

非マルコフ完全非対称単純排他過程の流量の近似式

Approximate expression of flow for non-Markovian totally asymmetric simple exclusion process

By

Daichi YANAGISAWA*

Abstract

In this proceedings, first, two kinds of totally asymmetric simple exclusion process (TASEP) with periodic boundary condition (random and parallel updates versions) are explained. Explicit expressions of flow of the two models are shown with the derivation processes. Then, non-Markovian TASEP is introduced. Approximate expressions of flow is obtained by exploiting the expression of the parallel-update TASEP. Results of simulations agree well with the approximate expression. Discrepancy between the simulations and expression is explained by the effect of the third-order moment of waiting-time distribution when Gamma distribution is used. In Delayed-Exponential distribution case, no clear discrepancy is observed despite the approximation included in the expression.

§ 1. はじめに

非対称単純排他過程 (Asymmetric simple exclusion process (ASEP)) [1, 7] は, 非平衡統計力学の分野で活発に研究が進められている代表的なモデルである. ASEP では, 空間は離散的なセルに区切られ, そのセル上を粒子が確率的に移動する (Fig. 1). 1つのセルには原則1つの粒子しか存在することができない. このルールによって粒子の「排他」(exclusion) 的性質 (排除体積効果) が表現される. また, 粒子の移動方向は非対称 (asymmetric) であり¹, 粒子の流れがある. 特に粒子が一方向にしか移動しない場合は完全非対称単純排他過程 (Totally ASEP (TASEP)) と呼ばれ, 交通流などにも応用され

Received January 30, 2022. Revised February 1, 2022.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 60K35, 82C22

Key Words: totally asymmetric simple exclusion process, non-Markovian, approximation

*Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo, 4-6-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8904, Japan.

e-mail: tDaichi@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

¹粒子の移動方向が完全に対称な場合は, 対称単純排他過程 (Symmetric simple exclusion process (SSEP)) などとも呼ばれる.

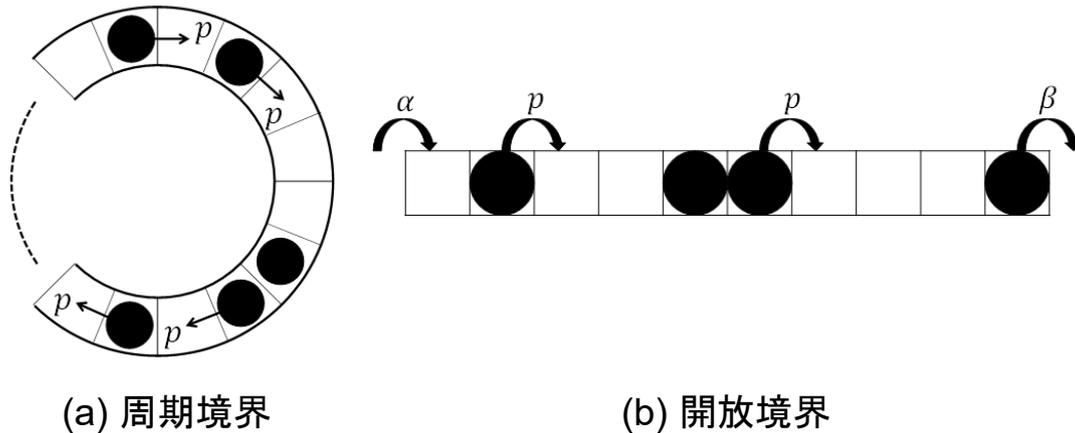


Figure 1. (a) TASEP (周期境界), (b) TASEP (開放境界) の模式図. パラメータ p , α , β はそれぞれホップ確率, 流入確率, 流出確率を表す. 連続時間のモデルの場合は, 確率はレートになる.

ている. TASEP の応用上の長所としては, 第一に現実の車や歩行者に必須の排除体積効果が最初から考慮されている点が挙げられる. そして第二は, 非平衡統計力学の分野で得られた理論的な成果が活かせるという点である. 車や歩行者のモデルは, 現実的であることが重要なため複雑なものも多い. こういったモデルを使って何か調べる際には, コンピュータを使ったシミュレーションを行う必要がある. シミュレーションはもちろん一つの方法ではあるが, ときにはすぐにだいたいの結果や傾向を知りたいという場合もある. そのような場合に, TASEP ベースのモデルの理論的な結果 (数式) が役に立つ. 例えば, 一車線あたりの車の密度がどれくらいになると渋滞するか? という疑問に即座に回答することができる.

最も基本的な TASEP はマルコフ過程であるが, 現実への応用では非マルコフ過程がより望ましい場合もある. 例えば車や歩行者の 1 回の移動距離が最大 1 セルのモデルの場合, 速さを確率の大きさに表現することが多いが, マルコフ過程では平均や分散を独立に設定することができない. そのため, 速い車は一定速度で移動するが, 遅い車は確率的にたくさん移動したりほとんど動かなかったりとミクロ的に不自然な動きになってしまう. 非マルコフ過程でもエージェントシミュレーション²は簡単に行うことができるが, 理論的な解析は非常に困難である. 実際, 非マルコフ TASEP (Non-Markovian TASEP (NMTASEP)) の研究は 8 年程前から始まっているが [2, 3, 4, 5, 6], 応用し易い数式を導出したようなものは少ない. そこで本研究では NMTASEP の流量の近似式を導出した.

本講究録では, まず次節でマルコフ過程の TASEP について簡単に説明する. そして §3 で NMTASEP の流量の近似式を導出し, §4 でまとめを行う.

²ここでは, 方程式の数値計算ではなく, 粒子の移動をそのまま再現するものをエージェントシミュレーションと呼んでいる.

§ 2. 完全非対称単純排他過程 Totally Asymmetric Simple Exclusion Process (TASEP)

TASEP は、境界条件とアップデートルールによりいくつかのバリエーションがある。境界条件は「周期境界 (periodic boundary)」(Fig. 1 (a)) と「開放境界 (open boundary)」(Fig. 1 (b)) の 2 つが特によく研究されている。一方、アップデートルールは「ランダム (シークエンシャル) アップデート (random (sequential) update)」と「パラレルアップデート (parallel update)」の 2 つがよく用いられる。ここではメインの NMTASEP の研究に深く関係する 2 種類の周期境界 TASEP について説明する。

§ 2.1. 周期境界 ランダムアップデート

周期境界の TASEP は Fig. 1 (a) のように N 個の粒子が L 個のセルで構成された系 (サーキット) をホップしていく。1 つのセルには 1 つの粒子しか入ることができない。また時間は離散的である³。

ランダムアップデートの場合は、Fig. 2 (a) のように毎時間ステップ 1 つのセルが選択される⁴。選択されたセルに粒子があり、かつ、その右隣のセルが空いていれば粒子がホップする。選択されたセルに粒子がいなかったり、右隣のセルが他の粒子によって占有されている場合は何も変化しない。

TASEP は定常状態の研究が特に進んでおり、その中で最も重要なのは粒子の流量 (J) である。周期境界では粒子の出入りがないため、粒子の密度 ($\rho = N/L$) は一定である。そのため、横軸を粒子の密度、縦軸を流量とした基本図 (fundamental diagram)⁵がよく描かれる。周期境界 ランダムアップデートの熱力学的極限⁶における定常状態の流量は、以下のように平均場近似により簡単に求めることができる。

周期境界においては全てのセルは対称なので、平均場近似によってセル間の相関を無視すれば、あるセルの粒子の密度は系全体の密度 ρ と一致する。すると、流量は選択されたセルに粒子がある確率 ρ と右隣に粒子がない確率 $1 - \rho$ の積で表される。

$$(2.1) \quad J_{\text{Rand}} = \rho(1 - \rho)$$

Fig. 3 (a) を見ると、この流量の式とシミュレーション結果がよく一致していることが分かる。

³ランダムアップデートは連続時間に対応している。すなわち、連続時間の TASEP のシミュレーション結果と、離散時間のランダムアップデートの TASEP のシミュレーション結果は、時間スケールを調整すれば一致する。

⁴このようにセルを選択する方法は、空きセルを選択してしまい何も変化しない場合があるので、実際にシミュレーションを行う際は非常に効率が悪い。そのようなときは粒子を選択するようにすると (特に粒子の密度が小さい場合に) シミュレーションの効率を上げることができる。ただし、得られた結果は密度に応じて時間スケールの調整が必要になる。

⁵縦軸が速度のものも基本図と呼ばれる。

⁶密度 $\rho = N/L = \text{const.}$ のもとで $L \rightarrow \infty$ 。

(a) ランダムアップデート

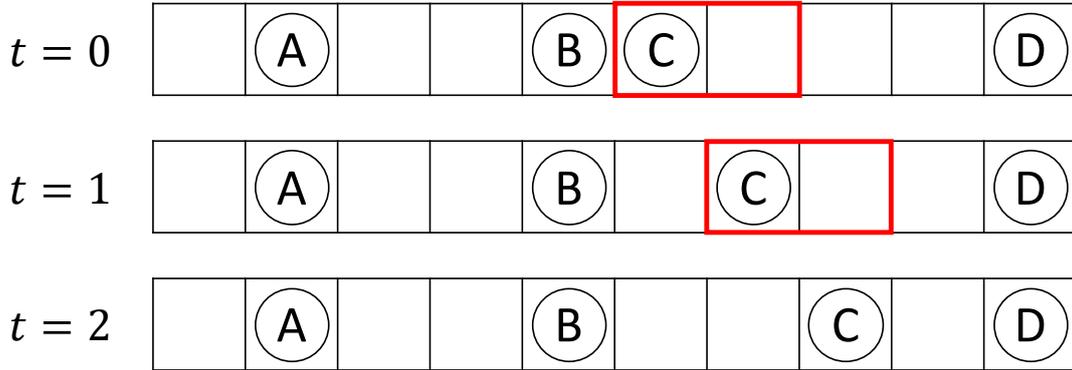
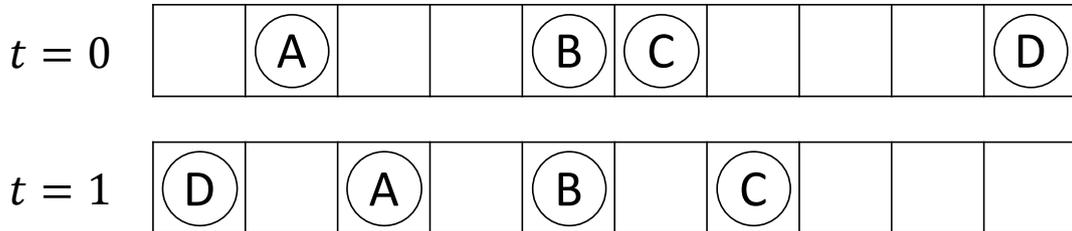
(b) パラレルアップデート ($p = 1$)

Figure 2. TASEP (周期境界) の時間発展の概略図. (a) ランダムアップデートでは、アップデートするセルまたはボンド (セルとセルの間の境界) が毎時間ステップランダムに選択される. この図では、時刻 $t = 0$ では粒子 C がいるセルが選択され、粒子 C が右隣のセルにホップしている. さらに $t = 1$ でも粒子 C がいるセルが選択され、粒子 C が右隣のセルにホップしている. (b) パラレルアップデートでは、右隣のセルが空いている全ての粒子がホップを試みる. この図ではホップ確率 $p = 1$ なので、 $t = 0$ で右隣のセルが空いている粒子 A, C, D が全てホップしている (周期境界なので右端のセルの右隣は左端である) もし $p < 1$ である場合は、右隣のセルが空いている全ての粒子がホップするとは限らない.

§ 2.2. 周期境界 パラレルアップデート

パラレルアップデートの場合も、複数の粒子がセルで構成された系をホップしていくことは変わらない. しかし、Fig. 2 (b) のように、今度は毎時間ステップ全ての粒子が同時にホップしようとする. すなわち、自分の右隣のセルが空いている全ての粒子はホップ確率 p で右隣のセルにホップする (確率 $1 - p$ でホップしない). ホップ確率 $p = 1$ のとき、このモデルはエレメンタリーセルオートマトン (Elementary Cellular Automaton) Rule 184 に完全に一致する.

パラレルアップデートの場合の熱力学的極限における流量の式も厳密に求めることができる. ただし、パラレルアップデートの場合はセルの間に相関があるので、全ての相関を完全に切ってしまう平均場近似では正しい式を得ることができない (ランダムアッ

プデートの場合と同じ式になってしまう)そこで、1つ隣のセルまでの相関を考える(2つのセルを1つのクラスターと考える)2クラスター近似を行う。TASEPでは、各セルの状態は粒子が「いない」か「いる」かの2通りなので、2セルのクラスターの状態は「いない, いない」・「いない, いる」・「いる, いない」・「いる, いる」の4通りが考えられる。粒子がない場合を「0」、いる場合を「1」と表すことにすると、4通りの状態は「00」・「01」・「10」・「11」となる。さらに長さ C のセルのクラスターが $X_1 X_2 \cdots X_C$ ($X_i \in \{0, 1\}$) という状態になっている確率を $P(X_1 X_2 \cdots X_C)$ と書くことにすると、流量は $P(00)$, $P(01)$, $P(10)$, $P(11)$ を計算することによって求まる⁷。

未知数が4つなので4本の方程式が必要である。まず $P(00)$ などはセルの状態を表す確率なので、確率の規格化条件

$$(2.2) \quad P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1$$

が成り立つ。また、Kolmogolov consistency equation [7] より、

$$(2.3) \quad P(11) + P(10) = P(11) + P(01) = P(1) = \rho$$

となる。これで3本の式が得られた⁸。残りの1本は系のマスター方程式から得られる。定常状態のマスター方程式は左辺が $P(00)$, $P(01)$, $P(10)$, $P(11)$ の4通り考えることができるが、今回以下の $P(01)$ のものを用いることにする。

$$(2.4) \quad P(01) = (1-p)P(0010) + P(0011) + (1-p)^2 P(1010) + (1-p)P(1011) + pP(10)$$

ここで括弧の中の数字が4つの場合は、真ん中の2つの数字が注目している2クラスターの状態に対応している。右辺は次の時刻に $P(01)$ となる全ての場合が足し合わされている。第1項は、左から3番目の「1」が確率 $1-p$ でホップせずに「01」となる場合である。第2項は、左から3番目の「1」はホップすることができないので必ず「01」となる場合である。今、2クラスター近似を行っているので、 P の括弧の中の数字が3つ以上の場合は以下のように分解することができる。

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P(X_1 X_2 \cdots X_{C-1} X_C) &\approx \frac{P(X_1 X_2)}{P(0X_2) + P(1X_2)} P(X_2 \cdots X_{C-1} X_C) \\ &\approx P(X_1 X_2 \cdots X_{C-1}) \frac{P(X_{C-1} X_C)}{P(X_{C-1}0) + P(X_{C-1}1)} \end{aligned}$$

これを (2.4) に適用して整理すると、

$$(2.6) \quad P(01) = \frac{P(00) + (1-p)P(10)}{P(00) + P(10)} P(01) \frac{(1-p)P(10) + P(11)}{P(10) + P(11)} + pP(10)$$

⁷ランダムアップデートの平均場近似は、1クラスター近似で $P(0) = 1 - \rho$, $P(1) = \rho$ となっていると考えられる。

⁸この式の左から1番目と2番目の部分を使って得られる $P(01) = P(10)$ という式を、粒子と空孔の対称性 (Particle-hole symmetry) や、周期境界では「01」と「10」の数が必ず等しいという性質から直接導くこともできる。

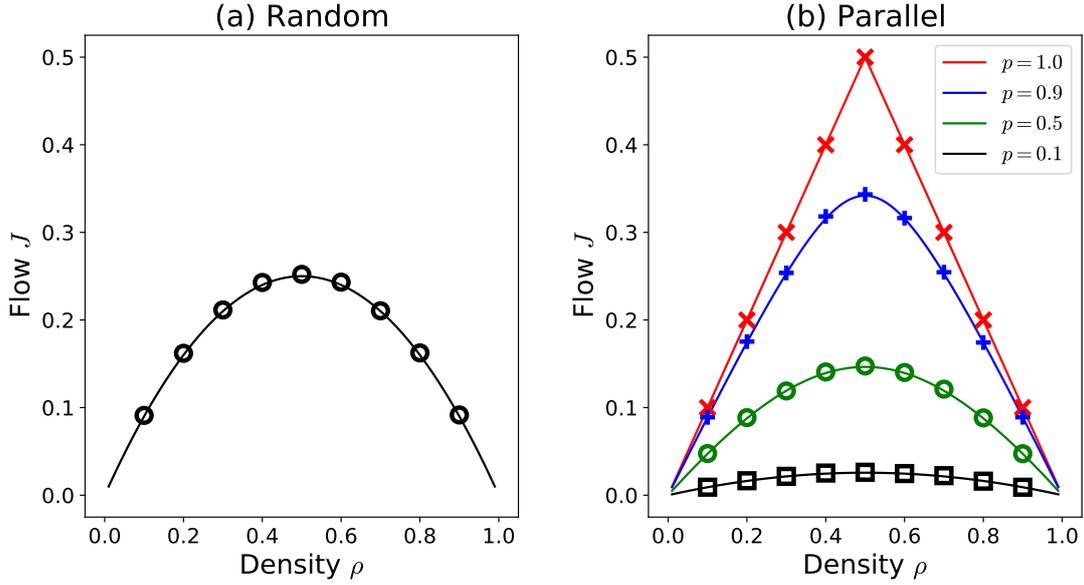


Figure 3. TASEP (周期境界) の基本図. (a) ランダムアップデート. (b) パラレルアップデート. 曲線は理論式 (2.1), (2.7), マーカーはシミュレーション結果を示す. シミュレーションにおけるセル数は $L = 100$ とした (熱力学的極限を考えるならばセル数 L はもっと大きい方が望ましいが, $L = 100$ でも基本図はほぼ完璧に一致する) パラレルアップデートの場合は 11000 [step] シミュレーションを行い, 1001 [step] から 11000 [step] の 10000 [step] の平均値をプロットした. ランダムアップデートの場合は, パラレルアップデートの N 倍の時間ステップのシミュレーションを行っている.

となる. (2.2), (2.3) (2本の式を含む), (2.4) を連立させて解くと, $P(00)$ などが求まり, 流量 J は,

$$(2.7) \quad J_{\text{Para}} = pP(10) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\rho(1 - \rho)}}{2}$$

のようになる. Fig. 3 (b) を見ると, この流量の式とシミュレーション結果がよく一致していることが分かる.

§ 3. 非マルコフ完全非対称単純排他過程 Non-Markovian TASEP (NMTASEP)

Fig. 4 は今回考える連続時間の NMTASEP の概略図である. NMTASEP では, 粒子が動くまでの待ち時間の確率分布が設定され⁹, 粒子は設定された確率分布から与えられたホップするまでの待ち時間を保持している. そのため Fig. 4 で粒子は時計で描かれて

⁹設定される確率分布が指数分布や幾何分布だと, それぞれマルコフ過程の連続時間 (ランダムアップデート) TASEP やパラレルアップデート TASEP になる.

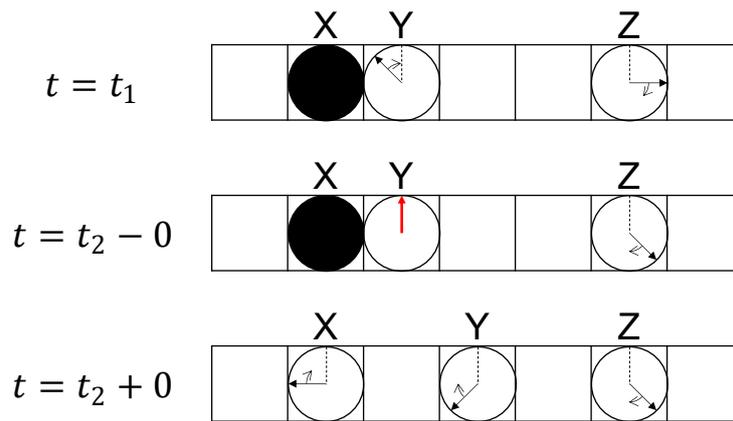


Figure 4. NMTASEP IF モデルの概略図.

おり、時計の針が真上（12時の位置）に来たときにホップする．時刻 $t = t_1$ において、粒子 X は右隣のセルに粒子 Y がいるため時計が止まっている．粒子 Y と Z は、右隣のセルが空いているので時計が動いている．時刻 $t = t_2$ になると、粒子 Y の時計の針が真上に到達するのでホップする．そして、新しい待ち時間がモデルで設定された待ち時間の確率分布に従って与えられる．これと同時に粒子 X も右隣のセルが空くので、次のホップまでの待ち時間が付与され時計が動き始める．この NMTASEP では、右隣のセルが占有されていてホップすることができない粒子の時計は動かない（ホップするために待機しない）ので、Idle-free (IF) モデル¹⁰と呼ぶことにする．

NMTASEP は IF モデル以外にもいくつかのバリエーションが考えられる．先行研究で調べられているのは、右隣のセルが占有されていても時計が動き続ける Particle-based (PB) モデル [2, 3] や時計がセルに付いている Site-based (SB) モデル¹¹[5] などである．PB や SB モデルは、右隣のセルが占有されている場合に待ち時間が 0 になると新しい待ち時間が付与される．これを現実の車や歩行者などに対応させると「前方が占有されている際に進むための準備をして、進めなかったら再度準備を最初からやり直す」というようなことになる．これはあまり自然とは言えないので、3つの中では IF モデルが一番応用しやすいのではないかと考えている．また、待ち時間の分布をマルコフ過程に対応する指数分布にすると、IF, PB, SB モデルは全て普通の連続時間（ランダムアップデート）TASEP になる．

本研究のメインテーマは、この IF モデルの流量の式を求めることである．非マルコフ過程を厳密に扱うのは困難なので、以下のような近似を考える．

まず離散時間 1 ステップの連続時間における長さ Δt [s/step] を導入する．この近似では単位が重要なので明示的に示している．[step] は離散時間の単位であり、連続時間の単位としてここでは [s] (秒) を用いる．

¹⁰始め「アイドリングストップ」モデルと名付けようと思ったが、アイドリングストップは典型的な和製英語だったので Idle-free モデルとした．

¹¹Site-based モデルでは、セル上に粒子がいなくてもセルの時計は動き続け、待ち時間が 0 になると新しい待ち時間が付与される．

パラレルアップデート TASEP では、粒子の右隣のセルが空いていれば確率 p でホップするが、これは待ち時間が幾何分布に従っているということである。この待ち時間の平均 μ と標準偏差 σ は、 Δt を用いると、

$$(3.1) \quad \mu = \frac{1}{p} \quad [\text{step}] = \frac{\Delta t}{p} \quad [\text{s}]$$

$$(3.2) \quad \sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \quad [\text{step}] = \frac{\sqrt{1-p}}{p} \Delta t \quad [\text{s}]$$

と書ける。これらを p , Δt について解くと、

$$(3.3) \quad p = 1 - c^2$$

$$(3.4) \quad \Delta t = \mu(1 - c^2)$$

となる。ここで $c(= \sigma/\mu)$ は変動係数である。これらを用いて、パラレルアップデート TASEP の流量の式 (2.7) を変形していくと、

$$(3.5) \quad \begin{aligned} J_{\text{Para}} &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\rho(1-\rho)}}{2} [1/\text{step}] \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4p\rho(1-\rho)}}{2\Delta t} [1/\text{s}] \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4(1-c^2)\rho(1-\rho)}}{2\mu(1-c^2)} [1/\text{s}] (\equiv \tilde{J}_{\text{IF}}) \end{aligned}$$

が得られる。この式は、粒子がホップするまでの待ち時間分布の平均 μ と変動係数 c のみをパラメータとして含んでいる。従って、待ち時間分布に用いた確率分布の平均と変動係数が分かれば基本図を描くことができる。変動係数は標準偏差と平均の比であるので、この流量の式は待ち時間分布の2次モーメントまでしか考慮できず、3次以上のモーメントの効果は完全に無視している。しかし、もし流量が3次以上のモーメントにあまり影響されないようであれば、この流量の式は非常にシンプルで扱いやすい近似式と考えることができる。

平均 μ は時間スケールにしか影響しないので、以下では $\mu = 1$ と固定する。すると $c = \sigma/\mu = \sigma$ となり、変動係数と標準偏差は一致する。このとき $c \rightarrow 1$ の極限をとると、

$$(3.6) \quad \lim_{c \rightarrow 1} \tilde{J}_{\text{IF}} = \rho(1 - \rho) [1/\text{s}]$$

となり、ランダムアップデートの場合の流量の式 (2.1) が現れる。 $c = 1$ つまり $\mu = \sigma$ とすることは、待ち時間分布を連続時間マルコフ過程の指数分布にすることに対応するので、このような結果が得られる。従って、(3.5) はランダムアップデートとパラレルアップデート両方を含んだ式となっている¹²。

¹²より正確には、元のパラレルアップデートの流量の式 (2.7) がランダムアップデートの場合も含んでいる。(3.3) より、 $c \rightarrow 1$ は $p \rightarrow 0$ に対応するので、ホップ確率が非常に小さいパラレルアップデート TASEP は時間スケールを調整すればランダムアップデート TASEP になる。

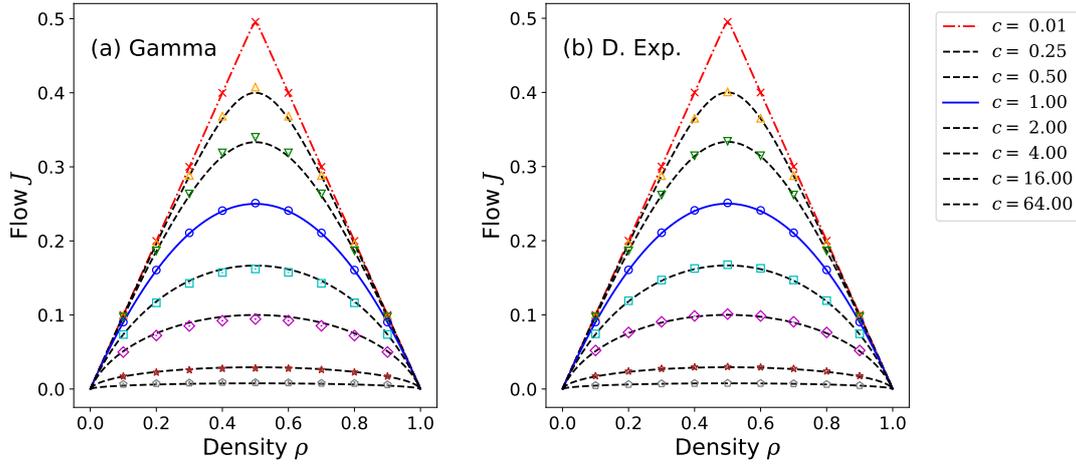


Figure 5. NMTASEP IF モデル (周期境界) の基本図. (a) 待ち時間分布がガンマ分布の場合. (b) 待ち時間分布が遅れ指数分布の場合. 曲線は理論式 (3.5), マーカーはシミュレーション結果を示す. シミュレーションにおけるセル数は $L = 250$ であり, 時間 $t > 110L$ [s] となるまで行った. そして $10L$ [s] $< t < 110L$ [s] のデータをプロットに用いた.

Fig. 5 に, 近似式 (3.5) と 待ち時間分布がガンマ分布 (a) と遅れ指数分布 (b) の場合の基本図を示す. それぞれの確率密度関数, 標準偏差, 歪度は Tab. 1 のようである. 図中のプロットは変動係数 c の値が異なる. $c > 1$ のとき, (3.3) よりホップ確率 $p = 1 - c^2 < 0$ となるため, 元のパラレルアップデート TASEP での粒子の動きを考えるとできないが, 近似式としては $c > 1$ でも問題なく用いることができる.

これらを見ると, どちらの分布の場合でも近似式 (3.5) はシミュレーション結果とよく一致していることが分かる. またガンマ分布の場合の基本図 (Fig. 5 (a)) をよく見ると, $c < 1$ の場合はシミュレーション結果が近似式よりも僅かに大きくなっており, $c > 1$ では逆の関係になっていることが分かる. これは3次以上のモーメントの影響だと考えられる. Tab. 1 の歪度の式を見ると, $c < 1$ ではガンマ分布の歪度は近似式の元となっている幾何分布の歪度よりも小さくなり, $c > 1$ の場合は逆の関係になることが分かる. 待ち時間分布の歪度が大きい方が粒子が動くタイミングのばらつきが大きくなり流量は小さくなると考えられるので, シミュレーション結果と近似式のずれは, 歪度の違いと定性的に一致する.

遅れ指数分布の場合 (Fig. 5 (b)), 近似式 (3.5) とシミュレーション結果は, グラフ上ではほぼ完璧に一致しているように見える. Tab. 1 を見ると分かるように, 実は遅れ指数分布の歪度も幾何分布と一致するわけではない. それにも関わらずここまでの精度で一致するのは不思議である. NMTASEP で重要なのは粒子の動く順番である. 待ち時間が多少変化しても, 粒子の動く順番が入れ替わらなければ系のダイナミクスには全く影響がない. そのため, 遅れ指数分布と幾何分布から得られる待ち時間の違いが粒子の動く順番に影響するのか数値的に調べることで, この現象を説明できる可能性がある.

Table 1. 平均が 1 になるように調整された幾何分布, ガンマ分布, 遅れ指数分布の確率密度関数, 標準偏差 (変動係数), 歪度. 幾何分布は単位変換 ([step] \rightarrow [s]) 後の式である. また, 幾何分布は本来離散分布であるため, 確率密度関数を考えることはできないので載せていない.

分布名	確率密度関数 $f(t)$	標準偏差 σ (変動係数 c)	歪度
幾何分布	-	$\frac{\sqrt{1-p}}{p} \Delta t$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}} = c + 1/c$
ガンマ分布	$\frac{k^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-kt}$	$1/\sqrt{k}$	$2/\sqrt{k} = 2c$
遅れ指数分布	$\frac{1}{1-\delta} e^{-\frac{t-\delta}{1-\delta}}$	$1-\delta$	2

またもう一つ驚くべきは, 遅れ指数分布で $c > 1$ の場合もシミュレーション結果と近似式がよく一致していることである. Tab. 1 から分かるように, $c > 1$ のとき遅れ指数分布のパラメータ $\delta = 1 - c < 0$ となる. 遅れ指数分布の定義域は $[\delta, \infty)$ であるので, $c > 1$ のときは負の待ち時間をとるということである. シミュレーションでは, これは同じ粒子が連続して動くことに対応する. 前段落で記述したように, NMTASEP のダイナミクスに影響するのは粒子の動く順番であるので, 負の待ち時間が粒子の連続的な動きに対応すると考えれば時間が戻るといようなことを考える必要はないが, それでもここまで完璧に一致するのは非常に不思議である.

§ 4. まとめ

本講究録では, まずランダムアップデートとパラレルアップデートの周期系 TASEP (マルコフ過程) の流量の式を紹介した. そして, パラレルアップデートの流量の式の単位を変換することで, 非マルコフ TASEP の流量の近似式を導出した. この近似式はシミュレーション結果とよく一致する. 待ち時間分布にガンマ分布を用いた場合は, シミュレーション結果と多少のずれが観測されるが, ずれの原因は近似式で無視してしまっている 3 次モーメントの効果から定性的に説明することができる. 一方, 遅れ指数分布の場合はどのような変動係数の場合でも非常に精度よく一致するが, 近似であるにもかかわらず精度よく一致する理由を説明することが難しい. 今後はこの理由について定性的にでも説明できるよう研究を進めたい.

References

- [1] R A Blythe and M R Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver's guide. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40(46):R333–R441, November 2007.
- [2] Robert Concannon. Statistical mechanics of non-markovian exclusion processes doctor of philosophy. 2014.
- [3] Robert J Concannon and Richard A Blythe. Spatiotemporally complete condensation in a Non-Poissonian exclusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 112(5):050603, February 2014.

- [4] Robin Jose, Chikashi Arita, and Ludger Santen. Bidirectional non-markovian exclusion processes. *J. Stat. Mech: Theory Exp.*, 2020(3):033207, March 2020.
- [5] Diana Khoromskaia, Rosemary J Harris, and Stefan Grosskinsky. Dynamics of non-markovian exclusion processes. *J. Stat. Mech: Theory Exp.*, 2014(12):P12013, December 2014.
- [6] Juha Merikoski. Totally asymmetric exclusion process fed by using a non-poissonian clock. *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, 91(6):062101, June 2015.
- [7] Andreas Schadschneider, Debashish Chowdhury, and Katsuhiko Nishinari. *Stochastic transport in complex systems: From molecules to vehicles*. Elsevier Science, London, England, October 2010.