

# 離散 Kirchhoff 弾性棒の明示公式

## Explicit formula for discrete Kirchhoff elastic rods

By

川久保哲, 松浦望

KAWAKUBO, Satoshi\* and MATSUURA, Nozomu\*\*

### Abstract

We construct the Kirchhoff and discrete Kirchhoff elastic rods in three-dimensional Euclidean space explicitly by using the elliptic theta functions.

### § 1. はじめに

ピアノ線に代表される一次元弾性体はいろいろな観点から多くの研究が行われ、数理モデルとしては Euler の弾性曲線と Kirchhoff の弾性棒がよく知られている。弾性曲線は一次元弾性体の最も素朴なモデルであり、17 世紀末に Jacob Bernoulli が端緒となる問題を提起したのち、問題を引き継いだ Daniel Bernoulli が 1742 年に Euler への手紙 [1, p. 499] の中で変分問題としての定式化を行って、最終的には Euler が平面内の弾性曲線の形状を分類した。弾性曲線の研究の歴史については [2] などを参照されたい。弾性曲線は弾性体の太さを無視して中心線の形状のみを考えたモデルだが、それに対して、弾性棒 [3] は中心線の形状に加えて弾性体の材質の捩れを考慮したモデルであり、弾性曲線を特別な場合として含んでいる。鶴 [4] や Shi-Hearst [5] や Langer-Singer [6] は、弾性棒の中心線を Jacobi の楕円関数を用いて陽的、明示的に記述した。

弾性曲線や弾性棒の数値計算については、Malcolm [7] や Edwards [8] が Jacobi の楕円関数で計算するスプライン解法を提案したのち、Spillmann-Teschner [9, 10] は弾性棒の Cosserat 理論に基づいて接触処理やループ現象の数値実験を行った。その一方で、離散微分幾何 [11] の発展を契機として Bergou ら [12, 13, 14] は中心線が伸縮する離散弾性

---

Received March 4, 2022. Revised July 13, 2022.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 53A70, 68U05, 70H06, 37J70.

*Key Words:* elastic rod, elastic curve, elastica, discrete differential geometry.

This work was supported by JST CREST JPMJCR1911 and JSPS KAKENHI JP19K03507.

\*兵庫県立大学, University of Hyogo, Hyogo 651-2197, Japan.

e-mail: kawakubo@sci.u-hyogo.ac.jp

\*\*久留米工業大学, Kurume institute of technology, Fukuoka 830-0052, Japan.

e-mail: nozomu@kurume-it.ac.jp

棒の数値計算を行った. コンピュータグラフィックスの分野ではこれらの顕著な成果が得られているが, 離散微分幾何の分野では, 離散弾性棒を特殊関数で書き表すような先行研究は見当たらない. 本研究では, Bobenko-Suris [15] によって定義された非伸縮性の離散弾性棒を, 楕円テータ関数を用いて陽的, 明示的に記述する.

## § 2. 楕円テータ関数

虚部が正であるような複素数  $\omega$  をひとつ固定して, 複素数  $z$  と径数  $k$  に対して  $e(z, k) = \exp(\pi\sqrt{-1}\omega k^2 + 2\pi\sqrt{-1}kz)$  とおく. 正則関数

$$\theta_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(z, k)$$

および  $\theta_1(z) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(z+1/2, k+1/2)$ ,  $\theta_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(z, k+1/2)$ ,  $\theta_4(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(z+1/2, k)$  をまとめて楕円テータ関数と呼び,  $L = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$  をその周期格子という. 周期格子を決める複素数  $\omega$  の値を明記したい場合には, 例えば  $\theta_3(z)$  のことを  $\theta_3(z, \omega)$  と書く. 楕円テータ関数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  の零点の集合はそれぞれ  $L, 1/2 + L, (1+\omega)/2 + L, \omega/2 + L$  である. 楕円テータ関数は準周期的であり, 互いの関係は次の表のようになる.

表 1 楕円テータ関数の相互関係. 左端の関数の, 上段の変数値に対する値を示している. 例えば  $\theta_1(z+1/2) = \theta_2(z)$  が成り立つ.

	$z+1/2$	$z+\omega/2$	$z-1/2$	$z-\omega/2$
$\theta_1$	$\theta_2(z)$	$\sqrt{-1}e(z, 1/2)^{-1}\theta_4(z)$	$-\theta_2(z)$	$-\sqrt{-1}e(-z, 1/2)^{-1}\theta_4(z)$
$\theta_2$	$-\theta_1(z)$	$e(z, 1/2)^{-1}\theta_3(z)$	$\theta_1(z)$	$e(-z, 1/2)^{-1}\theta_3(z)$
$\theta_3$	$\theta_4(z)$	$e(z, 1/2)^{-1}\theta_2(z)$	$\theta_4(z)$	$e(-z, 1/2)^{-1}\theta_2(z)$
$\theta_4$	$\theta_3(z)$	$\sqrt{-1}e(z, 1/2)^{-1}\theta_1(z)$	$\theta_3(z)$	$-\sqrt{-1}e(-z, 1/2)^{-1}\theta_1(z)$

複素数  $z_1, z_2, z_3, z_4$  に対して

$$2w_1 = -z_1 + z_2 + z_3 + z_4, \quad 2w_2 = z_1 - z_2 + z_3 + z_4,$$

$$2w_3 = z_1 + z_2 - z_3 + z_4, \quad 2w_4 = z_1 + z_2 + z_3 - z_4$$

とおくと, Jacobi の基本関係式

$$\begin{aligned} & -\theta_1(z_1)\theta_1(z_2)\theta_1(z_3)\theta_1(z_4) + \theta_2(z_1)\theta_2(z_2)\theta_2(z_3)\theta_2(z_4) \\ & + \theta_3(z_1)\theta_3(z_2)\theta_3(z_3)\theta_3(z_4) + \theta_4(z_1)\theta_4(z_2)\theta_4(z_3)\theta_4(z_4) \\ & = 2\theta_3(w_1)\theta_3(w_2)\theta_3(w_3)\theta_3(w_4) \end{aligned}$$

が成り立つ．証明は安藤 [16, p. 129] や武部 [17, p. 262] などいろいろな文献に書かれている．Jacobi の基本関係式において，4 つの変数  $z_1, z_2, z_3, z_4$  を適当に簡約して 2 変数化することにより，加法定理をはじめとするいろいろな差分公式が導出でき，そこからさらに微分公式が導かれる．そのような公式の例については，例えば Whittaker-Watson [18] や Kharchev-Zabrodin [19] を参照されたい．

本稿ではこのあと積  $\theta_1(z)\theta_2(z)$  と積  $\theta_3(z)\theta_4(z)$ ，およびこれらの商がよく登場するので，視認性と省スペースのため

$$(2.1) \quad \theta_{12}(z) = \theta_1(z)\theta_2(z), \quad \theta_{34}(z) = \theta_3(z)\theta_4(z), \quad \Theta(z) = \frac{\theta_1(z)\theta_2(z)}{\theta_3(z)\theta_4(z)}$$

と書く．ただしこれらは標準的な記号ではない (すなわち  $\theta_{12}$  と  $\theta_{34}$  は指標付きのテータ関数の意味ではなく， $\Theta$  は Jacobi の  $\Theta$  関数ではない) ことに注意．なお  $\Theta$  は

$$\Theta(z) = \frac{\theta_1(z, \omega)\theta_2(z, \omega)}{\theta_3(z, \omega)\theta_4(z, \omega)} = \frac{\theta_1(2z, 2\omega)}{\theta_4(2z, 2\omega)}$$

とも表示できるから，もし  $\Re\omega = 0$  ならば  $\Theta$  は sn 関数のようなものである．また各番号  $j = 1, 2, 3, 4$  について  $\theta_j$  の導関数を  $\theta'_j$  で表す．

### § 3. 平面弾性曲線

弾性棒の明示公式を述べるための準備として，この節では平面内の弾性曲線の明示公式を見ておこう．Euclid 平面  $\mathbb{R}^2$  内の速さ 1 の曲線を  $\gamma$  とし，その曲率を  $\kappa$  とする．曲線の長さとおよび端点での接線を固定して，弾性エネルギー汎関数  $\int \kappa^2 ds$  に関する変分問題を考える．この変分問題の解を弾性曲線という．弧長径数  $s$  で径数表示された平面曲線  $\gamma$  が弾性曲線であることと，実数  $c$  が存在して曲率  $\kappa$  が微分方程式

$$(3.1) \quad 2\kappa''(s) + \kappa(s)^3 - 2c\kappa(s) = 0$$

をみたすことは同値である．したがって曲率が定数であるような平面曲線 (すなわち直線と円) は平面弾性曲線である．これ以外の初等関数解は  $\kappa(s) = 2\sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}s + s_0)$  に限られ，このとき  $\gamma$  の座標成分は回転と平行移動の差を除いて

$$(3.2) \quad \gamma(s) = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -cs + 2\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}s + s_0) \\ -2\sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}s + s_0) \end{bmatrix}$$

と表示できる．直線と円と孤立波形 (3.2) の 3 つをまとめて，便宜的に，初等的な平面弾性曲線と呼ぶことにする．平面弾性曲線  $\gamma$  に対して  $T = \gamma'$  とおき， $T$  を左回りに 90 度回転した単位法ベクトルを  $N$  とすると

$$(3.3) \quad \frac{\kappa^2 - 2c}{2} \gamma' + \kappa' N = \text{定ベクトル}$$

となる. したがって初等的でない平面弾性曲線は, 回転と平行移動の差を除き, 微分方程式 (3.1) の解  $\kappa$  と正の定数  $b$  を用いて, 弧長径数  $s$  で

$$(3.4) \quad \gamma(s) = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} -cs + (1/2) \int_0^s \kappa(s)^2 ds \\ -\kappa(s) \end{bmatrix}$$

と積分表示できる [20, 式 (1.5.14)]. 積分を実行し, 座標成分を特殊関数で陽に表したものを明示公式という. 平面弾性曲線の明示公式としては, Djondjorov ら [21] や Langer-Singer [22] などによる Jacobi の楕円関数による表示, 松谷 [23] による Weierstrass の楕円関数による表示, Mumford [24] による楕円テータ関数による表示が知られている. Mumford は楕円テータ関数の周期格子に複素共役性  $\bar{L} = L$  を要請したうえで,  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  内の非初等的な平面弾性曲線  $\gamma$  が, 適切な実定数  $A, B$  と複素定数  $x$  を用いて

$$(3.5) \quad \gamma(s) = As + B \frac{\theta'_3(ps - x)}{\theta_3(ps - x)}$$

の形で与えられることを示した. ここで  $p$  は任意実定数である. 新たに径数  $t$  を導入して

$$\varsigma(s) = \exp(Ast)\theta_3(ps - x + Bt)$$

とおけば (3.5) は  $\gamma(s) = (\partial/\partial t)|_{t=0} \log \varsigma(s)$  と書いて, すこし見やすい. 本稿では, のちに Mumford の公式 (3.5) を拡張する形で弾性棒の中心線の明示公式を構成する.

なお, 平面弾性曲線  $\gamma$  の速度  $\gamma'$  の偏角  $\psi$  は, 単振り子の方程式

$$(3.6) \quad \psi''(s) = -b \sin \psi(s)$$

をみます. 実際,  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  と思って  $\gamma'(s) = \exp(\sqrt{-1}\psi(s))$  と書けば  $\psi' = \kappa$  で, かつ (3.4) より  $\kappa' = -b \sin \psi$  だから  $\psi$  は (3.6) をみます. 単振り子の運動は簡単にわかるから, そこから平面弾性曲線の概形をイメージすることもできる. 孤立波形 (3.2) は単振り子が倒立運動する場合に対応する.

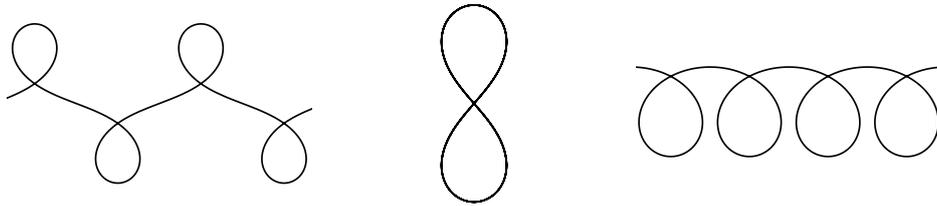


図 1 平面弾性曲線の例.

この節の最後に, 平面弾性曲線が (3.5) と書かれているとき, 曲率  $\kappa = -\sqrt{-1}\gamma''/\gamma'$  がどのように表示されるか見ておこう. まず (3.5) を微分して

$$(3.7) \quad \gamma'(s) = A + pB \left( \frac{\theta''_3(0)}{\theta_3(0)} + \frac{\theta'_1(0)^2 \theta_1(ps - x)^2}{\theta_3(0)^2 \theta_3(ps - x)^2} \right)$$

である。曲線  $\gamma$  は速さが 1 だから、右辺の関数が、 $s$  の関数として零点を持つては困る。そこでとりあえず複素関数としての零点を考え、複素数  $z_0$  が

$$0 = A + pB \left( \frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} + \frac{\theta_1'(0)^2}{\theta_3(0)^2} \frac{\theta_1(z_0)^2}{\theta_3(z_0)^2} \right)$$

をみたすとする。これを (3.7) に代入してさらに微分すると、曲率が

$$\kappa(s) = -2\pi p \sqrt{-1} \theta_3(z_0)^2 \frac{\theta_1(z)\theta_2(z)\theta_4(z)}{\theta_1(z+z_0)\theta_1(z-z_0)\theta_3(z)}$$

と表示される。ただし  $z = ps - x$  とおいた。複素数  $z_0$  は都合の良いように決めて構わないから、たとえば  $z_0 = 1/2$  または  $z_0 = \omega/2$  とする。このとき、表 1 で述べた楕円テータ関数の周期性によって

$$(3.8a) \quad \kappa(s) = \begin{cases} 2\pi p \sqrt{-1} \theta_4(0)^2 \frac{\theta_1(z)\theta_4(z)}{\theta_2(z)\theta_3(z)} & z_0 = 1/2, \\ -2\pi p \sqrt{-1} \theta_2(0)^2 \frac{\theta_1(z)\theta_2(z)}{\theta_3(z)\theta_4(z)} & z_0 = \omega/2 \end{cases}$$

となる。しかしこのままでは曲率  $\kappa$  が複素数値関数になってしまい、具合が悪い。そこで楕円テータ関数の周期格子  $L = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$  に複素共役性  $\bar{L} = L$  を要請する。このとき、複素数  $\omega$  の実部は 0 または  $1/2$  であると思ってよい。複素数  $\omega$  を  $\Re\omega = 0$  のように選んだときは、楕円テータ関数はすべての番号  $j = 1, 2, 3, 4$  について  $\overline{\theta_j(z)} = \theta_j(\bar{z})$  をみたし、複素数  $\omega$  を  $\Re\omega = 1/2$  のように選んだときは

$$\begin{aligned} \overline{\theta_1(z)} &= e^{-\pi\sqrt{-1}/4} \theta_1(\bar{z}), \\ \overline{\theta_2(z)} &= e^{-\pi\sqrt{-1}/4} \theta_2(\bar{z}), \\ \overline{\theta_3(z)} &= \theta_4(\bar{z}), \\ \overline{\theta_4(z)} &= \theta_3(\bar{z}) \end{aligned}$$

をみたすから、 $z_0 = 1/2$  のときは  $\Re\omega = 0$  なる  $L$  を採用し、 $z_0 = \omega/2$  のときは  $\Re\omega = 1/2$  なる  $L$  を採用する。さらに複素定数  $x$  を、 $z_0 = 1/2$  のときは  $\bar{x} = x - \omega/2$  であるようにとり、 $z_0 = \omega/2$  のときには実数ととれば、任意の実数  $s$  に対して  $\kappa(s)$  は実数となる。

離散化については、式 (3.3) の離散化によって平面離散弾性曲線が定義され、その明示公式も導出できる [25]。またその系として、離散単振り子方程式

$$(3.9) \quad \frac{2}{l^2} \left( \tan \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{2} - \tan \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{2} \right) = -b \sin \psi_n$$

が得られる。この差分方程式はいわゆる QRT 写像 [26] の一例である。差分方程式 (3.9) の解と周期性については [27] を参照されたい。

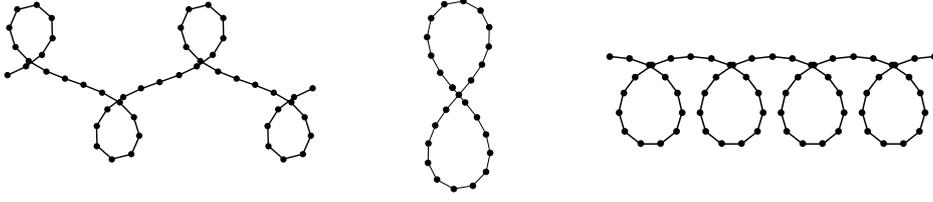


図 2 平面離散弾性曲線の例.

#### § 4. Kirchhoff 弾性棒

平面弾性曲線の変分問題をそのまま空間曲線に拡張することにより空間弾性曲線が定義される. さらに, その変分問題に弾性体の捩れの効果を加えることで弾性棒が定義される. 本節では弾性棒の明示公式を構成する.

ベクトルの内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  と書き, ベクトル積を  $\times$  で表す. 曲線  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  の速度は 1 とし, 速度を  $\gamma'$  と書く. 空間曲線としての曲率  $|\gamma''|$  をふたたび同じ記号  $\kappa$  で書けば, 曲線  $\gamma$  の Frenet 枠  $F = [T, N, B] = [\gamma', \kappa^{-1}\gamma'', \kappa^{-1}\gamma' \times \gamma'']$  は

$$F' = F \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

をみます. 関数  $\lambda = -\langle N, B' \rangle$  は捩率である. 曲線に付随する枠としては, Frenet 枠のほかに法接続に関する平行枠 [28] (以下, 単に平行枠と書く) がよく用いられる. 平行枠を  $P = [T, V_1, V_2]: I \rightarrow \text{SO}(3)$  と書けば, 平行枠の定義  $V_1' \parallel T$  かつ  $V_2' \parallel T$  より,  $P$  は

$$(4.1) \quad P' = P \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

をみます. 平行枠は Bishop 枠や自然枠とも呼ばれ,  $k_1 = \langle T', V_1 \rangle$  と  $k_2 = -\langle T', V_2 \rangle$  を自然曲率と呼ぶことがある. 平行枠から定まる自然曲率と Frenet 枠から定まる曲率, 捩率の関係は

$$k_1 = \kappa \cos \Lambda, \quad k_2 = -\kappa \sin \Lambda, \quad \Lambda = \int \lambda ds$$

であり, 変換  $(\kappa, \lambda) \mapsto \Psi = k_1 - \sqrt{-1}k_2 = \kappa \exp(\sqrt{-1}\Lambda)$  は橋本変換と呼ばれている. なお  $\Psi$  を複素曲率と呼ぶこともある. 平行枠は Frenet 枠と違って, 端点での法ベクトルの取り方に自由度があるが,  $\gamma'' = 0$  となる点においても定義できる利点がある. 曲線  $\gamma$  の Frenet 枠  $F$  と平行枠  $P$  の関係は

$$(4.2) \quad F = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Lambda & -\sin \Lambda \\ 0 & \sin \Lambda & \cos \Lambda \end{bmatrix}$$

である．次に弾性棒を考えよう．弾性棒は曲線のまわりを金属などの物質が覆っているものである．図3に示したとおり，曲線のみでは物質の捩れを表現することができないので，Frenet 枠や平行枠とは別に，物質の捩れを表現するための枠を用意する必要がある．

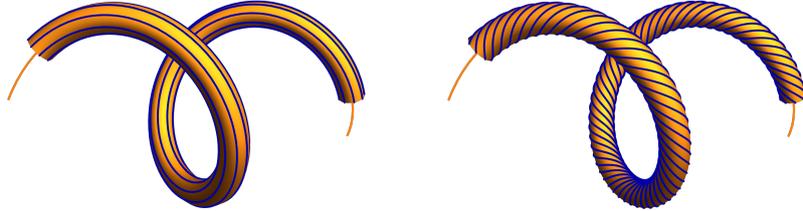


図3 弾性棒の例．中心線（両端から飛び出ている橙色の空間曲線）を覆う物質の捩れ具合を，青色の線で表現している．左右どちらの弾性棒も中心線は同じものだが，左の弾性棒には捩れがほとんどない（後述の用語を使えば，ツイスト率が0に近い弾性棒である）のに対し，右の弾性棒には捩れがある．

曲線  $\gamma$  に沿った正規直交枠  $M: I \rightarrow \text{SO}(3)$  で，その第1列目が  $M = [\gamma', *, *]$  となっているものを  $\gamma$  に適合した正規直交枠という．以下ではこのような組  $(\gamma, M)$  のことを枠付き曲線と呼ぶ．枠付き曲線  $(\gamma, M)$  に対して， $M$  の微分を

$$(4.3) \quad M' = M \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & 0 & -\mu \\ -\kappa_2 & \mu & 0 \end{bmatrix}$$

と書けば， $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = \kappa^2$  である．したがって関数  $\mu$  が物質の捩れに関係した量だと思える．そこで枠付き曲線  $(\gamma, M)$  のエネルギーを，正の定数  $a$  に対して

$$\mathcal{E}(\gamma, M) = \int_I \kappa^2 ds + 2a \int_I \mu^2 ds$$

と定める．右辺の第一項は，曲線の曲げの効果を表すエネルギー（弾性エネルギー）であり，第二項が物質の捩れの効果を表すエネルギーである．端点と端点での枠  $M$  を固定した変分に関して  $\mathcal{E}$  の第一変分公式を計算し，Euler-Lagrange 方程式を導くと

$$(4.4) \quad \gamma' \times \gamma'' + 2a\mu\gamma' = \gamma \times w_1 + w_2,$$

$$(4.5) \quad \mu' = 0$$

となる．式(4.5)は，エネルギーが臨界ならば，捩れが弾性体の一部に集中することはなく全体に一樣に分布することを示しており，定数  $\mu$  が捩れかたの割合を表している．

**定義 4.1** 枠付き曲線  $(\gamma, M)$  と正の定数  $a$  に対して, 定ベクトル  $w_1, w_2$  が存在して微分方程式系 (4.4)–(4.5) が成りたつとき, 組  $(\gamma, M)$  をツイスト率  $\mu$  の Kirchhoff 弾性棒, あるいは単に弾性棒といい,  $\gamma$  を中心線,  $M$  を物質枠という. 定数  $a$  の値を明記したいときは  $(\gamma, M)$  のことを  $(\gamma, M; a)$  と書く.

直線, 円, 常螺旋, および孤立波形は, 初等関数を用いて記述できる弾性棒の中心線である. これらを便宜的に初等的な弾性棒と呼ぶことにし, 以下の議論では考えない.

**命題 4.2** (中心線の積分表示) ツイスト率  $\mu$  の非初等的な弾性棒  $(\gamma, M; a)$  に対して,  $q = a\mu$  および

$$(4.6) \quad \begin{aligned} c_1 &= |w_1|, \\ c_2 &= (\lambda - q)\kappa^2, \\ c_3 &= (1/2)\kappa^2 - \langle \gamma', w_1 \rangle \end{aligned}$$

とおくと, 次のことが成りたつ.

- (1)  $c_1, c_2, c_3$  はいずれも定数であり,  $c_1 \neq 0$  である.
- (2) 中心線  $\gamma$  の Frenet 枠を  $[T, N, B]$  とすると

$$\frac{\kappa^2 - 2c_3}{2} T + \kappa' N + \kappa(\lambda - 2q)B = w_1$$

が成りたつ. したがって曲率  $\kappa$  と捩率  $\lambda$  は微分方程式

$$2\kappa'' + (\kappa^2 - 2c_3)\kappa - 2(\lambda - 2q)\kappa\lambda = 0$$

をみたし, 平方曲率  $u = \kappa^2$  は微分方程式

$$(4.7) \quad u'' = -\frac{3}{2}u^2 + 4(c_3 - q^2)u + 2(c_1^2 - c_3^2 + 2qc_2)$$

をみたす.

- (3) 中心線  $\gamma$  は, 回転と平行移動の差を除き, 弧長径数  $s$  を用いて

$$(4.8) \quad \gamma(s) = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} -c_3s + \frac{1}{2} \int^s u ds \\ -\sqrt{u - b_1^2 + 4q^2} \cos\left(\frac{b_1}{2}s + \frac{b_2}{2} \int^s \frac{1}{u - b_1^2 + 4q^2} ds\right) \\ -\sqrt{u - b_1^2 + 4q^2} \sin\left(\frac{b_1}{2}s + \frac{b_2}{2} \int^s \frac{1}{u - b_1^2 + 4q^2} ds\right) \end{bmatrix}$$

と積分表示できる. ただし

$$(4.9) \quad b_1 = \frac{c_2 - 2qc_3}{c_1}, \quad b_2 = b_1(b_1^2 - 2c_3) - 4q(c_1 + qb_1)$$

である。またこのとき  $w_1 = [c_1, 0, 0]$ ,  $w_2 = [b_1, 0, 0]$  であり, 中心線の速度は

$$(4.10) \quad \gamma'(s) = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} -c_3 + \frac{1}{2}u \\ -\sqrt{c_1^2 - \left(\frac{u}{2} - c_3\right)^2} \cos\left(c_1 \int^s \frac{c_2 - qu}{c_1^2 - (u/2 - c_3)^2} ds\right) \\ -\sqrt{c_1^2 - \left(\frac{u}{2} - c_3\right)^2} \sin\left(c_1 \int^s \frac{c_2 - qu}{c_1^2 - (u/2 - c_3)^2} ds\right) \end{bmatrix}$$

と積分表示できる。

微分方程式 (4.7) の解  $u$  を中心線の積分表示 (4.8) に代入し, 積分を実行することで, 中心線の明示公式が得られる。

**定理 4.3** (Kirchhoff 弾性棒の明示公式) 条件  $y > 0$  かつ  $p \neq 0$  かつ  $a > 0$  をみたく定数  $(x, y, p, q, r, a) \in \mathbb{R}^6$  を任意に固定し,  $\omega = 1/2 + \sqrt{-1}y$  とおく。楕円テータ関数の周期格子を  $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$  とし, 記号  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{34}$ ,  $\Theta$  を (2.1) の意味で用いる。実定数  $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  と複素定数  $E_1, E_2, E_3$  を次のとおり定める: まず正の定数  $c_1$  と実定数  $c_2, c_3, c_4$  を

$$\begin{aligned} c_4 &= \theta_2(0)^4 \Theta(\sqrt{-1}r)^2, \\ c_3 &= 3p^2\pi^2 c_4 - 2p^2\pi^2 (\theta_3(0)^4 + \theta_4(0)^4) + q^2, \\ c_2^2 &= -16p^6\pi^6 c_4 (c_4 - (\theta_3(0)^2 + \theta_4(0)^2)^2) (c_4 - (\theta_3(0)^2 - \theta_4(0)^2)^2), \\ c_1^2 &= 4p^2\pi^2 c_4 (3p^2\pi^2 c_4 - 2c_3 + 2q^2) + c_3^2 - 2qc_2 - 4p^4\pi^4 \theta_2(0)^8 \end{aligned}$$

と決めて,  $b_1$  と  $b_2$  を (4.9) で決め, さらに

$$\begin{aligned} e_1 &= -2 \arctan \frac{b_2}{4p\pi \theta_{34}(0) (4p^2\pi^2 c_4 - b_1^2 + 4q^2)}, \\ e_2 &= -2 \arctan \frac{c_2 + 2q(c_1 - c_3)}{4p\pi \theta_{34}(0) (2p^2\pi^2 c_4 + c_1 - c_3)}, \\ e_3 &= -2 \arctan \frac{c_2 - 2q(c_1 + c_3)}{4p\pi \theta_{34}(0) (2p^2\pi^2 c_4 - c_1 - c_3)} \end{aligned}$$

とおく。番号  $j = 1, 2, 3$  に対して複素数  $E_j$  を

$$E_j = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{4\pi\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2} \int_0^{e_j} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}}, \quad k' = \frac{\theta_4(0, 2\sqrt{-1}y)^2}{\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2}$$

で定める. さらに残りの定数を

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p^2 \pi^2 c_4 + q^2}{c_1} - \frac{4p^2}{c_1} \frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} \right), \\
A_1^2 &= \frac{p^2}{c_1^2} \frac{\theta_1'(0)^2 \theta_2(0)^2}{\theta_{12}(E_1)^2}, \\
A_2^2 &= \frac{\theta_{34}(E_3)^2}{\theta_{34}(E_2 + E_3) \theta_{34}(E_2 - E_3)}, \\
A_3^2 &= \frac{-\sqrt{-1} \theta_{12}(E_2)^2}{\theta_{34}(E_2 + E_3) \theta_{34}(E_2 - E_3)}, \\
B_0 &= \frac{p}{c_1}, \\
B_1 &= \frac{p}{\sqrt{-1}} \left( \frac{\theta_1'(E_1)}{\theta_1(E_1)} + \frac{\theta_2'(E_1)}{\theta_2(E_1)} \right) + \frac{b_1}{2}, \\
B_2 &= \frac{p}{\sqrt{-1}} \left( \frac{\theta_1'(E_2)}{\theta_1(E_2)} + \frac{\theta_2'(E_2)}{\theta_2(E_2)} \right) - q, \\
B_3 &= \frac{p}{\sqrt{-1}} \left( \frac{\theta_3'(E_3)}{\theta_3(E_3)} + \frac{\theta_4'(E_3)}{\theta_4(E_3)} \right) + q
\end{aligned}$$

と決め, 番号  $j = 1, 2, 3$  に対して  $C_j = -\frac{B_j}{p}x + C_{j0}$  とおく. ただし  $C_{10}, C_{20}, C_{30}$  は

$$\exp(\sqrt{-1}(C_{30} + C_{20} - C_{10})) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{A_1}{A_2 A_3} \frac{\theta_{34}(0) \theta_{34}(E_1)}{\theta_{34}(E_2) \theta_{12}(E_3)} \left( \frac{b_1}{2} - 2p\pi \theta_{34}(0) \tan \frac{e_1}{2} \right)$$

をみたま任意実定数とする. 実数  $s$  に対して

$$\begin{aligned}
(4.11) \quad \gamma(s) &= \left[ \begin{array}{c} -s + 2(\partial/\partial t) \log \alpha \\ 2 \Re \beta / \alpha \\ 2 \Im \beta / \alpha \end{array} \right] \Big|_{t=0}, \\
\alpha &= \alpha(s) = \exp(A_0 s t) \theta_{34}(ps - x + B_0 t), \\
\beta &= \beta(s) = A_1 \exp(\sqrt{-1}(B_1 s + C_1)) \theta_{34}(ps - x - E_1)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
(4.12) \quad P(s) &= \frac{1}{|\tau|^2 + |\sigma|^2} \left[ \begin{array}{cc} |\tau|^2 - |\sigma|^2 & -2\Re(\tau\sigma) & 2\Im(\tau\sigma) \\ 2\Re(\tau\bar{\sigma}) & \Re(\tau^2 - \sigma^2) & -\Im(\tau^2 - \sigma^2) \\ 2\Im(\tau\bar{\sigma}) & \Im(\tau^2 + \sigma^2) & \Re(\tau^2 + \sigma^2) \end{array} \right], \\
\tau &= \tau(s) = A_2 \exp(\sqrt{-1}(B_2 s + C_2)) \theta_{34}(ps - x - E_2), \\
\bar{\sigma} &= \bar{\sigma}(s) = A_3 \exp(\sqrt{-1}(B_3 s + C_3)) \theta_{12}(ps - x - E_3)
\end{aligned}$$

および

$$M(s) = P(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(qs/a) & -\sin(qs/a) \\ 0 & \sin(qs/a) & \cos(qs/a) \end{bmatrix}$$

と定める. ただし  $\overline{\sigma(s)}$  は  $\sigma(s)$  の共役複素数である. このとき

(1) 組  $(\gamma, M)$  はツイスト率  $q/a$  の Kirchhoff 弾性棒であり,

(2) 中心線  $\gamma$  は弧長径数  $s$  で表示された曲線で, その平方曲率  $u$  は

$$(4.13) \quad u(s) = 4\pi^2 p^2 \theta_2(0)^4 \left( \Theta(\sqrt{-1}r)^2 - \Theta(ps - x)^2 \right)$$

であり, 捩率  $\lambda$  は (4.6) で与えられる.

**証明** まず, 平面弾性曲線の曲率が (3.8b) と表されることに鑑みて, 弾性棒の中心線の平方曲率を  $u(s) = \text{定数} - 4\pi^2 p^2 \theta_2(0)^4 \Theta(ps - x)^2$  の形で探す. これを平方曲率の微分方程式 (4.7) に代入することで, 定理冒頭で述べた定数  $c_1, c_2, c_3$  の表示を得る. 定数  $c_4$  の表示は, 平方曲率の非負性を達成するためのものである. 次に, 渦糸方程式の多重ソリトン解による明示公式 [29, 式 (3.12), (3.1)–(3.3)] に基づいて  $\gamma, P$  の表示をそれぞれ (4.11), (4.12) と決める. あとは (4.11) を中心線の積分表示 (4.8) と比較し, 同様に (4.12) の第一列目を速度の積分表示 (4.10) を比較することで, 関数  $\alpha, \beta, \tau, \sigma$  が決まる.  $\square$

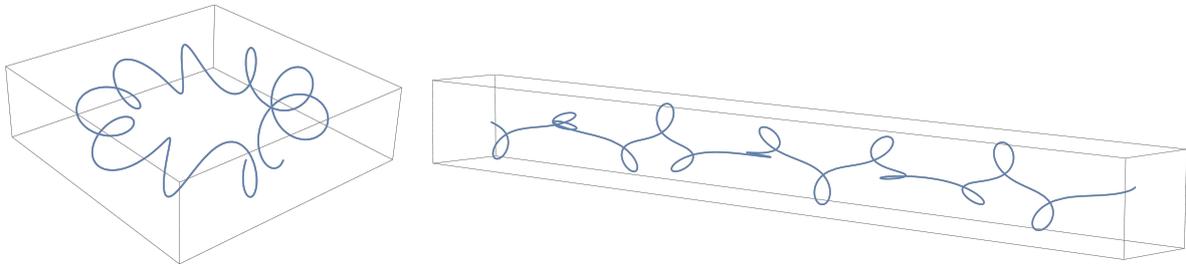


図 4 Kirchhoff 弾性棒の中心線の例. この中心線のまわりに物質を肉付けし, 中心線の形状を保ったまま物質だけを一定の速さで振ったものが Kirchhoff 弾性棒となる.

**注意 4.4** 定理 4.3 に関連して, いくつか補足事項を述べる.

1. 非初等的な Kirchhoff 弾性棒  $(\gamma, M)$  はすべて, 回転と平行移動の差を除き, 定理で述べた形に書けるはずだが, その厳密な証明は現在検討中である. また  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  は楕円テータ関数の計算をするには便利な定数だが, 幾何学的な観点からは必ずしも良い径数とはなっていない. 曲率の挙動や図形の相似性が容易くコントロールできるような径数に取り替えることは, 今後の検討課題である.

2. 証明中, 渦糸方程式と書いたのは曲線の時間発展方程式  $\dot{\gamma} = \gamma' \times \gamma''$  のことである. 弾性棒の中心線  $\gamma$  は渦糸方程式の進行波解, すなわち形を変えずに位置だけが変化する解となる. 木田 [32] は渦糸方程式の進行波解を楕円積分を用いて表し, 橋本-神戸 [33] はそれが弾性棒の中心線に一致することを示した.
3. 行列  $P$  の表示 (4.12) は, スカラー行列と交代行列

$$D = \begin{bmatrix} \Re\tau & 0 & 0 \\ 0 & \Re\tau & 0 \\ 0 & 0 & \Re\tau \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \Re\sigma & -\Im\sigma \\ -\Re\sigma & 0 & \Im\tau \\ \Im\sigma & -\Im\tau & 0 \end{bmatrix}$$

の Cayley 変換  $P = (D - S)(D + S)^{-1}$  であり, これは中心線  $\gamma$  の平行枠を与える. 実際,  $P$  の第一列目は速度  $T = \gamma'$  に一致し, かつ

$$k_1 - \sqrt{-1}k_2 = \frac{2D_s \bar{\sigma} \cdot \bar{\tau}}{|\tau|^2 + |\sigma|^2} = \frac{2(\bar{\sigma}' \bar{\tau} - \bar{\sigma} \bar{\tau}')}{|\tau|^2 + |\sigma|^2}$$

として微分方程式 (4.1) が成り立つ. 以下  $\alpha|_{t=0}$  を簡単に  $\alpha$  と書けば  $\alpha, \beta, \tau, \sigma$  は

$$|\tau|^2 + |\sigma|^2 = \alpha^2, \quad D_s \bar{\tau} \cdot \tau + D_s \bar{\sigma} \cdot \sigma = 0, \quad D_s \beta \cdot \alpha = \tau \bar{\sigma}$$

をみたすから, 特に

$$\rho = \frac{D_s \bar{\sigma} \cdot \bar{\tau}}{\alpha} = \frac{D_s \bar{\sigma} \cdot \alpha}{\tau} = \frac{D_s \alpha \cdot \bar{\tau}}{\sigma}$$

によって関数  $\rho$  が定義できる. このとき中心線  $\gamma$  の曲率  $\kappa$  と捩率  $\lambda$  は

$$\kappa = 2 \frac{|\rho|}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{d}{ds} \log \frac{\rho}{\bar{\rho}}$$

と表示でき [29, Proposition 3.5], これにより  $\gamma$  の Frenet 枠が (4.2) で与えられる.

4. 始めに与える定数を  $q = 0$  とする. このとき中心線  $\gamma$  は空間弾性曲線 ([34] 参照) となり, 物質枠  $M$  は  $\gamma$  の平行枠となる. 条件  $q = 0$  に加えて, さらに定数  $r$  を  $r \in y\mathbb{Z}$  または  $r \in y/2 + y\mathbb{Z} = \{y/2 + yn \mid n \in \mathbb{Z}\}$  とすると

$$(4.14a) \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 4p^2 \pi^2 \theta_3(0)^2 \theta_4(0)^2 \\ 0 \end{bmatrix} & r \in y\mathbb{Z}, \\ \begin{bmatrix} -p^2 \pi^2 (\theta_3(0)^2 - \theta_4(0)^2)^2 \\ (\theta_3(0)^2 + \theta_4(0)^2)^2 \end{bmatrix} & r \in y/2 + y\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(4.14b)$$

となる. どちらの場合にも  $c_2 = 0$  となり, したがって捩率は  $\lambda = 0$  だから, 中心線  $\gamma$  は平面弾性曲線となる. より詳しく言うと次のようになる.

(a) 定数が (4.14a) の場合.

このとき  $4p^2\pi^2c_4 - b_1^2 + 4q^2 = 0$  だから  $e_1$  が決まらないが,  $\lim_{c_4 \rightarrow 0} e_1 = \pi$  だから,  $e_1 = \pi$  と思うことにする. このとき  $E_1 = \omega/2$  となり, したがって  $\beta$  は純虚数値関数である. すなわち  $\beta = \sqrt{-1}\Im\beta$  だから, 中心線の明示公式 (4.11) は

$$\gamma(s) = \left[ \begin{array}{c} -s + 2(\partial/\partial t) \log \alpha \\ 0 \\ -2\sqrt{-1}\beta/\alpha \end{array} \right] \Big|_{t=0}$$

となる. また平方曲率の明示公式 (4.13) より曲率  $\kappa$  は零点を持ち, したがって  $\gamma$  は変曲点をもつ平面弾性曲線である. さらに  $B_1 = -2\pi p$  であること, および関係式  $\theta_{12}(\omega/2) = \sqrt{-1}\theta_{34}(0) \exp(-\sqrt{-1}\pi\omega/2)$  に注意し,  $\gamma$  を複素平面  $\mathbb{C}$  内の曲線と思って式を整理したものが Mumford の公式 (3.5) である. その際, 任意定数  $C_{10}$  の値は 0 としておく.

(b) 定数が (4.14b) の場合.

このとき  $b_1 = b_2 = e_1 = B_1 = 0$  だから  $\beta$  は実数値関数となる. 曲率  $\kappa$  には零点がなく, したがって  $\gamma$  は変曲点をもたない平面弾性曲線である.

5. 平面弾性曲線が単振り子と関係していたように, 弾性棒はこまの運動と密接に関わっている. ツイスト率  $\mu = q/a$  の Kirchhoff 弾性棒  $(\gamma, M)$  に対して  $\Xi = \gamma' \times \gamma'' + 2q\gamma'$  とおくと

$$\Xi = M \begin{bmatrix} 2q \\ \kappa_2 \\ \kappa_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 2q \\ -\kappa \sin \varphi \\ \kappa \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \int^s (\lambda - \mu) ds$$

であり

$$(4.15) \quad \Xi' = T \times w_1, \quad T' = \Xi \times T$$

が成り立つ. 一方で  $\Xi, T, w_1$  を物質枠  $M$  で展開したときの係数だけに注目して

$$[\xi, t, d] = M^{-1}[\Xi, T, w_1] = \begin{bmatrix} 2q & 1 & (1/2)\kappa^2 - c_3 \\ \kappa_2 & 0 & \kappa' \cos \varphi - (\lambda - 2q)\kappa \sin \varphi \\ \kappa_1 & 0 & \kappa' \sin \varphi + (\lambda - 2q)\kappa \cos \varphi \end{bmatrix}$$

とおくと

$$(4.16) \quad \xi' = \xi \times J^{-1}\xi + t \times d, \quad d' = d \times J^{-1}\xi, \quad J = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ. いったん弾性棒のことを忘れて, 微分方程式系 (4.16) は Lagrange のこまの運動を表しており, 固定点のまわりの主慣性モーメント  $J$  および固定点から

みた重心の位置  $-t$  をパラメータとして, 角速度  $J^{-1}\xi$  と方向余弦  $d$  が未知関数となる. 回転座標系での表示 (4.16) よりも静止座標系での表示 (4.15) のほうが簡単であることに注目して, Bobenko-Suris [15] は Lagrange のこまを離散化し, その副産物として第 6 節に述べる離散弾性棒が定義された.

6. 楕円テータ関数の周期格子を決める複素数  $\omega$  が純虚数の場合にも, 定理 4.3 で述べたのと同じような明示公式が構成できる. 弾性棒の明示公式としては [5] や [6] などが知られているが, Ivey-Singer [30] はこれらの表示を利用して周期的な弾性棒を分類し, 結び目型の決定を行っている. なお 3 次元球面  $S^3$  や双曲空間  $H^3$  の中でも Kirchhoff 弾性棒を考えることができ, 明示公式も構成できる [31].

## § 5. 離散曲線

写像  $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $n \mapsto \gamma_n$  の隣接頂点間の距離  $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$  は正の一定値  $l$  であるとし  $T_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n)/l$  とおく. どの番号  $n$  についても  $T_n \neq -T_{n-1}$  が成りたつとき,  $\gamma$  を離散曲線と呼ぶ. 離散曲線  $\gamma$  に対して式

$$\kappa_n = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{1 - \langle T_{n-1}, T_n \rangle}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle}}$$

により定まる数列  $\kappa$  を離散曲線  $\gamma$  の離散曲率という. ある番号  $m$  について  $\kappa_m \neq 0$  なら, その逆数  $1/\kappa_m$  は, 3 点  $\gamma_{m-1}, \gamma_m, \gamma_{m+1}$  を通る平面内において線分  $\gamma_{m-1}\gamma_m$  と線分  $\gamma_m\gamma_{m+1}$  にそれぞれその中点において接するような円の半径である. 数列  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow [0, \pi)$  を  $\cos \phi_n = \langle T_{n-1}, T_n \rangle$  で導入し, これを曲がり角と呼ぶ [35, p. 20]. 離散曲率は曲がり角を用いて  $\kappa_n = (2/l) \tan(\phi_n/2)$  と書ける. そこで頂点  $\gamma_n$  におけるローカルエネルギーを

$$\frac{2}{l} \int_0^{\phi_n} \tan \frac{\phi}{2} d\phi = -\frac{2}{l} \log \cos^2 \frac{\phi_n}{2} = \frac{2}{l} \log \left( 1 + \frac{l^2}{4} \kappa_n^2 \right)$$

と決め, その和分として離散曲線  $\gamma$  の弾性エネルギーを

$$\frac{2}{l} \sum_k \log \left( 1 + \frac{l^2}{4} \kappa_k^2 \right)$$

と定める. 次に, 離散曲線  $\gamma$  の平行枠を定義しよう. 零でないベクトル  $c$  に対し,  $c$  に直交して原点を通る平面を  $\langle c \rangle^\perp$  とし, 平面  $\langle c \rangle^\perp$  に関する鏡映変換を  $R_c$  と書く. すなわち  $v \in \mathbb{R}^3$  に対して

$$R_c(v) = v - 2 \frac{\langle v, c \rangle}{\langle c, c \rangle} c$$

とする. 鏡映変換の合成  $\Pi_n = R_{T_n+T_{n-1}} \circ R_{T_{n-1}}$  を, 離散曲線  $\gamma$  に沿った点  $\gamma_n$  での平行移動と呼ぶ. 離散曲線の平行枠  $P = [T, V^1, V^2]: \mathbb{Z} \rightarrow \text{SO}(3)$  は次のように定義され

る. まず点  $\gamma_0$  での枠  $P_0 = [T_0, V_0^1, V_0^2]$  を任意に与え, それ以外の番号  $n$  については順次  $P_n = [\Pi_n(T_{n-1}), \Pi_n(V_{n-1}^1), \Pi_n(V_{n-1}^2)]$  と定める. 平行移動  $\Pi_n$  によって, 点  $\gamma_{n-1}$  における法ベクトル (すなわち  $T_{n-1}$  に直交するベクトル) が点  $\gamma_n$  における法ベクトルに接続されており,  $\Pi_n$  はなめらかな曲線のときの法接続に関する平行移動と同様の役割を果たしている. なお,  $\phi_n \neq 0$  なる点において

$$B_n = \frac{T_{n-1} \times T_n}{|T_{n-1} \times T_n|}$$

と定めると

$$\Pi_n = \begin{cases} \text{恒等変換} & \phi_n = 0, \\ B_n \text{ を軸とする角 } \phi_n \text{ の回転} & \phi_n \neq 0 \end{cases}$$

と書ける. さらに  $N_n = B_n \times T_n$  とおき,  $\cos \nu_n = \langle B_{n-1}, B_n \rangle$ ,  $\sin \nu_n = -\langle N_{n-1}, B_n \rangle$  によって数列  $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$  を定め, これを捩れ角と呼ぶ. 正方行列  $F_n = [T_n, N_n, B_n]$  は  $\det F_n = 1$  をみたす直交行列であり, 写像  $F$  を Frenet 枠と呼ぶ. 行列  $F_{n-1}, F_n$  の関係は

$$(5.1) \quad F_n = F_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu_n - \sin \nu_n & \\ 0 & \sin \nu_n & \cos \nu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_n - \sin \phi_n & 0 \\ \sin \phi_n & \cos \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる [36]. 式 (5.1) は,  $F_{n-1}$  をまずベクトル  $T_{n-1}$  を軸にして角  $\nu_n$  だけ回転し, 次にベクトル  $-\sin \nu_n N_n + \cos \nu_n B_n$  を軸にして角  $\phi_n$  だけ回転すれば,  $F_n$  に重なることを主張しており, 離散曲線に対する Frenet-Serret の公式の役割を果たす. 行列  $F_{n-1}^{-1} F_n$  を Cayley 変換の形で

$$F_n = F_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & -f_n & g_n \\ f_n & 1 & -h_n \\ -g_n & h_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_n & -g_n \\ -f_n & 1 & h_n \\ g_n & -h_n & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

と表示すれば  $f_n = \tan(\phi_n/2)$ ,  $g_n = -f_n h_n$ ,  $h_n = \tan(\nu_n/2)$  である. この節の最後に, 平行枠と Frenet 枠の関係をみよう. 平行枠は差分方程式

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Lambda_n - \sin \Lambda_n & \\ 0 & \sin \Lambda_n & \cos \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_n - \sin \phi_n & 0 \\ \sin \phi_n & \cos \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Lambda_n & \sin \Lambda_n \\ 0 & -\sin \Lambda_n & \cos \Lambda_n \end{bmatrix} \\ &= P_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & -i_n & j_n \\ i_n & 1 & 0 \\ -j_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i_n & -j_n \\ -i_n & 1 & 0 \\ j_n & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

をみたす. ただし

$$i_n = \tan \frac{\phi_n}{2} \cos \Lambda_n, \quad j_n = -\tan \frac{\phi_n}{2} \sin \Lambda_n, \quad \Lambda_n - \Lambda_{n-1} = \nu_n$$

である. 離散曲線  $\gamma$  の Frenet 枠  $F$  と平行枠  $P$  の関係は

$$(5.2) \quad F_n = P_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Lambda_n & -\sin \Lambda_n \\ 0 & \sin \Lambda_n & \cos \Lambda_n \end{bmatrix}$$

である.

## § 6. 離散 Kirchhoff 弾性棒

離散曲線  $\gamma$  に沿った正規直交枠場  $M: \mathbb{Z} \rightarrow \text{SO}(3)$  で, その第 1 列目が  $M_n = [T_n, *, *]$  となっているものを  $\gamma$  に適合した正規直交枠場という. 以下, どの番号  $n$  についても  $\text{tr}(M_{n-1}^{-1}M_n) \neq -1$  であることを要請し, このとき組  $(\gamma, M)$  を枠付き離散曲線と呼ぶ. 枠付き離散曲線  $(\gamma, M)$  に対して, 行列  $M_{n-1}^{-1}M_n$  は Cayley 変換として

$$M_n = M_{n-1} \begin{bmatrix} 1 & -\zeta_n & \xi_n \\ \zeta_n & 1 & -\eta_n \\ -\xi_n & \eta_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \zeta_n & -\xi_n \\ -\zeta_n & 1 & \eta_n \\ \xi_n & -\eta_n & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

と表示できる. 成分  $\zeta_n, \xi_n, \eta_n$  を具体的に書けば,  $M_n = [T_n, M_n^1, M_n^2]$  として

$$\begin{bmatrix} \zeta_n \\ \xi_n \\ \eta_n \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle + \langle M_{n-1}^1, M_n^1 \rangle + \langle M_{n-1}^2, M_n^2 \rangle} \begin{bmatrix} \langle M_{n-1}^1, T_n \rangle - \langle T_{n-1}, M_n^1 \rangle \\ \langle T_{n-1}, M_n^2 \rangle - \langle M_{n-1}^2, T_n \rangle \\ \langle M_{n-1}^2, M_n^1 \rangle - \langle M_{n-1}^1, M_n^2 \rangle \end{bmatrix}$$

である. ここで

$$\kappa_n^1 = \frac{2}{l} \frac{\zeta_n}{\sqrt{1 + \eta_n^2}}, \quad \kappa_n^2 = \frac{2}{l} \frac{\xi_n}{\sqrt{1 + \eta_n^2}}, \quad \mu_n = \frac{2}{l} \eta_n$$

と定めると,  $(\kappa_n^1)^2 + (\kappa_n^2)^2 = (\kappa_n)^2$  となるから, 数列  $\mu$  が微分方程式 (4.3) に現れる関数  $\mu$  に対応するものと期待できる. そこでこの  $\mu_n$  を点  $\gamma_n$  における  $(\gamma, M)$  のツイスト率と呼ぶ. ツイスト率の幾何学的な意味は次のように理解できる. まず, 数列  $\epsilon: \mathbb{Z} \rightarrow (-\pi, \pi)$  が一意的に存在して, どの番号  $n$  についても

$$M_n = [\Pi_n(T_{n-1}), \Pi_n(M_{n-1}^1), \Pi_n(M_{n-1}^2)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon_n & -\sin \epsilon_n \\ 0 & \sin \epsilon_n & \cos \epsilon_n \end{bmatrix}$$

が成り立つ. 角  $\epsilon_n$  は平行移動との差を表す量だから, 点  $\gamma_n$  における  $(\gamma, M)$  のツイスト角と呼ぼう. このとき, ツイスト率はツイスト角を用いて  $\mu_n = (2/l) \tan(\epsilon_n/2)$  と書ける.

枠付き離散曲線  $(\gamma, M)$  と正の定数  $a$  に対して, エネルギーを

$$\mathcal{E}(\gamma, M) = \frac{2}{l} \sum_k \log \left( 1 + \frac{l^2}{4} \kappa_k^2 \right) + 2a \cdot \frac{2}{l} \sum_k \log \left( 1 + \frac{l^2}{4} \mu_k^2 \right)$$

と定める [15, 式 (6.27), (6.28)]. 端点と端点での枠  $M$  を固定した変分に関して  $\mathcal{E}$  の第一変分公式を計算し, Euler-Lagrange 方程式を導くと

$$(6.1) \quad \frac{2}{l} \frac{T_{n-1} \times T_n}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle} + 2a\mu_n \frac{T_{n-1} + T_n}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle} = \gamma_n \times w_1 + w_2,$$

$$(6.2) \quad \mu_{n+1} - \mu_n = 0$$

となる [15, 式 (6.22)].

**定義 6.1** 枠付き離散曲線  $(\gamma, M)$  と正の定数  $a$  に対して, 定ベクトル  $w_1, w_2$  が存在して差分方程式系 (6.1)–(6.2) が成りたつとき, 組  $(\gamma, M)$  をツイスト率  $\mu$  の離散 Kirchhoff 弾性棒, あるいは単に離散弾性棒といい,  $\gamma$  をその中心線,  $M$  を物質枠という. 定数  $a$  の値を明記したいときは  $(\gamma, M)$  のことを  $(\gamma, M; a)$  と書く.

離散直線, 離散円, 離散常螺旋, 離散孤立波形は, 初等関数を用いて記述できる離散 Kirchhoff 弾性棒の中心線である. 連続の場合と違って, このほかにもいくつか初等関数で書ける例外的な離散弾性棒が存在するが, 以下ではそのようなものをまとめて, 便宜的に, 初等的な離散 Kirchhoff 弾性棒と呼ぶことにし, これを除外して考える.

**命題 6.2** (中心線の和分表示) ツイスト率  $\mu$  の非初等的な離散 Kirchhoff 弾性棒  $(\gamma, M; a)$  に対して, 中心線  $\gamma$  の隣接頂点間の距離を  $l$  とし,  $q = a\mu$  および

$$\begin{aligned} \delta_n &= \cos \nu_n + ql \sin \nu_n, \\ c_1 &= |w_1|, \\ c_2 &= ((\sin \nu_n)/l - q \cos \nu_n) \kappa_n \kappa_{n-1}, \\ c_3 &= \kappa_n \kappa_{n-1} \delta_n / 2 - \langle T_{n-1}, w_1 \rangle \end{aligned}$$

とおく. 次のことが成りたつ.

(1)  $c_1, c_2, c_3$  はいずれも定数であり,  $c_1 \neq 0$  である.

(2) 中心線  $\gamma$  の Frenet 枠を  $[T, N, B]$  とすると

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa_n \kappa_{n-1} \delta_n - 2c_3}{2} T_{n-1} + \frac{\kappa_n \delta_n - \kappa_{n-1}}{l} N_{n-1} \\ &+ \frac{\kappa_n \sin \nu_n - ql(\kappa_n \cos \nu_n + \kappa_{n-1})}{l} B_{n-1} = w_1 \end{aligned}$$

が成りたつ. したがって離散曲率  $\kappa$  と振れ角  $\nu$  は差分方程式

$$\kappa_{n+1} \delta_{n+1} + \kappa_{n-1} \delta_n = (2 + c_3 l^2) \frac{\kappa_n}{1 + (l^2/4) \kappa_n^2}$$

をみたし, 平方離散曲率  $u_n = \kappa_n^2$  は差分方程式

$$(6.3) \quad (v_{n+1} + v_{n-1})v_n^2 = (6 + a_1 l^2)v_n - 4 - a_1 l^2 + a_2 l^2$$

をみたす. ただし  $v_n = 1 + (l^2/4)u_n$  および

$$a_1 = \frac{4(c_3 - q^2)}{1 + q^2 l^2} + \frac{l^2}{4} \left( \frac{4c_1^2 + 8qc_2 + c_2^2 l^2}{2(1 + q^2 l^2)} + \frac{2c_3^2}{1 + q^2 l^2} \right),$$

$$a_2 = \frac{l^2}{4} \left( \frac{4c_1^2 + 8qc_2 + c_2^2 l^2}{2(1 + q^2 l^2)} - \frac{2c_3^2}{1 + q^2 l^2} \right)$$

である.

(3) もし  $2 + c_3 l^2 \neq 0$  ならば, 中心線  $\gamma$  の捩れ角  $\nu$  は離散曲率  $\kappa$  から決まり

$$(6.4) \quad \begin{bmatrix} \cos \nu_n \\ \sin \nu_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_n \kappa_{n-1}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2 + c_3 l^2} & -\frac{ql}{1 + q^2 l^2} \\ \frac{ql}{2 + c_3 l^2} & \frac{1}{1 + q^2 l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ lc_2 \end{bmatrix}$$

である. ただし  $U_n = (l^2/4)u_n u_{n-1} + u_n + u_{n-1} - 2a_2$ .

(4) 中心線  $\gamma$  は, 回転と平行移動の差を除いて

$$(6.5) \quad \gamma_n = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} -c_3 l n + (l/2) \sum_k^n \kappa_k \kappa_{k-1} \delta_k \\ -\sqrt{(1 + q^2 l^2)u_n - b_1^2 + 4q^2 \cos \sum_k^n s_k} \\ -\sqrt{(1 + q^2 l^2)u_n - b_1^2 + 4q^2 \sin \sum_k^n s_k} \end{bmatrix},$$

$$s_k = \arctan \left( \frac{b_1 l}{2} + \frac{l(b_2 - qc_2 b_1 l^2)}{2(\kappa_k \kappa_{k-1} \delta_k - b_1^2 + 4q^2 + qc_2 l^2)} \right)$$

と和分表示できる. ただし

$$(6.6) \quad b_1 = \frac{c_2 - 2qc_3}{c_1}, \quad b_2 = b_1(b_1^2 - 2c_3) - 4q(c_1 + qb_1)$$

である. またこのとき  $w_1 = \llbracket c_1, 0, 0 \rrbracket$ ,  $w_2 = \llbracket b_1, 0, 0 \rrbracket$  であり, 中心線の接ベクトルは

$$(6.7) \quad T_n = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} \chi_n \\ -\sqrt{c_1^2 - \chi_n^2} \cos \sum_k^n t_k \\ -\sqrt{c_1^2 - \chi_n^2} \sin \sum_k^n t_k \end{bmatrix},$$

$$\chi_n = \frac{\kappa_{n+1} \kappa_n \delta_{n+1}}{2} - c_3,$$

$$t_k = \arctan \frac{c_1 l (c_2 - qu_k)}{c_1^2 (1 - (l^2/4)u_k) - \chi_k \chi_{k-1} (1 + (l^2/4)u_k)}$$

と和分表示できる.

命題 6.2 を命題 4.2 と比較すると、平方曲率の離散化として  $\kappa_n^2$  と  $\kappa_n \kappa_{n-1}$  の 2 つが混在しており、さらに  $\kappa_{n+1}$ ,  $\kappa_n$ ,  $\kappa_{n-1}$  についての 4 次式まで登場しているのがわかる。このせいで明示公式を導出するときの計算が複雑になるが、結果として次の定理を得る。

**定理 6.3** (離散 Kirchhoff 弾性棒の明示公式) 条件  $y > 0$  かつ  $p \notin (1/4)\mathbb{Z}$  かつ  $a > 0$  かつ  $l > 0$  をみたす定数  $(x, y, p, q, r, a, l) \in \mathbb{R}^7$  を任意に固定し、 $\omega = 1/2 + \sqrt{-1}y$  とおく。楕円テータ関数の周期格子を  $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$  とし、記号  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{34}$ ,  $\Theta$  を (2.1) の意味で用いる。正の定数  $c_1$  と実定数  $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  を

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{4}{l^2} \frac{\Theta(\sqrt{-1}r)^2 \Theta(p)^2}{1 - \Theta(\sqrt{-1}r)^2 \Theta(p)^2}, \\ c_5 &= \frac{\sqrt{1 + q^2 l^2} \sqrt{c_6 + 4/l^2}}{2\theta_2(0)^2} \Theta(p), \\ c_4 &= \theta_2(0)^4 \Theta(\sqrt{-1}r)^2, \\ c_3 &= -\frac{2}{l^2} + c_5 l \left( c_6 + \frac{4}{l^2} \right) \frac{\theta_{34}(0) \theta_3(p)^4 - \theta_4(p)^4}{\theta_2(0)^3 \theta_1(2p)}, \\ c_2^2 &= \frac{-16(1 + q^2 l^2) \Theta(p)^6 c_4 \left( c_4 - (\theta_3(0)^2 + \theta_4(0)^2)^2 \right) \left( c_4 - (\theta_3(0)^2 - \theta_4(0)^2)^2 \right)}{l^6 \theta_2(0)^{12} \left( 1 - \Theta(\sqrt{-1}r)^2 \Theta(p)^2 \right)^3}, \\ c_1^2 &= \frac{3}{l^2} c_6 (1 + q^2 l^2) - \frac{8c_5^2}{l^2} \left( \theta_3(0)^4 + \theta_4(0)^4 \right) - 2qc_2 - \frac{4}{l^2} c_3 + \frac{4}{l^2} q^2 \end{aligned}$$

と決めて (ただし  $c_4, c_5$  は式を短く書く目的で導入したものであり、大切な定数は  $c_1, c_2, c_3, c_6$  の 4 つである), さらに  $b_1$  と  $b_2$  を (6.6) で決める。このとき、次のことが成り立つ。

(1) 複素定数  $E_1$  と実定数  $A_0, A_1, B_0, B_1$  を

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{4\pi\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2} \int_0^{e_1} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (k')^2 \sin^2 \phi}}, \quad k' = \frac{\theta_4(0, 2\sqrt{-1}y)^2}{\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2}, \\ e_1 &= -2 \arctan \left( \frac{1}{4c_5\theta_{34}(0)} \frac{b_2 - l^2 q c_2 b_1}{(1 + q^2 l^2) c_6 - b_1^2 + 4q^2} \right), \\ A_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{c_1 l^2} - \frac{c_5}{c_1 l} \left( \frac{\theta_2(0)^2}{\Theta(p)} + \frac{2\theta_2'(p)}{\pi\theta_2(p)} \right), \\ A_1^2 &= \frac{c_5^2}{\pi^2 c_1^2 l^2} \frac{\theta_1'(0)^2 \theta_2(0)^2}{\theta_{12}(E_1)^2}, \\ B_0 &= \frac{c_5}{\pi c_1 l}, \\ B_1 &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left( -\frac{c_7 - \sqrt{-1}c_8}{c_7 + \sqrt{-1}c_8} \frac{\theta_{34}(p + E_1)}{\theta_{34}(p - E_1)} \right), \end{aligned}$$

$$c_7 = 2l(c_6 - 2c_3)b_1 - 2l^3 \left( c_6 + \frac{4}{l^2} \right) qc_1,$$

$$c_8 = 2c_6(2 + c_3l^2) + l^2 \left( c_6 + \frac{4}{l^2} \right) (-b_1^2 + 4q^2 + qc_2l^2)$$

と決め, 整数  $n$  に対して

$$(6.8) \quad \gamma_n = \left[ \begin{array}{c} -ln + 2l(\partial/\partial t) \log \alpha_n \\ 2l \Re \beta_n / \alpha_n \\ 2l \Im \beta_n / \alpha_n \end{array} \right] \Bigg|_{t=0},$$

$$\alpha_n = \exp(A_0nt) \theta_{34}(pn - x + B_0t),$$

$$\beta_n = A_1 \exp(\sqrt{-1}(B_1n + C_1)) \theta_{34}(pn - x - E_1)$$

とおく. ただし  $C_1$  は任意実定数. このとき  $\gamma$  は隣接頂点間の距離が  $l$  の離散曲線で, その平方離散曲率  $u$  は

$$u_n = \frac{4}{l^2} \left( \frac{1 - \Theta(p)^2 \Theta(pn - x)^2}{1 - \Theta(p)^2 \Theta(\sqrt{-1}r)^2} - 1 \right)$$

であり, 差分方程式 (6.3) をみたく. 振れ角  $\nu$  は (6.4) で与えられる.

(2) 番号  $j = 2, 3$  について, 適当な実定数  $e_j$  を用いて複素定数  $E_j$  を

$$E_j = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{4\pi\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2} \int_0^{e_j} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \phi}}, \quad k' = \frac{\theta_4(0, 2\sqrt{-1}y)^2}{\theta_3(0, 2\sqrt{-1}y)^2}$$

と表示し, さらに残りの定数を

$$A_2^2 = \frac{\theta_{34}(p/2 + E_3)\theta_{34}(p/2 - E_3)}{\theta_{34}(E_2 + E_3)\theta_{34}(E_2 - E_3)},$$

$$A_3^2 = \frac{-\sqrt{-1}\theta_{12}(E_2 + p/2)\theta_{12}(E_2 - p/2)}{\theta_{34}(E_2 + E_3)\theta_{34}(E_2 - E_3)},$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{\theta_{34}(E_3 + p/2)\theta_{34}(E_2 - E_3)}{\theta_{34}(E_3 - p/2)\theta_{34}(E_2 - E_3 - p)},$$

$$B_3 = -\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{\theta_{12}(E_2 - p/2)\theta_{34}(E_2 - E_3)}{\theta_{12}(E_2 + p/2)\theta_{34}(E_2 - E_3 - p)}$$

と決め

$$(6.9) \quad P_n = \frac{1}{|\tau_n|^2 + |\sigma_n|^2} \left[ \begin{array}{cc} |\tau_n|^2 - |\sigma_n|^2 & -2\Re(\tau_n\sigma_n) & 2\Im(\tau_n\sigma_n) \\ 2\Re(\tau_n\bar{\sigma}_n) & \Re(\tau_n^2 - \sigma_n^2) & -\Im(\tau_n^2 - \sigma_n^2) \\ 2\Im(\tau_n\bar{\sigma}_n) & \Im(\tau_n^2 + \sigma_n^2) & \Re(\tau_n^2 + \sigma_n^2) \end{array} \right],$$

$$\tau_n = A_2 \exp(\sqrt{-1}(B_2n + C_2)) \theta_{34}(p(n + 1/2) - x - E_2),$$

$$\bar{\sigma}_n = A_3 \exp(\sqrt{-1}(B_3n + C_3)) \theta_{12}(p(n + 1/2) - x - E_3)$$

および

$$M_n = P_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varrho_n & -\sin \varrho_n \\ 0 & \sin \varrho_n & \cos \varrho_n \end{bmatrix}, \quad \varrho_n = 2n \arctan \frac{ql}{2a}$$

とおく. ただし  $\bar{\sigma}_n$  は  $\sigma_n$  の共役複素数である. このとき, 実定数  $e_2, e_3, C_2, C_3$  をうまく選ぶことにより, 組  $(\gamma, M)$  をツイスト率  $q/a$  の離散 Kirchhoff 弾性棒にできる.

**証明** まず平面離散弾性曲線の曲率の表示をヒントにして, 平方離散曲率を求める. 次に離散渦糸方程式の多重ソリトン解による明示公式 [29, 式 (3.22), (3.1)–(3.3)] に基づいて  $\gamma, P$  の表示をそれぞれ (6.8), (6.9) と決める. あとは (6.8) を (6.5) と比較し, 同様に (6.9) の第一列目と (6.7) を比較することで数列  $\alpha, \beta, \tau, \sigma$  が決まる.  $\square$

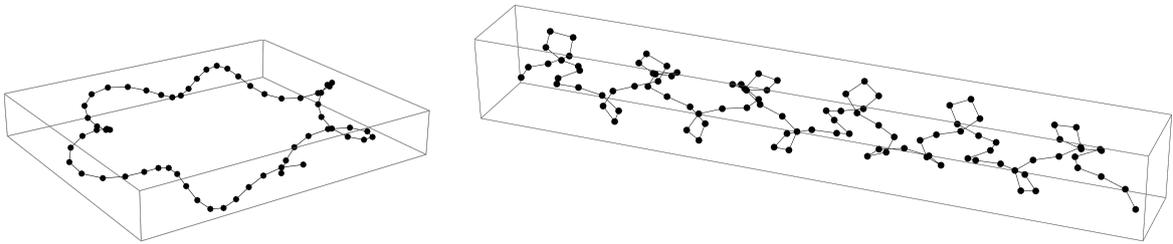


図 5 離散 Kirchhoff 弾性棒の中心線の例. この中心線に物質枠を付与したものが離散 Kirchhoff 弾性棒となる.

**注意 6.4** 定理 6.3 に関連して, いくつか補足事項を述べる.

- 現時点では実定数  $e_2, e_3$  を陽に表示することができていないため, 定理はやや歯切れの悪い主張の仕方になっている. また注意 4.4 の 1 で述べたのと同じように, 定理 6.3 の明示公式でどのくらいたくさんの離散 Kirchhoff 弾性棒が作れているのか調べることも, および, 定数  $(c_1, c_2, c_3, c_6)$  を幾何学的なものに取り替えて離散弾性棒の形状をもっとコントロールしやすくすること, の二点も今後の検討課題である.
- $\alpha|_{t=0}$  のことを簡単に  $\alpha$  と書くと,  $\alpha, \beta, \tau, \sigma$  は

$$|\tau_n|^2 + |\sigma_n|^2 = \alpha_{n+1}\alpha_n, \quad \tau_n\bar{\tau}_{n-1} + \sigma_n\bar{\sigma}_{n-1} = \alpha_n^2, \quad \beta_{n+1}\alpha_n - \beta_n\alpha_{n+1} = \tau_n\bar{\sigma}_n$$

をみたすから, 特に

$$\rho_n = \frac{\bar{\sigma}_n\bar{\tau}_{n-1} - \bar{\sigma}_{n-1}\bar{\tau}_n}{\alpha_n} = \frac{\bar{\sigma}_n\alpha_n - \bar{\sigma}_{n-1}\alpha_{n+1}}{\tau_n} = \frac{\alpha_{n+1}\bar{\tau}_{n-1} - \alpha_n\bar{\tau}_n}{\sigma_n}$$

によって数列  $\rho$  が定義できる. このとき中心線  $\gamma$  の曲がり角  $\phi$  と捩れ角  $\nu$  は

$$\phi_n = 2 \arctan \frac{|\rho_n|}{\alpha_n}, \quad \nu_n = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\rho_n\bar{\rho}_{n-1}}{\rho_n\bar{\rho}_{n-1}}$$

と表示でき [29, Proposition 3.9], これにより  $\gamma$  の Frenet 枠が (5.2) で与えられる.

3. はじめに与える定数を  $q = 0$  かつ  $r \in y\mathbb{Z} \cup (y/2 + y\mathbb{Z})$  と選べば, 中心線の明示公式 (6.8) は平面離散弾性曲線の明示公式 [25] を与える.
4. 平面離散弾性曲線が離散単振り子と関係していたように, 離散弾性棒は離散的な Lagrange のこまと密接に関わっている. すなわち, 離散弾性棒の差分方程式から, 離散的な Lagrange のこまの差分方程式が得られる. まず静止座標系での離散化は

$$\Xi_n = \frac{2}{l} \frac{T_{n-1} \times T_n}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle} + 2q \frac{T_{n-1} + T_n}{1 + \langle T_{n-1}, T_n \rangle}$$

とにおいて

$$\frac{\Xi_{n+1} - \Xi_n}{l} = T_n \times w_1, \quad \frac{T_n - T_{n-1}}{l} = \Xi_n \times \frac{T_n + T_{n-1}}{2}$$

となる [15, 式 (5.5)]. 回転座標系で離散化するには  $[\xi_n, t, d_n] = M_n^{-1}[\Xi_n, T_n, w_1]$  とにおいて, 3つのベクトル  $\xi_n, t, d_n$  がみたす差分方程式を書けばよい [15, 式 (5.25)].

## 参考文献

- [1] Paul Heinrich Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle. Tome II*, Académie impériale des Sciences, Saint-Pétersbourg, 1843.
- [2] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638–1788*, Leonhardi Euleri Opera Omnia (Series Secunda, Opera Mechanica et Astronomica), Vol. XI, sectio secunda, Orell Füssli, Zürich, 1960.
- [3] G. R. Kirchhoff, *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes*, J. Reine Angew. Math. **56** (1859), 285–313.
- [4] Hideo Tsuru, *Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan **56** (1987), 2309–2324.
- [5] Yaoming Shi and John E. Hearst, *The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling*, J. Chem. Phys. **101** (1994), 5186–5200.
- [6] Joel Langer and David A. Singer, *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*, SIAM Rev. **38** (1996), 605–618.
- [7] Michael A. Malcolm, *On the computation of nonlinear spline functions*, SIAM J. Numer. Anal. **14** (1977), 254–282.
- [8] John A. Edwards, *Exact equations of the nonlinear spline*, ACM Trans. Math. Software, **18** (1992), 174–192.
- [9] Jonas Spillmann and Matthias Teschner, *CoRdE: Cosserat rod elements for the dynamic simulation of one-dimensional elastic objects*, Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, 2007, 63–72.
- [10] Jonas Spillmann and Matthias Teschner, *An adaptive contact model for the robust simulation of knots*, Computer Graphics Forum **27** (2008), 497–506.

- [11] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris, *Discrete differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 98, American Mathematical Society, 2008.
- [12] Miklós Bergou, Max Wardetzky, Stephen Robinson, Basile Audoly and Eitan Grinspun, *Discrete elastic rods*, ACM SIGGRAPH 2008 Papers, Article Number 63, 12 pages.
- [13] Miklós Bergou, Basile Audoly, Etienne Vouga, Max Wardetzky and Eitan Grinspun, *Discrete viscous threads*, ACM SIGGRAPH 2010 Papers, Article Number 116, 10 pages.
- [14] B. Audoly, N. Clauvelin, P.-T. Brun, M. Bergou, E. Grinspun and M. Wardetzky, *A discrete geometric approach for simulating the dynamics of thin viscous threads*, J. Comput. Phys. **253** (2013), 18–49.
- [15] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris, *Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), 147–188.
- [16] 安藤四郎, 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版, 1970.
- [17] 武部尚志, 楕円積分と楕円関数, 日本評論社, 2019.
- [18] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1996, Reprint of the fourth (1927) edition.
- [19] S. Kharchev and A. Zabrodin, *Theta vocabulary I*, J. Geom. Phys. **94** (2015), 19–31.
- [20] 小磯憲史, 変分問題, 共立出版, 1998.
- [21] Peter A. Djondjorov, Mariana Ts. Hadzhilazova, Ivailo M. Mladenov, and Vassil M. Vassilev, *Explicit parameterization of Euler’s elastica*, Geometry, integrability and quantization, Softex, Sofia, 2008, pp. 175–186.
- [22] Joel Langer and David A. Singer, *Knotted elastic curves in  $\mathbf{R}^3$* , J. London Math. Soc. (2), **30** (1984), 512–520.
- [23] Shigeki Matsutani, *Euler’s elastica and beyond*, J. Geom. Symmetry Phys. **17** (2010), 45–86.
- [24] David Mumford, *Elastica and computer vision*, Algebraic geometry and its applications (West Lafayette, IN, 1990), Springer, New York, 1994, 491–506.
- [25] Nozomu Matsuura, *Explicit formula for planar discrete elasticae*, preprint.
- [26] G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts, and C. J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations. II*, Phys. D **34** (1989), no. 1-2, 183–192.
- [27] Kanato Hisano and Nozomu Matsuura, *Discrete pendulum equation*, preprint.
- [28] Richard L. Bishop, *There is more than one way to frame a curve*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 246–251.
- [29] Sampei Hirose, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura and Yasuhiro Ohta, *Discrete local induction equation*, J. Integrable Syst., **4** (2019), no. 1, xyz003, 43.
- [30] Thomas A. Ivey and David A. Singer, *Knot types, homotopies and stability of closed elastic rods*, Proc. London Math. Soc. (3), **79** (1999), no. 2, 429–450.
- [31] Satoshi Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in three-dimensional space forms*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), 551–582.
- [32] Shigeo Kida, *A vortex filament moving without change of form*, J. Fluid Mech., **112** (1981), 397–409.
- [33] Hidenori Hasimoto and Tsutomu Kambe, *Simulation of invariant shapes of a vortex filament with an elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan, **54** (1985), no. 1, 5–7.
- [34] 小磯憲史, 自然な曲線—ピアノ線の数学—, 数理科学 **409** (1997), 21–27.
- [35] Robert Sauer, *Differenzgeometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [36] Henry Eyring, *The Resultant Electric Moment of Complex Molecules*, Phys. Rev. **39** (1932), 746–748.