,150 \text{ t/m}$ sind in Tabelle 3 angegeben mit den ihnen entsprechenden, aus Gln. (8), (12) und (13) unmittelbar berechneten Werten. Die Einflußlinienflächen wurden angenähert mit der Trapezformel ermittelt.

Wie es Tabelle 3 zeigt, liefern die Quasieinflußlinien praktisch genügend genaue Werte für die gesuchten Größen.

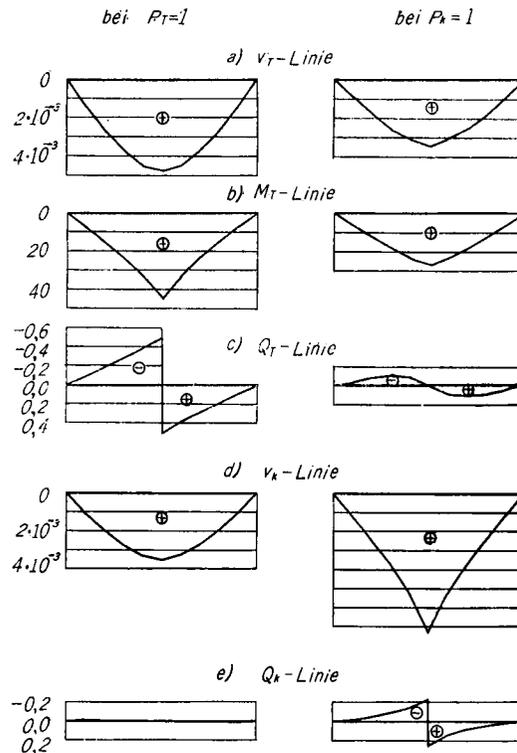
Abb. 8. Quasieinflußlinien für den Schnitt $x=0,5l$.

Tabelle 3. Ausbiegungen und Biegemoment in Brückenmitte.

Schnitt $x=0,5l$	v_T (m)	v_K (m)	M_T (tm)
mit Hilfe von Einflußlinien	0,5507	0,4668	3841
genaue Lösungen	0,5555	0,4686	3838

5. Zusammenfassung

Wie aus den Zahlenbeispielen ersichtlich ist, konvergieren die Festwerte sehr rasch. Natürlich würde zwar eine größere Zahl der Fourierglieder genauere Lösungen liefern, aber man müßte dabei umständliche zeitraubende Arbeit mit in Kauf nehmen. Praktisch bedient man sich zweckmäßig der ersten drei Glieder. Bei Einwirkung der Einzellast ist es zweckmäßig, eine etwas größere Anzahl der Fourierglieder (z.B. 5 bis 6 Glieder) zu benutzen.

Aus den vorangehenden Ausführungen läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

1. Die Verformungen der Pylonen beeinflussen die Ausbiegungen und die

Schnittgrößen. In der Praxis, besonders bei den großen Hängebrücken, muß man daher die Verformungen der Pylonen berücksichtigen (vgl. Tabelle 1).

2. Die Länge der Öffnung, l , hat großen Einfluß auf die Verteilung der Windbelastung. Bei weitgespannten Hängebrücken wird die Windlast, die den Versteifungsträger angreift, stärker auf die Kabel übertragen als bei den Hängebrücken mit kleinerer Länge der Öffnung. Der Einfluß des Verhältnisses, f/l , ist nicht sehr wesentlich, obwohl die Verkleinerung der Pfeilhöhe die Verstärkung der Übertragung der Windbelastung auf die Kabel hervorruft.

3. Wie man aus Tabelle 2 erkennt, ist der Einfluß der waagerechten Biegesteifigkeit des Versteifungsträgers auf die Ausbiegungen und Schnittgrößen sehr groß.

4. Mit Hilfe von den Quasieinflußlinien kann man die gesuchten Größen mit praktisch genügend genauer Genauigkeit erhalten.

Das Verfahren, das von Moisseiff und Lienhard entwickelt wurde, ist im wesentlichen ein Iterationsverfahren. Bei der Auflösung der Differentialgleichungen (1) und (2) wandte Ellis das Differenzenrechnungsverfahren an⁴⁾. Unter Verwendung von dem hier dargelegten Verfahren erhält man dagegen unmittelbar mit leichter Mühe und genügend genauer Genauigkeit die Verformungen und die Schnittgrößen.

Schrifttum

- 1) Konishi, I. u. Yamada, Y.: Earthquake Responses of a Long Span Suspension Bridge. Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, vol. II, S. 863/878, Tokyo u. Kyoto 1960.
- 2) Konishi, I., Yamada, Y. u. Takaoka, N.: Studies on Earthquake Response of a Long Span Suspension Bridge. Proceedings of the 10th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1960.
- 3) Takaoka, N.: Schwingungen der Hängebrücke mit längeren Öffnungen bei beliebigem Verlauf der Erregerkraft durch Erdbeben. Dissertation, Universität Kyoto März 1961 (Kogaku Shushi).
- 4) Moisseiff, L. S. u. Lienhard, F.: Suspension Bridges under the Action of Lateral Forces. Transactions of ASCE. S. 1080/1141, 1933.
- 5) Topaloff, B.: Stationärer Winddruck auf Hängebrücken. Der Stahlbau 23 (1954), H. 5, S. 109/13.
- 6) Churchill, R. V.: Operational Mathematics. 1958, S. 27.
- 7) Hiba, Z.: Winddruck auf Hängebrücken mit schräg liegenden Tragkabeln. Der Stahlbau 28 (1959), H. 4, S. 98/101.
- 8) Bleich, H.: Die Berechnung verankerter Hängebrücken. Wien 1935.