La Construction des Symboles Matriciels dont les Parties Principales sont Données.

—une note sur l'article précédant—

par

Shigeo TARAMA

(Regu le 30 Juin, 1986)

Nous donnons les preuves du lemme 2-1 et du lemme 2-2 de l'article[2] concernant la construction des symboles matriciels dont les parties principales sont données.

1. Introduction.

La construction des symboles matriciels des opérateurs pseudo-différentiels qui jouissent des propriétés de projection et la diagonalisation en blocs par ces symboles matriciels ont été annoncés dans l'article. Mais le résultat plus général est montré par J. Sjöstrand[1] (voir aussi S. Tarama[3] et J. Wuidar[4]). Comme notre raisonnement est simple, nous croyons qu'il n'est pas inutile de donner notre démonstration.

2. Lemme préliminaire.

Soit $M(n, C)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à éléments de nombres complexes. Etant donné les matrices $Q(i) \in M(n, C)$ $(i=1, \dots, l)$ remplissant

1) $Q(i)\,Q(j) = O\ (i \neq j)$, $Q(i)\,Q(i) = Q(i)$, $Q(1) + Q(2) + \cdots + Q(l) = I$.

Alors nous avons le

Lemme 1.

L'équation pour les inconnues $P(i) \in M(n, C)$ $(i=1, \dots, l)$

2) $P(i) = Q(i)\,P(i) + P(i)\,Q(i) + A(i, i)$

* Section de Mathátiques et Pysiques appliquées.

$$O = Q(i)\,P(j) + P(i)\,Q(j) + A(i,j) \qquad (i \neq j)$$

3) $P(1) + P(2) + \cdots + P(l) = 0$

avec les données $A(i,j) \in M(n, C)$
a une solution si et seulement si les données remplissent les suivants:

4) $A(i,1) + A(i,2) + \ldots + A(i,l) = 0$
$A(1,i) + A(2,i) + \ldots + A(l,i) = 0$
pour $i = 1, 2, \ldots, l$

5) $Q(i)\,A(i,i) = A(i,i)\,Q(i)$
6) $(I - Q(i))\,A(i,j)\,(I - Q(j)) = 0 \qquad (i \neq j)$
7) $(I - Q(i))\,(A(i,i) + A(i,j))\,Q(j) = 0$
8) $Q(i)\,(A(i,i) + A(i,j))\,(I - Q(j)) = 0$

Preuve. La nécessité est évidente vu 1).
En ce qui concerne la suffisance, nous n'avons qu'à poser

$$\begin{aligned} P(i) = {} & A(i,i) - 2A(i,i)\,Q(i) + (Q(i)\,X(i,1)\,Q(1) + Q(i)\,X(i,2)\,Q(2) + \cdots \\ & + \cdots Q(i)\,X(i,i-1)\,Q(i-1) + Q(i)\,X(i,i+1)\,Q(i+1) + \cdots \\ & + Q(i)\,X(i,l)\,Q(l) + Q(1)\,Y(1,i)\,Q(i) + Q(2)\,Y(2,i)\,Q(i) + \cdots \\ & + Q(i-1)\,Y(i-1,i)\,Q(i) + Q(i+1)\,Y(i+1,i)\,Q(i) + \cdots \\ & + Q(l)\,Y(l,i)\,Q(i)) \end{aligned}$$

avec $X(i,j), Y(i,j) \in M(n, C)$ remplissant

$$X(i,j) + Y(i,j) = -A(i,j)$$

(par exemple $X(i,j) = Y(i,j) = -A(i,j)/2$).

C. Q. F. D

Remarquons que les solutions ne sont pas uniques.

3. Construction des symboles.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$. Nous désignons par $L(k)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dont les éléments sont fonctions indéfiniment dérivables sur $\Omega \times \mathbf{R}^N_\xi \setminus \{0\}$ et qu'elles sont positivement homogènes d'ordre k pour les variables ξ; par $SL(k)$ l'ensemble des séries formelles $\hat{Q} = Q(k) + Q(k-1) + \cdots + Q(m) + \cdots$ avec $Q(m) \in L(m)$.

Pour $\hat{P} \in SL(k)$ et $\hat{Q} \in SL(l)$, designons par $\hat{P} \circ \hat{Q}$ la série formelle $\hat{R} = R(k+l) + R(k+l-1) + \ldots \in SL(k+l)$
avec

$$R(k+l-p) = \sum_{|\alpha|+i+j=p} \partial_\xi^\alpha P(k-i)\,(-\sqrt{-1}\,\partial_x)^\alpha\, Q(l-j)/\alpha!\ .$$

Lemme 2. (voir lemme 2-1 de l'article[2])
Soient $Q(i, 0)$ $L(0)$ $(i=1, 2, \cdots, l)$ remplissant

$$Q(i, 0)^2 = Q(i, 0),\ Q(i, 0)\,Q(j, 0) = 0 \quad (i \neq j)$$
$$Q(1, 0) + Q(2, 0) + \qquad + Q(l, 0) = I.$$

Alors il existe $Q(i, p)$ $L(p)$ $(i=1, 2, \cdots, l; p=-1, -2, \cdots)$ telles que, en posant $\hat{Q}(i) = Q(i, 0) + Q(i, -1) + \cdots$, nous ayons

$$\hat{Q}(i)^2 = \hat{Q}(i),\quad \hat{Q}(i)\,\hat{Q}(j) = 0\ (i \neq j),\ \hat{Q}(1) + \hat{Q}(2) + \ldots + \hat{Q}(l) = I.$$

Preuve. Nous construisons les termes $Q(i, p) \in L(p)$ de la facon inductive: pour que nous ayons, en posant $\hat{Q}(i)\,(M) = Q(i, 0) + \cdots + Q(i, -1) + \cdots + Q(i, -M)$,

9, M) $\hat{Q}(i)\,(M)^2 \equiv \hat{Q}(i)\,(M) \mod SL(-M-1)$, $\hat{Q}(i)\,(M) \circ \hat{Q}(j)\,(M) \equiv 0 \mod SL(-M-1)$, $\hat{Q}(1)\,(M) + \hat{Q}(2)\,(M) + \ldots + \hat{Q}(l)\,(M) = I$.

Supposons que nous ayons $Q(i, p)$ $(p=0, -1, -2, \ -k)$ vérifiant 9, k).
Posons

$A(i, j)$ = le terme d'ordre $-k-1$ en ξ de $\hat{Q}(i)\,(k)\,\hat{Q}(j)\,(k)$ $(i \neq j)$
$A(i, i)$=le terme d'ordre $-k-1$ en ξ de $\hat{Q}(i)\,(k)\,\hat{Q}(i)\,(k) - \hat{Q}(i)\,(k)$.

Alors déterminons $Q(i, k+1)$ par l'équation

$$Q(i, k+1) = Q(i, 0)\,Q(i, k+1) + Q(i, k+1)\,Q(i, 0) + A(i, i)$$
$$0 = Q(i, 0)\,Q(j, k+1) + Q(i, k+1)\,Q(j, 0) + A(i, j) \quad (i=j)$$
$$0 = Q(1, k+1) + Q(2, k+1) + \cdots + Q(l, k+1).$$

S'il existe les solutions, nous voyons aisément que 9, $k+1$) est rempli.
Compte tenu du lemme 1, nous n'avons qu'à vérifier que $A(i, j)$ remplissent

4), 5), $\cdots$, 8).

Cela résulte du fait que 9, k) est rempli et que l'associatvité de l'opération "$\circ$" . Par exemple, comme

$$\hat{Q}(i)(k) \circ (\hat{Q}(i)(k) \circ \hat{Q}(i)(k)) = (\hat{Q}(i)(k) \circ \hat{Q}(i)(k)) \circ \hat{Q}(i)(k),$$

le terme d'ordre $-k-1$ en ξ du premier membre est

$$Q(i, 0) A(i, i) + A(i, i),$$

et celui du second membre est

$$A(i, i) + A(i, i) Q(i, 0),$$

d'où nous avons 5).

Ainsi de suite nous pouvons déterminer $Q(i, k)$.

C. Q. F. D.

4).

Nous démontrons le lemme 2-2 de l'article[2]. En ce qui concerne les notations que nous utilisons dans ce numéro et l' énoncé du lemme nous renvoyons aux lecteurs à l'article mentionné.

Ce lemme est montré par "diagonalisation" en se servant de Q_i. En effet, si nous avons pour $i \neq j$,

$$Q_i \circ P \circ Q_j \in \tilde{L}_{s_0}^{-k}$$

nous pouvons trouver X_{ij} $(i \neq j) \in L_{s_0}^{-k-1}$ tels que, en posant

$$M = \sum_{i \neq j} Q_i \circ X_{ij} \circ Q_j, \text{ nous ayons}$$

10) $$Q_i \circ (I+M) \circ P \circ (I+M)^{-1} \circ Q_j \in \tilde{L}_{s_0}^{-k-1}.$$

En effet le terme d'ordre $-k$ de 10) est

11) $Q_{io} X_{ij} Q_{jo} - Q_{io} P_1 Q_{io} X_{ij} Q_{jo}$ + le terme d'ordre $-k$ de $Q_i \circ P \circ Q_j$ Compte tenu des propriétés de Q_j, Q_{jo} et de P_4, nous pouvons trouver $X_{ij} \in L_{s_0}^{-k-1}$ tel que 11) soit nul.

En répétant ce raisonnement nous pouvons démontrer le lemme 2-2 de l'article[1].

Bibligraphie

1) J. Sjöstrand. Analytic singularities and micro-hyperbolic boundary value problems. Math. Ann. 254 (1980), 211-256.

2) S. Tarama. Une remarque sur les systémes faiblement hyperboliques (en japonais) Sûriken-Kôkyô-Roku RIMS Kyoto Univ. 376 (1980), 22-38.

3) S. Tarama. Sur le problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques doubles dans les classes de Gevrey (Lemme 3. 1.) à paraître Math. Japonica.

4) J. Wuidar. Singularités analytiques dans les problèmes aux limites. Thèse Doctorat Univ. de Liège (1982).