Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., Vol. 56, No. 2 (1994)

Une Note Sur Les Systèmes Hyperboliques Uniformément Diagonalisables

By

Shigeo TARAMA

(Received December 17, 1993)

On considère le problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques uniformément diagonalisables. On montre la relation entre la réguralité des coefficients et l'espace où le problème est bien posé.

Soit $T>0$. Considérons le problème de Cauchy

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} & \text{dans } [0,T]\times \boldsymbol{R} \\ \begin{pmatrix} u(0,x) \\ v(0,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} & \text{sur } \boldsymbol{R} \end{cases}$$

où l'on suppose les suivants:

$$(1)\qquad a(t) \text{ et } b(t) \text{ sont non-negatifs.}$$

De plus il existe deux constantes positives C_1 et C_2 teles que pour $t\in[0,T]$,

$$(2)\qquad C_1 a(t) \leq b(t) \leq C_2 a(t).$$

Remarquons que l'hypothèse (1) implique que le système considéré est hyperbolique. D'autre part (2) implique que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix}$$

est uniformément diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice invertible $N(t)$ dont les éléments sont bornés sur $[0,T]$ avec ceux de $N^{-1}(t)$ telle que

Section de Math. et Phys. Appliquées Fac. des Sci. Tech.. Université de Kyoto 606–01 Kyoto, Japon

$$N(t)\begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix} N^{-1}(t)$$

soit diagonale.

En effet on n'a qu'à prendre

$$N(t)=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\dfrac{a(t)}{b(t)}} \\ 1 & -\sqrt{\dfrac{a(t)}{b(t)}} \end{pmatrix}.$$

En se servant des résultats de l'article de F. Colombini, E. Jannelli et S. Spagnolo (Well-Posedness in the Gevrey Classes of the Cauchy Problem for a Non-strictly Hyperbolic Equation with Coefficients Depending on Time. publié dans l'Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 10 (1983) 293–312), que l'on appelle dans la suite C-J-S, on montre les suivants.

Théorème 1. *Sous les hypothèses* (1) *et* (2), *si* $a(t)$ *et* $b(t)$ *sont à* $C^{l,\kappa}([0,T])$, *où* l *est entier non-negatif et* $\kappa\in(0,1]$, *alors pour* s *remplissant* $1<s<l+\kappa+1$, *le problème de Cauchy* (C) *est* $\mathscr{E}^{(s)}$*-bien posé, c'est-à-dire pour toute donnée* ${}^t(u_0(x),v_0(x))\in\mathscr{E}^{(s)}$, *le problème* (C) *admet une et une seule solution* ${}^t(u(t,x),v(t,x))\in C^1([0,T],\mathscr{E}^{(s)})$.

Ici on dit que ${}^t(u(x),v(x))\in\mathscr{E}^{(s)}$ si $u(x)$ et $v(x)$ remplissent le suivant: pour tout compact $K\subset\boldsymbol{R}$, il existe deux constantes C et A telles que pour tout $x\in K$ et tout entier $m\geq 0$

$$\left|\frac{d^m}{dx^m}u(x)\right|+\left|\frac{d^m}{dx^m}v(x)\right|\leq CA^m m!^s.$$

Le Théorème 1 découle immediatement des résultats de C-J-S, en considérant pour une solution de l'équation à paramètre ξ

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\hat{u}(t,\xi)\\ \hat{v}(t,\xi)\end{pmatrix}=i\xi\begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{u}(t,\xi)\\ \hat{v}(t,\xi)\end{pmatrix},$$

l'énergie $E_{l,\kappa}$:

$$E_{l,\kappa}(\hat{u}(t,\xi),\hat{v}(t,\xi))=|\hat{u}(t,\xi)|^2+\frac{a(t,\xi)}{b(t,\xi)}|\hat{v}(t,\xi)|^2$$

où, en posant $\rho=\dfrac{1}{\kappa+l+1}$ et $<\xi>=\sqrt{\xi^2+1}$,

$$a(t,\xi)=\begin{cases}<\xi>^{\rho}\int_t^{t+<\xi>^{-\rho}}a(s)ds+K<\xi>^{\rho-1} & \text{si } l=0\\ a(t)+<\xi>^{\rho-1} & \text{si } l\geq 1\end{cases}$$

$$b(t,\xi)=\begin{cases}<\xi>^{\rho}\int_t^{t+<\xi>^{-\rho}}b(s)ds+K<\xi>^{\rho-1} & \text{si } l=0\\ b(t)+<\xi>^{\rho-1} & \text{si } l\geq 1\end{cases}$$

avec une grande constante K remplissant, avec deux constantes D_1 et D_2, sur $[0,T]$

$$D_1\leq\frac{a(t,\xi)}{a(t)+<\xi>^{\rho-1}}\leq D_2$$

et

$$D_1\leq\frac{b(t,\xi)}{b(t)+<\xi>^{\rho-1}}\leq D_2$$

En ce qui concerne l'optimalité de la thèse du Théorème 1, on a le suivant.

Théorème 2. *Pour tout entier $l\geq 0$ et tout $\kappa\in(0,1]$, il exist $a(t)$ et $b(t)$ dans $C^{l,\kappa}([0,T])$ qui remplissent* (1) *et* (2)
tels que pour $s>l+\kappa+1$, le problème (C) *n'est pas $\mathscr{E}^{(s)}$-bien posé.*

Pour construire les fonctions $a(t)$ et $b(t)$, on suit fidèlement l'argument du Theorem 2 de C-J-S.

Soient, pour j entier positif,

(i) $\{\nu_j\}$ une suite croissante d'entiers positifs tel que $\nu_j\nearrow+\infty$,

(ii) $\{\rho_j\}$ une suite décroissante de nombres positifs tel que $\sum_{j=1}^{+\infty}\rho_j=\rho^*<+\infty$,

(iii) $\{\delta_j\}$ une suite décroissante de nombres positifs tel que $\delta_j\searrow 0$ et que

$$\frac{\nu_j}{\rho_j\delta_j}\ \text{soit entier.} \tag{3}$$

Posons $t_1=\frac{1}{2}\rho_1$ et pour $j\geq 2$

$$t_j=\sum_{s=1}^{j-1}\rho_s+\frac{1}{2}\rho_j.$$

On définit les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ comme suit; pour $t\in[t_j-\frac{1}{2}\rho_j,\ t_j+\frac{1}{2}\rho_j]$

$$\begin{aligned} a(t)&=\delta_j\alpha(2\pi\nu_j\frac{t-t_j}{\rho_j})\beta_j(t)+\delta_{j-1}\alpha(2\pi\nu_{j-1}\frac{t-t_{j-1}}{\rho_{j-1}})(1-\beta_j(t)) \\ b(t)&=\delta_j\beta_j(t)+\delta_{j-1}(1-\beta_j(t)) \end{aligned} \tag{4}$$

et pour $t\geq\rho^*$

$$a(t)=0 \qquad b(t)=0$$

où

$$\alpha(\tau)=1-\frac{4}{10}\sin 2\tau-\frac{1}{100}(1-\cos 2\tau)^2$$

$$\beta_j(t)=\beta(8\nu_j\frac{t-(t_j-\frac{1}{2}\rho_j)}{\rho_j})$$

avec une fonction non-negative et non-décroissante $\beta(t)\in C^\infty(\boldsymbol{R})$ telle que

$$\beta(t)=\begin{cases}1 & t\geq 1\\ 0 & t\leqq 0\end{cases}.$$

Rappelons les propriétés de $\alpha(\tau)$:

$$\pi\text{-périodique.} \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\leq\alpha(\tau)\leq 2. \tag{6}$$

Il existe $-\frac{\pi}{2}<t_-<0$ *et* $\frac{\pi}{4}<t_+<\frac{\pi}{2}$ tels que

$$\alpha'(\tau)\begin{cases}<0 & t\in(t_-,t_+)\\ >0 & t\in(-\frac{\pi}{2},t_-)\cup(t_+,\frac{\pi}{2}).\end{cases} \tag{7}$$

La propriété (7) vient de

$$\alpha'(\tau)=\frac{4}{25}\cos^4\tau(5\tan^4\tau-\tan^3\tau-5).$$

Supposons que

$$\sup_{j\geq 2}\delta_{j-1}\left(\frac{v_j}{\rho_j}\right)^{l+\kappa}<+\infty, \tag{8}$$

d'où l'on a $a(t)$ et $b(t)\in C^{l,\kappa}([0,+\infty))$.

Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ définies par (4) remplissent (1) et (2).

On va construire une solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a(t)\\ b(t) & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix}$$

sous la forme: avec $h_j=\dfrac{2\pi v_j}{\rho_j\delta_j}$

$$\begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{+\infty}\begin{pmatrix}u_j(t)\cos h_jx\\ v_j(t)\sin h_jx\end{pmatrix}.$$

Alors on a une équation de $u_j(t)$ et de $v_j(t)$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u_j(t)\\ v_j(t)\end{pmatrix}=h_j\begin{pmatrix}0 & a(t)\\ -b(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_j(t)\\ v_j(t)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

En remarquant que pour $t \in (t_j - \frac{\rho_j}{2} + \frac{\rho_j}{8\nu_j}, t_j + \frac{\rho_j}{2})$,

$$\begin{aligned} a(t) &= \delta_j \alpha(2\nu_j \pi \frac{t-t_j}{\rho_j}) \\ b(t) &= \delta_j \end{aligned} \tag{11}$$

et que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}\omega(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}\omega(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

où

$$\omega(t) = \sin t \exp(\frac{1}{10}(t - \frac{1}{2} \sin 2t)),$$

on voit que

$$\begin{pmatrix} \omega_{j,1}(t) \\ \omega_{j,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}\omega(2\nu_j \pi \frac{t-t_j}{\rho_j}) \\ \omega(2\nu_j \pi \frac{t-t_j}{\rho_j}) \end{pmatrix}$$

remplit (10) dans l'intervalle $J_j = (t_j - \frac{\rho_j}{2} + \frac{\rho_j}{8\nu_j}, t_j + \frac{\rho_j}{2})$. Soit

$$\begin{pmatrix} u_j(t) \\ v_j(t) \end{pmatrix}$$

la solution de (10) qui est égale à

$$\begin{pmatrix} \omega_{j,1}(t) \\ \omega_{j,2}(t) \end{pmatrix}$$

dans J_j. Alors on voit avec une constante $C > 0$ indépendante de j

$$|u_j(t_j + \frac{\rho_j}{2} - \frac{\rho_j}{8\nu_j})| + |v_j(t_j + \frac{\rho_j}{2} - \frac{\rho_j}{8\nu_j})| \geq C \exp(\frac{\pi \nu_j}{10}) \tag{12}$$

(13) $$|u_j(t_j+\frac{\rho_j}{2}-\frac{\rho_j}{8\nu_j})|+|v_j(t_j+\frac{\rho_j}{2}-\frac{\rho_j}{8\nu_j})|\leq C\ \exp(-\frac{\pi\nu_j}{10}).$$

Posons pour $t\in[0,\rho^*)$, $E_j(t)=u_j(t)^2+\frac{a(t)}{b(t)}v_j(t)^2$. Donc on a de (10)

(14) $$|\frac{d}{dt}E_j(t)|\leq\frac{|a'(t)b(t)-a(t)b'(t)|}{a(t)b(t)}E_j(t)$$

d'où l'on a pour $0\leq t<t'_j=t_j-\frac{\rho_j}{2}+\frac{\rho_j}{8\nu_j}$

(15) $$E_j(t)\leq E_j(t'_j)\ \exp\left(\int_t^{t'_j}\frac{|a'(s)b(s)-a(s)b'(s)|}{a(s)b(s)}ds\right).$$

On obtient de (11)

(16) $$\frac{a'(t)b(t)-a(t)b'(t)}{a(t)b(t)}=\frac{\alpha'_k(t)}{\alpha_k(t)}$$

dans l'intervalle J_k, où

(17) $$\alpha_k(t)=\alpha(2\nu_k\pi\frac{t-t_k}{\rho_k}).$$

D'autre part on a dans $I_k=[t_k-\frac{\rho_k}{2},t_k-\frac{\rho_k}{2}+\frac{\rho_k}{8\nu_k}]$,

(18) $$\frac{a'(t)b(t)-a(t)b'(t)}{a(t)b(t)}\leq 0.$$

En effet on voit dans I_k

(19) $$\begin{aligned}a'(t)b(t)-a(t)b'(t)=(&\delta_k\alpha'_k(t)\beta_k(t)+\delta_{k-1}\alpha'_{k-1}(t)(1-\beta_k(t))b(t)\\&+\beta'_k(t)\delta_k\delta_{k-1}(\alpha_k(t)-\alpha_{k-1}(t)).\end{aligned}$$

Comme $t_k-\frac{\rho_k}{2}=t_{k-1}+\frac{\rho_{k-1}}{2}$ et $\frac{\nu_k}{\rho_k}>\frac{\nu_{k-1}}{\rho_{k-1}}$, on a de (7) et de (17)

$$\alpha'_k(t)<0 \text{ et } \alpha'_{k-1}(t)<0 \text{ dans } I_k.$$

Donc le premier terme du second membre de (19) est negatif dans I_k. D'autre part, en posant $t=t_k-\frac{\rho_k}{2}+s$, on a

$$\alpha_k(t_k-\frac{\rho_k}{2}+s)=\alpha(2\frac{\nu_k}{\rho_k}\pi s)$$

et

$$\alpha_{k-1}(t_k-\frac{\rho_k}{2}+s)=\alpha(2\frac{\nu_{k-1}}{\rho_{k-1}}\pi s).$$

Compte tenu de (7) et de $\frac{\nu_k}{\rho_k}>\frac{\nu_{k-1}}{\rho_{k-1}}$, on voit

$$\alpha(2\frac{\nu_k}{\rho_k}\pi s)\leq\alpha(2\frac{\nu_{k-1}}{\rho_{k-1}}\pi s) \text{ dans } [0,\frac{\rho_k}{8\nu_k}],$$

d'où l'on a

$$\alpha_k(t)\leq\alpha_{k-1}(t) \text{ dans } I_k.$$

Donc le second terme du second membre de (19) est non-positif. Ce qui montre (18).

Compte tenu de (5), (6), (7), (16) et de (18), on obtient

$$\int_t^{t'_j}\frac{|a'(s)b(s)-a(s)b'(s)|}{a(s)b(s)}ds \leq\log\frac{a(0)}{b(0)} + 4(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{j-1}) \log4+\log2,$$

d'où l'on a avec (13) et (15)

$$E_j(t)\leq C \exp(-\frac{\pi}{5}\nu_j+4(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{j-1})\log4). \tag{20}$$

On voit ${}^t(u(t,x),v(t,x))\in C^1([0,\rho^*-\epsilon],\mathscr{E}^{(s)})$ s'il existe deux constantes positives M_ϵ et μ_ϵ telles que pour tout j

$$\sup_{0\le t\le \rho^*-\epsilon} |E_j(t)| \le M_\varepsilon \exp(-\mu_\varepsilon h_j^{\frac{1}{s}}). \tag{21}$$

Vu (20), (21) est vérifié si on a avec deux constantes positives C_1 et C_2

$$-\frac{\pi}{5}\nu_j + 4(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{j-1})\log 4 \le -C_1 h_j^{\frac{1}{s}} + C_2 \tag{22}$$

Comme $h_j = 2\pi\dfrac{\nu_j}{\rho_j\delta_j}$, on voit que les majorations:

$$(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{j-1})\log 4 < \frac{\pi}{21}\nu_j, \tag{23}$$

et

$$\sup_{j=1,2,\cdots} \frac{\nu_j^{1-s}}{\rho_j\delta_j} < +\infty \tag{24}$$

impliquent (22).

Ce qui reste, c'est de monter l'existence de ν_j, ρ_j, et δ_j qui remplissent (3), (8), (23) et, pour $s > 1+l+\kappa$, (24).

Posons, avec deux constantes entières et positives K et P,

$$\begin{aligned} \nu_j &= K^j \\ \rho_j &= (j+P)^{-2} \\ \delta_j &= K^{-j(l+\kappa)}(j+P)^{-2(l+\kappa)}. \end{aligned}$$

Alors on peut prendre, pour tous $P \ge 1$, K tel qu'on ait (8), (23) et, pour $s > 1+l+\kappa$, (24). Afin que (3) soit rempli, on modifie δ_j comme suit: avec $\theta_j \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\delta_j = \theta_j K^{-j(l+\kappa)}(j+P)^{-2(l+\kappa)}$$

tel que

$$\frac{\nu_j}{\rho_j\delta_j} \text{ soit entier}$$

et que la suite $\{\delta_j\}$ reste décroissante.

Par la définition on voit que, quand K est grand, il existe $\theta_j \in [\frac{1}{2},1]$ remplissant l'énoncé mentionné ci-dessus.

Donc on a obtenu ν_j, ρ_j et δ_j remplissant toutes les exigences.

Alors on a une solution ${}^t(u(t,x),v(t,x)) \in C^1([0,\rho^*),\mathscr{E}^{(s)})$ pour $s > 1 + l + \kappa$ qui est périodique par rapport à x, telle qu'on ne puisse pas, vu (12), prolonger ${}^t(u(t,x),v(t,x))$ dans $C^1([0,\rho^*],\mathscr{E}^{(s)})$. En effet, comme $u(t,x)$ et $v(t,x)$ sont périodiques à période 1 en x, si ${}^t(u(t,x),v(t,x))$ dans $C^1([0,\rho^*],\mathscr{E}^{(s)})$, les fonctions $\int_0^1 \exp(i2\pi nx)u(t,x)dx$ et $\int_0^1 \exp(i2\pi nx)v(t,x)dx$ seraient uniformément bornées sur $[0,\rho^*]$ par rapport à tout entier n. Mais (12) montre que c'est impossible. Ce qui montre le Théorème 2.