RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B91 (2023), 045–068

一般化超幾何微分方程式 ${}_3E_2$ の $x=1$ における正則解
Holomorphic solutions at unit argument of generalized hypergeometric equation ${}_3E_2$

By

蛭子 彰仁
Akihito Ebisu*

Abstract

For the generalized hypergeometric equation ${}_3E_2(a_0, a_1, a_2; b_1, b_2; x)$ with $b_1+b_2-a_0-a_1-a_2 \notin \mathbb{Z}$, we give two power series solutions about $x = 1$ with coefficients in $\mathbb{C}(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2)$ explicitly. These solutions span the space of holomorphic solutions around $x = 1$ of that equation.

§ 1. ${}_3E_2(\boldsymbol{a}; x)$ の復習：$x = 0, \infty$ における局所解

複素パラメータ $\boldsymbol{a} := (a_0, a_1, a_2; b_1, b_2)$ に対し，一般化超幾何関数 ${}_3F_2(\boldsymbol{a}; x)$ は

$$ {}_3F_2(\boldsymbol{a}; x) := {}_3F_2\left(\begin{matrix} a_0, a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix}; x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_0)_n (a_1)_n (a_2)_n}{(b_1)_n (b_2)_n} \frac{x^n}{n!} $$

と定められる．ここで，$(\alpha)_n$ は Pochhammer 記号と呼ばれるもので，

$$ (\alpha)_n := \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & \text{if} \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 1 & \text{if} \quad n = 0 \end{cases} $$

を意味する．この級数 ${}_3F_2(\boldsymbol{a}; x)$ は $|x| < 1$ において収束し，更に $\mathrm{Re}(s) > 0$（ここで，$s := b_1 + b_2 - a_0 - a_1 - a_2$）であるならば $x = 1$ においても収束することが知られてい

Received March 22, 2022. Revised July 22, 2022.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 33C20
Key Words: 一般化超幾何微分方程式，級数解，一般化超幾何関数，隣接関係式
本研究は JSPS 科研費 18K13428 の助成を受けたものです.
*275-0023 千葉県習志野市芝園 2-1-1 千葉工業大学 情報科学部教育センター
Faculty of Information and Computer Science, Chiba Institute of Technology 2-1-1, Shibazono, Narashino, Chiba, 275-0023, Japan.
e-mail: akihito.ebisu@p.chibakoudai.jp

る．さて，この関数は今となっては標準的なものであるが，議論する際はむしろこれを定数倍した，

$$
{}_3f_2(\boldsymbol{a};x) := \frac{\Gamma(a_0)\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} a_0, a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_0+n)\Gamma(a_1+n)\Gamma(a_2+n)}{\Gamma(b_1+n)\Gamma(b_2+n)} \frac{x^n}{n!} \tag{1}
$$

を用いるほうが便利なこともある．そこで，本稿では ${}_3f_2(\boldsymbol{a};x)$ を採用することにしよう．

一般化超幾何関数 ${}_3f_2(\boldsymbol{a};x)$ は，その級数の一般項を見ることで，**一般化超幾何微分方程式**

$$
{}_3E_2(\boldsymbol{a};x) \,:\, {}_3L_2(\boldsymbol{a};x)y = 0 \tag{2}
$$

を満たすことが容易に確かめられる．ここで，

$$
{}_3L_2(\boldsymbol{a};x) := (\vartheta+a_0)(\vartheta+a_1)(\vartheta+a_2) - (\vartheta+b_1)(\vartheta+b_2)(\vartheta+1)x^{-1} \tag{3}
$$

（但し，$\vartheta := x\partial := x\,d/dx$）である．本題に入る前に，今節と次節で，この微分方程式 (2) について基本的な事柄を復習しておこう．

復習 1.1　微分作用素 (3) を ∂ で展開することにより，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ は

$$
\Big[x^2(x-1)\partial^3 + \big\{(a_0+a_1+a_2+3)x^2 - (b_1+b_2+1)x\big\}\partial^2 + \big\{(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0+a_0+a_1+a_2+1)x - b_1b_2\big\}\partial + a_0a_1a_2\Big]y = 0 \tag{4}
$$

と表される．このことから，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ は，$x=0,1,\infty$ を確定特異点に持つ $\mathbb{C}(x)$ 係数 3 階線形微分方程式であることが分かる．

復習 1.2　${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の各特異点における特性指数は次の表に纏められる（Riemann 表）：

$$
\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & a_0 \\ 1-b_1 & 1 & a_1 \\ 1-b_2 & s & a_2 \end{matrix}\right\}. \qquad \text{（ここで，}s = b_1+b_2-a_0-a_1-a_2\text{）} \tag{5}
$$

復習 1.3　$x=0$ における特性指数 0 に対応した解として，${}_3f_2(\boldsymbol{a};x)$ が得られていた．これと，Riemann 表 (5) の対称性とを組合わせることで，$x=0,\,\infty$ における各特性指数

に対応した解が構成できる：

$$
\begin{aligned}
&y_0(\boldsymbol{a};x) := {}_3f_2(\tau_0(\boldsymbol{a});x), \\
&y_j(\boldsymbol{a};x) := x^{1-b_j}\,{}_3f_2(\tau_j(\boldsymbol{a});x) && (j=1,\ 2), \\
&y_{i+3}(\boldsymbol{a};x) := e^{\sqrt{-1}\pi\, s}x^{-a_i}\,{}_3f_2(\sigma_i(\boldsymbol{a});x^{-1}) && (i=0,\ 1,\ 2).
\end{aligned}
$$

ここで，$\tau_0(\boldsymbol{a}) := \begin{pmatrix} a_0,\ a_1,\ a_2 \\ b_1,\ b_2 \end{pmatrix}$,

$$
\tau_1(\boldsymbol{a}) := \begin{pmatrix} a_0+1-b_1,\ a_1+1-b_1,\ a_2+1-b_1 \\ 2-b_1,\ b_2+1-b_1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2(\boldsymbol{a}) := \tau_1(\boldsymbol{a})|_{b_1 \leftrightarrow b_2},
$$

$$
\sigma_0(\boldsymbol{a}) := \begin{pmatrix} a_0,\ a_0+1-b_1,\ a_0+1-b_2 \\ a_0+1-a_1,\ a_0+1-a_2 \end{pmatrix},
$$

$$
\sigma_1(\boldsymbol{a}) := \sigma_0(\boldsymbol{a})|_{a_0 \leftrightarrow a_1}, \qquad \sigma_2(\boldsymbol{a}) := \sigma_0(\boldsymbol{a})|_{a_0 \leftrightarrow a_2}
$$

である．このとき，$_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の解空間を $_3S_2(\boldsymbol{a};x)$ と書くことにすると，一般に

$$
{}_3S_2(\boldsymbol{a};x) = \langle y_i(\boldsymbol{a};x)\rangle_{i=0,1,2} = \langle y_i(\boldsymbol{a};x)\rangle_{i=3,4,5}
$$

が成り立つ．

注意 1.4 $y_i(\boldsymbol{a};x)$ $(i=3,4,5)$ において，因子 $e^{\sqrt{-1}\pi\, s}$ は微分方程式 $_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の解であることに影響を与えない．しかし，後に $y_i(\boldsymbol{a};x)$ の隣接関係式を論じる際，その因子は重要な役割を果たす（補題 4.7, 4.8 参照）．

§ 2. $_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の復習：$x=1$ における局所解

前節で，$_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ について簡単に復習した．ここで注目すべきは，$_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の $x=0$, ∞ における各特性指数に対応した解が $_3f_2$ を用いて容易に表せたこととは対照的に，$x=1$ における各特性指数に対応した解を閉形式で表すことは難しいことにある．これは，$x=1$ の特異点の情報 (スペクトル型) が $x=0, \infty$ のそれと異なることに依る．そこで，$x=1$ 近傍における級数解を調べるために，Frobenius の方法を適用しよう．結果，もし級数

$$
\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(\lambda)}(n)\cdot(1-x)^{\lambda+n} \qquad （ここで，\lambda \in \{0,1,s\}） \tag{6}
$$

が ${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の解であるならば，この級数の係数 $\{Q^{(\lambda)}(n)\}$ は，n に関する線形差分方程式

$$T^{(\lambda)}(n)\ :\quad \begin{aligned}&(\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n+a_0+a_1+a_2-b_1-b_2)\cdot Q(n)\\&=(\lambda+n-1)\{(\lambda+n-2)(2\lambda+2n-1-b_1-b_2+2a_0+2a_1+2a_2)\\&\qquad\qquad -b_1b_2+a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0+a_0+a_1+a_2+1\}\cdot Q(n-1)\\&-(\lambda+n-2+a_0)(\lambda+n-2+a_1)(\lambda+n-2+a_2)\cdot Q(n-2),\\&\text{但し，}\ Q(-1)=0,\ Q(-2)=0\end{aligned}$$

を満たすことが確かめられる（例えば，[1] の (3.3) 参照）．逆に，良く知られているように，この差分方程式の解 $\{Q^{(\lambda)}(n)\}$ を係数に持つ級数 (6) は ${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ を満たす．

注意 2.1　仮定

$$s \notin \mathbb{Z} \tag{7}$$

の下，差分方程式 $T^{(1)}(n), T^{(s)}(n)$ には，初期条件 $Q(0)=1$ を満たす解が唯一つ存在する．一方で，差分方程式 $T^{(0)}(n)$ は，初期条件 $Q(0)=\alpha, Q(1)=\beta$ を与えて初めて解が唯一定まる．

以上のことに注意しつつ，$T^{(\lambda)}(n)$ について調べることで次を得る：

定義 2.2　${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x) := \{{}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の $\{x\in\mathbb{C}\,|\,|x-1|<1\}$ 上正則な解 $\}$.

補題 2.3（[5] の 4.2 節参照）　式 (7) を仮定する．このとき，${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ は，$\mathbb{C}$ 上の 2 次元線形空間である．

補題 2.4　式 (7) を仮定する．このとき，線形差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な解 $\{Q_0^{(0)}(n)\}, \{Q_1^{(0)}(n)\}$ から定まる級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_0^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_1^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n$$

は，${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ の基底を成す．また，これらの 1 次結合として，$x=1$ における特性指数 1 に対応した解

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(1)}(n)\cdot(1-x)^{1+n}$$

が構成出来る．

以上のことは容易に分かるが，明示的に $Q^{(\lambda)}(n)$ を書き下すとなると，$T^{(\lambda)}(n)$ を解かなければならないために困難が生じる．その困難を放っておくことも可能であるが，一方で ${}_3F_2(\boldsymbol{a};x)$ の $x\to1$ での振る舞いや，（特別な状況下での）${}_3F_2(\boldsymbol{a};1)$ の閉形式を知ることは応用上重要となる．このため，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の $x=1$ における局所解の構成がこれまで試みられてきた．それら主要な結果を見ていこう：

定理 2.5 （Bühring [1] の定理 1 参照） 式 (7) を仮定する．

$$Q_2^{(0)}(n) := \frac{(a_0)_n(a_1)_n}{(1-s)_n n!}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} b_1-a_2, b_2-a_2, s-n \\ a_0+s, a_1+s \end{matrix};1\right),$$
$$Q^{(s)}(n) := \frac{(a_0+s)_n(a_1+s)_n}{(1+s)_n n!}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} b_1-a_2, b_2-a_2, -n \\ a_0+s, a_1+s \end{matrix};1\right)$$

と置いたとき，以下が成り立つ：

(i) $\{Q_2^{(0)}(n)\}$, $\{Q^{(s)}(n)\}$ はそれぞれ $T^{(0)}(n)$, $T^{(s)}(n)$ を満たす．すなわち，

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_2^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(s)}(n)\cdot(1-x)^{s+n}$$

はそれぞれ，$x=1$ における特性指数 0, s に対応した解となる．

(ii) （接続公式）

$$\begin{aligned} {}_3f_2(\boldsymbol{a};x) &= \frac{\Gamma(a_0)\Gamma(a_1)\Gamma(s)}{\Gamma(a_0+s)\Gamma(a_1+s)} \sum_{n=0}^{\infty} Q_2^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n \\ &\quad + \Gamma(-s)\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(s)}(n)\cdot(1-x)^{s+n} \end{aligned}$$

が成り立つ[1]．

注意 2.6 今，$Q^{(s)}(0)=1$ であるから，$x=1$ における特性指数 s に対応した解 $\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(s)}(n)\cdot(1-x)^{s+n}$ は，正規化されたものとなっている．一方で，$Q_2^{(0)}(0)\neq 1$ であることに注意しなければならない．

定理 2.7 （Nørlund [10] の式 (5.35), 及び 340 頁参照） 式 (7) を仮定する．

$$\begin{aligned} Q_3^{(0)}(n) &:= \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{(b_1)_n(1-s)_n n!}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} b_1-a_0, b_1-a_1, b_1-a_2 \\ b_1+n, b_1+1-b_2 \end{matrix};1\right), \\ Q_4^{(0)}(n) &:= \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{(b_2)_n(1-s)_n n!}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} b_2-a_0, b_2-a_1, b_2-a_2 \\ b_2+n, b_2+1-b_1 \end{matrix};1\right) \end{aligned} \tag{8}$$

と置いたとき，$\{Q_3^{(0)}(n)\}$, $\{Q_4^{(0)}(n)\}$ は共に $T^{(0)}(n)$ を満たす．すなわち，

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_i^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n \qquad (i=3,4)$$

は，$x=1$ における特性指数 0 に対応した解となる．

[1] 他の接続公式については，三町 [9]，岸本・野海 [8] を参照せよ．

注意 2.8　文献 [1] や [10] では言及されていないが，一般には，

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_i^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n \qquad (i=2,3,4) \tag{9}$$

の任意の 2 つの解は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であることが数値実験から確かめられる．また，Karp-Prilepkina [7] は，Bühring [1] と Nørlund [10] の結果を Meijer の G-function で繋いでいる．

注意 2.9　$Q_2^{(0)}(n)$ は，仮定 $\mathrm{Re}\,(a_2+n)>0$ の下で収束する級数である．しかし，そうでなくとも補題 5.11 を使うことで，$Q_2^{(0)}(n)$ に意味が与えられる．注意 5.12 も参照せよ．仮定 $\mathrm{Re}\,(1+n-s)>0$ の下収束する級数である $Q_3^{(0)}(n)$, $Q_4^{(0)}(n)$ に対しても同様である．

§ 3.　主結果

前節で見たように，仮定 (7) の下，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の $x=1$ における正則解が構成されていた（式 (9) 参照）．しかし，どの級数解も，その係数は超越的なものになっている．より正確に言えば，n を固定，$\boldsymbol{a}$ を変数と見たとき，それら係数は $\mathbb{C}(\boldsymbol{a})$ の元になっていないのである．そこで本論文では，以下の問題を考えることにしよう：

問題 3.1　${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ の基底

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(1)}(n)\cdot(1-x)^{1+n} \tag{10}$$

で，条件

(i) $Q^{(0)}(0)=1$, $Q^{(1)}(0)=1$,

(ii) n を固定，$\boldsymbol{a}$ を変数と見たとき，$Q^{(0)}(n), Q^{(1)}(n)\in\mathbb{C}(\boldsymbol{a})$

を満たすものを構成せよ．

次の結果がこの問題に答えるための鍵となる：

命題 3.2　式 (7) を仮定し，

$$\begin{aligned}Q_0^{(0)}(n) &:= Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a};n)\\ &:= \frac{1}{n!(1-s)_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(-1)^{k+l}\prod_{i=0}^{2}(a_i-1)_l(a_i+k+l)_{n-k-l}\prod_{j=1}^{2}(b_j-1+l)_k}{l!\,(n-k-l)!},\end{aligned}$$

$$Q_1^{(0)}(n) := \begin{cases}\dfrac{1}{n}Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};n-1) & \text{if } n\geq 1,\\ 0 & \text{if } n=0\end{cases}$$

と定める．ただし，$\mathbf{1}:=(1,1,1;1,1)$ である．このとき，$\{Q_0^{(0)}(n)\}$, $\{Q_1^{(0)}(n)\}$ は，それぞれ初期条件

	$n=0$	$n=1$
$Q_0^{(0)}(n)$	1	$\dfrac{a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0-b_1b_2+s}{1-s}$
$Q_1^{(0)}(n)$	0	1

を満たす差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解である．

この命題 3.2 より，

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_0^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_1^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n \tag{11}$$

は，${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ の基底を成すことになる．特に，$Q_1^{(0)}(0)=0$, $Q_1^{(0)}(1)=1$ であるから，補題 2.4 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q_1^{(0)}(n)\cdot(1-x)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_1^{(0)}(n+1)\cdot(1-x)^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};n)\cdot(1-x)^{n+1}\end{aligned}$$

は，$x=1$ における特性指数 1 に対応した解で正規化されたものとなる．以上まとめると，問題 3.1 の答えを得る：

定理 3.3　式 (7) を仮定する．命題 3.2 で現れた $Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a};n)$ を用いて，

$$Q^{(0)}(n)=Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a};n), \quad Q^{(1)}(n)=\frac{1}{n+1}Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};n)$$

と定める．このとき，これらを係数に持つ級数 (10) は，${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ の基底を成し，問題 3.1 内の 2 条件 (i), (ii) を満たす．

注意 3.4　注意 2.1 で見たように，問題 3.1 内の 2 条件 (i), (ii) を満たす $Q^{(1)}(n)$ は一意である一方で，$Q^{(0)}(n)$ はそうでない．しかしながら，定理 3.3 では，$Q_0^{(0)}$ のみを使い ${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ の基底が構成されている．従って，このように $Q^{(0)}(n)$ を採るのは自然であろう．

このように，問題 3.1 の答えが命題 3.2 から得られた．本稿では，以降この命題を示していく．まず 4 節，5 節で準備を行い，6 節で命題 3.2，すなわち，差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の有理関数解の表示式を得ることにしよう．

§ 4. 準備 1：隣接関係式

今後，特に断らない限り，条件

$$a_i \notin \mathbb{Z},\ b_j - a_i \notin \mathbb{Z} \qquad (i = 0, 1, 2; j = 1, 2) \tag{12}$$

$$b_j \notin \mathbb{Z},\ b_1 - b_2 \notin \mathbb{Z},\ s \notin \mathbb{Z},\ a_i - a_{i'} \notin \mathbb{Z} \qquad (i, i' = 0, 1, 2; i \neq i'; j = 1, 2) \tag{13}$$

を課すことにする[2]．この節では，次の命題を導くことが目標となる：

命題 4.1 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^5 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し，

(i) 4 項間関係式

$$y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x) = q_0 \cdot y_0(\boldsymbol{a};x) + q_1 \cdot y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x) + q_2 \cdot y_0(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x) \tag{14}$$

を満たす $(q_0, q_1, q_2) \in (\mathbb{C}(x))^3$ が唯 1 組存在する．この x の有理関数 q_i $(i = 0, 1, 2)$ は，パラメータ $\boldsymbol{a}$ を変数と見ると，$\mathbb{Q}(\boldsymbol{a}, x)$ の元となる．

(ii) 関係式 (14) は，y_0 を他の y_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ に置き換えても成り立つ．

(iii) q_i $(i = 0, 1, 2)$ は，一般化超幾何関数 ${}_3F_2$ の積の和として表される：

$$\begin{aligned}
q_0 &= -\frac{a_0a_1a_2}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\, y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{1};x)\, y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x),\\
q_1 &= -\frac{x^2(1-x)}{\pi}\\
&\quad\times\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\left\{\left(\frac{1-b_1-b_2}{x}+\frac{1-s}{1-x}\right)y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)+y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{1};x)\right\}y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x),\\
q_2 &= \frac{x^2(1-x)}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\, y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)\, y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x).
\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\\ \beta_1, \beta_2\end{pmatrix}$ に対し，

$$\sin(\pi\boldsymbol{\alpha}) := \frac{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)\sin(\pi\alpha_2)}{\sin(\pi\beta_1)\sin(\pi\beta_2)}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} := \begin{pmatrix}1-\alpha_0, 1-\alpha_1, 1-\alpha_2\\ 2-\beta_1, 2-\beta_2\end{pmatrix}$$

と定める．

[2] 条件 (12) は一般化超幾何微分方程式 (2) が既約であるための必要十分条件である．また，条件 (13) は各特異点における特性指数に対応した級数解が log 解を持たないための十分条件である．

(iv) $\boldsymbol{k}=-n\cdot\mathbf{1}$ (ここで, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$) であるとき，q_i $(i=0,1,2)$ は x に関する多項式になっており，一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ の下,

$$q_i=x^{u_i}(1-x)^{v_i}p_i,\qquad p_i : x \text{ に関する } w_i \text{ 次多項式}, \ p_i|_{x=0}\neq 0.$$

と表される．ここで,

$$(u_0,\ v_0,\ w_0)=(0,0,n),\quad (u_1,\ v_1,\ w_1)=(1,0,n),\quad (u_2,\ v_2,\ w_2)=(2,1,n-1)$$

である．一般の $\boldsymbol{k}$ に対しては，q_i $(i=0,1,2)$ は $x=0,\ 1,\ \infty$ に高々極を持つ x の有理関数であり，その形は命題 4.12, 4.14 で与えられる．

注意 4.2　関係式 (14) は，パラメータが整数差ずれた 4 個の超幾何関数の間に成り立つ，有理関数係数の一次関係式である．これを**隣接関係式**という．

注意 4.3　命題 4.1 (ii) で見た性質を**隣接関係式の同時性**という．

この命題 4.1 は，命題 3.2 を導くために後々必要となる．細かい計算は論文 [3] に譲ることにするが，以降の小節で命題 4.1 の証明の流れを追っていくことにしよう．まず，4.1 節にて，**昇降演算子**を導入し，その性質から自然に (i), (ii) が導かれることを見る．次に 4.2 節にて (iii) を導き，最後に 4.3 節にて (iv) を得ることにする．

§4.1.　昇降演算子

定義 4.4 （単位シフトベクトル）

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}_0:=(1,0,0;0,0), &&\boldsymbol{e}_1:=(0,1,0;0,0), &&\boldsymbol{e}_2:=(0,0,1;0,0),\\ &\boldsymbol{e}_3:=(0,0,0;1,0), &&\boldsymbol{e}_4:=(0,0,0;0,1).\end{aligned}$$

の下，次のように定義される微分作用素 $H_{\boldsymbol{e}_j}, B_{\boldsymbol{e}_j}$ $(j=0,1,2,3,4)$ を ${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の**昇降演算子**という：

定義 4.5

$$H_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a}):=\vartheta+a_0,$$

$$\begin{aligned}B_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a}):=\frac{1}{(a_0-1)(a_0-b_1)(a_0-b_2)}\Big[&x^2(1-x)\partial^2+\{b_1+b_2-a_0-(a_1+a_2+1)x\}x\partial\\ &+a_0(a_0-b_1-b_2)+b_1b_2-a_1a_2x\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{a}):=\frac{1}{(a_0-b_1)(a_1-b_1)(a_2-b_1)}\Big[&x(1-x)\partial^2+\{b_2-(a_0+a_1+a_2+1-b_1)x\}\partial\\ &+b_1(a_0+a_1+a_2-b_1)-a_0a_1-a_1a_2-a_2a_0\Big],\end{aligned}$$

$$B_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{a}):=\vartheta+b_1-1.$$

定義 4.6

$$\begin{aligned} H_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{a}) &:= H_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a})\big|_{a_0\leftrightarrow a_1}, & B_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{a}) &:= B_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a})\big|_{a_0\leftrightarrow a_1},\\ H_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{a}) &:= H_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a})\big|_{a_0\leftrightarrow a_2}, & B_{\boldsymbol{e}_2}(\boldsymbol{a}) &:= B_{\boldsymbol{e}_0}(\boldsymbol{a})\big|_{a_0\leftrightarrow a_2},\\ H_{\boldsymbol{e}_4}(\boldsymbol{a}) &:= H_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{a})\big|_{b_1\leftrightarrow b_2}, & B_{\boldsymbol{e}_4}(\boldsymbol{a}) &:= B_{\boldsymbol{e}_3}(\boldsymbol{a})\big|_{b_1\leftrightarrow b_2}. \end{aligned}$$

このとき，次が成り立つ：

補題 4.7 （昇降演算子の性質（[4] の補題 2.1 参照）） 任意の $j = 0,1,2,3,4$ に対し，

$$H_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{a}) : {}_3S_2(\boldsymbol{a};x) \xrightarrow{\simeq} {}_3S_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_j;x), \quad B_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{a}) : {}_3S_2(\boldsymbol{a};x) \xrightarrow{\simeq} {}_3S_2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_j;x)$$

であり，特に

$$H_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{a})y_i(\boldsymbol{a};x) = y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_j;x), \quad B_{\boldsymbol{e}_j}(\boldsymbol{a})y_i(\boldsymbol{a};x) = y_i(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}_j;x) \quad (i=0,1,2,3,4,5)$$

が成り立つ.

これが各 $H_{\boldsymbol{e}_j}$ が昇降演算子と言われる所以である．また，微分演算子 ∂ に対しても同様のことが成り立つことに注意しておこう：

補題 4.8 （[4] の補題 2.1 参照） $\partial : {}_3S_2(\boldsymbol{a};x) \xrightarrow{\simeq} {}_3S_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)$ であり，特に $\partial\, y_i(\boldsymbol{a};x) = y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)$ が成り立つ.

さて，これらの補題を使うことで，命題 4.1 (i), (ii) が自然に導かれることを見ていこう．今，昇降演算子を合成させ，${}_3S_2(\boldsymbol{a};x) \to {}_3S_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)$ （ここで，$\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^5 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$）への写像を 1 つ与える．これを $H(\boldsymbol{a};\boldsymbol{k})$ と書く．そして，この線形微分作用素 $H(\boldsymbol{a};\boldsymbol{k})$ を 3 階線形微分作用素 ${}_3L_2(\boldsymbol{a};x)$ で右から割ったときの余りを $q_0 + q_1\partial + q_2\partial^2$ と表すことにする：

$$H(\boldsymbol{a};\boldsymbol{k}) \equiv q_0 + q_1\partial + q_2\partial^2 \pmod{{}_3L_2(\boldsymbol{a};x)}. \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{k}$ を固定し，$\boldsymbol{a}$, x を変数と見たとき，q_0, q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}(\boldsymbol{a},x)$ となることに注意しよう．このとき，補題 4.7, 4.8 から，各 $i = 0,1,2,3,4,5$ に対し，

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{a};\boldsymbol{k})y_i(\boldsymbol{a};x) &= y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x),\\ \bigl(q_0 + q_1\partial + q_2\partial^2\bigr)y_i(\boldsymbol{a};x) &= q_0\cdot y_i(\boldsymbol{a};x) + q_1\cdot y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x) + q_2\cdot y_i(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x) \end{aligned}$$

が成り立つことになる．従って，${}_3L_2(\boldsymbol{a};x)y_i(\boldsymbol{a};x) = 0$ であることに注意することで，関係式

$$y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x) = q_0\cdot y_i(\boldsymbol{a};x) + q_1\cdot y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x) + q_2\cdot y_i(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x) \tag{16}$$

$(i=0,1,2,3,4,5)$ が導かれる．こうして，隣接関係式の存在性と同時性が言えた．最後に一意性を見よう．もし，

$$y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)=\widehat{q}_0\cdot y_0(\boldsymbol{a};x)+\widehat{q}_1\cdot y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)+\widehat{q}_2\cdot y_0(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x) \tag{17}$$

を満たす $(\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{q}_2)(\neq(q_0,q_1,q_2))$ が存在したのなら，式 (16) との差を取ることで，

$$0=(q_0-\widehat{q}_0)y_0(\boldsymbol{a};x)+(q_1-\widehat{q}_1)y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)+(q_2-\widehat{q}_2)y_0(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x),$$

すなわち，

$$\bigl\{(q_0-\widehat{q}_0)+(q_1-\widehat{q}_1)\partial+(q_2-\widehat{q}_2)\partial^2\bigr\}y_0(\boldsymbol{a};x)=0$$

が成り立つことになる．これは $y_0(\boldsymbol{a};x)$ が高々 2 階の Fuchs 型微分方程式を満たすことを意味する．しかし，それは既約性の仮定 (12) に反する．従って，式 (17) を満たす $(\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{q}_2)(\neq(q_0,q_1,q_2))$ は存在せず，隣接関係式の一意性が言えた．

§ 4.2. 隣接関係式の係数の表示

前小節で見たように，隣接関係式 (16) の係数 q_0, q_1, q_2 は，$\boldsymbol{k}$ を固定したとき，$\mathbb{Q}(\boldsymbol{a},x)$ の元になっていた．この小節では，これら q_0, q_1, q_2 の明示的な表示（命題 4.1 (iii)）を与えたい．

$i=0,1,2$ に対する式 (16) を連立させることで[3]，

$$Y\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\\y_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\\y_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\end{bmatrix},\quad Y:=\begin{bmatrix}y_0(\boldsymbol{a};x)&y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)&y_0(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x)\\y_1(\boldsymbol{a};x)&y_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)&y_1(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x)\\y_2(\boldsymbol{a};x)&y_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)&y_2(\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{1};x)\end{bmatrix} \tag{18}$$

を得る．ここで，$\det Y$ は，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の解 $y_i(\boldsymbol{a};x)$ $(i=0,1,2)$ の Wronskian になっているから，容易に，

$$\det Y=D\,x^{-b_1-b_2-1}(1-x)^{s-2},\quad D:=(1-b_1)(1-b_2)(b_1-b_2)\prod_{i=0}^{2}\mathit{\Gamma}(\tau_i(\boldsymbol{a})) \tag{19}$$

が確かめられる．ただし，

$$\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha})=\mathit{\Gamma}\begin{pmatrix}\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\\\beta_1,\beta_2\end{pmatrix}:=\frac{\mathit{\Gamma}(\alpha_0)\mathit{\Gamma}(\alpha_1)\mathit{\Gamma}(\alpha_2)}{\mathit{\Gamma}(\beta_1)\mathit{\Gamma}(\beta_2)} \tag{20}$$

を意味する．従って，仮定 (12), (13) の下 $\det Y\neq 0$ であり，式 (18) は，Y の (i,j) 余因子 $\widetilde{y}_{i,j}$ を用いて，

$$\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\det Y}\begin{bmatrix}\widetilde{y}_{0,0}&\widetilde{y}_{1,0}&\widetilde{y}_{2,0}\\\widetilde{y}_{0,1}&\widetilde{y}_{1,1}&\widetilde{y}_{2,1}\\\widetilde{y}_{0,2}&\widetilde{y}_{1,2}&\widetilde{y}_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_0(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\\y_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\\y_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k};x)\end{bmatrix} \tag{21}$$

---

[3] $i=3,4,5$ に対する式 (16) を連立させても同様の議論が出来る．詳細は [3] で述べることにする．

と変形される．

命題 4.1 (iii) を得るため，式 (21) に現れた $\widetilde{y}_{i,j}$ を調べよう．これらは $y_i(\boldsymbol{a};x)$ $(i=0,1,2)$ の Wronskian の小行列式であるが，実は以下で見るように簡便に表される．まず，$\widetilde{y}_{i,2}$, すなわち，

$$(22)\quad \widetilde{y}_{i,2}=(-1)^i\begin{vmatrix} y_{i'}(\boldsymbol{a};x) & y_{i'}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)\\ y_{i''}(\boldsymbol{a};x) & y_{i''}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x)\end{vmatrix},\qquad \text{ここで，} \{i,i',i''\}=\{0,1,2\},\ i'<i''$$

は，次のように書けることが知られている：

補題 4.9 （例えば，蛭子 [2] の補題 2.2，岸本・野海 [8] の式 (2.112)，梶原 [6] 参照）

$$\widetilde{y}_{i,2}=\frac{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}{\pi}\cdot x^2(1-x)\det Y\cdot y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x),\qquad (i=0,1,2).$$

次に，この補題を用いて，$\widetilde{y}_{i,0}$ $(i=0,1,2)$ の単純な表示を与えよう．定義から，$\widetilde{y}_{i,0}=\widetilde{y}_{i,2}\Big|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1}}$ であることが確かめられる．従って，$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1}$ としたとき，

$$\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{a}}\to\widetilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{1};\quad \sin(\tau_i(\boldsymbol{a}))\to-\sin(\tau_i(\boldsymbol{a}))\quad (i=0,1,2);\\ &\det Y\to a_0a_1a_2x^{-2}(1-x)^{-1}\det Y\end{aligned}$$

となることに注意することで，次の表示が得られる：

補題 4.10

$$\widetilde{y}_{i,0}=-a_0a_1a_2\frac{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}{\pi}\cdot\det Y\cdot y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{1};x)\qquad (i=0,1,2).$$

最後に，補題 4.9 を用いて，$\widetilde{y}_{i,1}$ $(i=0,1,2)$ の表示を与える．今から見るように，それらは，補題 4.9, 4.10 で得られた $\widetilde{y}_{i,0}$, $\widetilde{y}_{i,2}$ の表示よりやや複雑になる．$\widetilde{y}_{i,1}$ の定義より，

$$\widetilde{y}_{i,1}=-\partial\widetilde{y}_{i,2}\qquad (i=0,1,2)$$

となることに注意しよう．従って補題 4.9 より，$i=0,1,2$ に対して，

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_{i,1}=-\partial\widetilde{y}_{i,2}&=-\partial\left(\frac{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}{\pi}\cdot x^2(1-x)\det Y\cdot\ y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)\right)\\ &=-\frac{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}{\pi}\left[\partial\big(x^2(1-x)\det Y\big)\cdot y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)+x^2(1-x)\det Y\cdot\partial y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)\right]\end{aligned}$$

であり，補題 4.8 を使って更に整理することで次を得る：

補題 4.11

$$\widetilde{y}_{i,1}=-\frac{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}{\pi}\cdot x^2(1-x)\det Y\cdot\left\{\left(\frac{1-b_1-b_2}{x}+\frac{1-s}{1-x}\right)y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)+y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{1};x)\right\}$$
$$(i=0,1,2).$$

以上，$\widetilde{y}_{i,j}(i,j=0,1,2)$ の簡便な表示式（補題 4.9, 4.10, 4.11 参照）を得た．これらを式 (21) に代入することで，q_0, q_1, q_2 の表示式（命題 4.1 (iii)）が得られる．

§ 4.3. 隣接関係式の係数の $x=0$, 1, ∞ における位数

先に注意したように，隣接関係式の係数 q_0, q_1, q_2 は x に関する有理関数であった．さらに，それらは，命題 4.1 (iii) のように超幾何関数の積の和として表された．従って，q_0, q_1, q_2 は，$x=0$, 1, ∞ に高々極を持つ有理関数となる．この節では，$x=0$, 1, ∞ における位数を数えることで，命題 4.1 (iv) を与えよう．

超幾何関数のパラメータに関する対称性より，

$$\text{シフトベクトル } \boldsymbol{k}=\begin{pmatrix} k_0,k_1,k_2 \\ l_1,l_2 \end{pmatrix} \text{ に対し}, k_0\le k_1\le k_2;\ l_1\le l_2 \tag{23}$$

を仮定しても一般性を失わない．この仮定の下，例えば，q_0 の $x=0$ における位数を考える．q_0 を $x=0$ で展開することで（命題 4.1 (iii) 参照），一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ に対し，

$$\text{（}q_0 \text{ の } x=0 \text{ における位数）} = \begin{cases} 1-l_2 & \text{if} \quad 1\le l_2, \\ 0 & \text{if} \quad 1\ge l_2 \end{cases} \tag{24}$$

が成り立つことが分かる．次に q_0 の $x=\infty$ における位数が知りたい場合，$i=3,4,5$ に対する式 (16) から式 (18) に相当する関係式を作り，これまでと同様の議論を行えばよい．結果，一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ に対し，

$$\text{（}q_0 \text{ の } x=\infty \text{ における位数）} = k_0 \tag{25}$$

が成り立つことが分かる．さて，これら位数の粗い数値が知りたいだけなら，q_0 の明示的な表示は必要ないことに注意しよう．実際，式 (21) において，右辺の各関数の $x=0$ における特性指数を用いるだけで，$x=0$ における位数の粗い評価が出来る．したがって，q_0 の $x=1$ における大凡の位数を知りたければ，${}_3E_2(\boldsymbol{a};x)$ の $x=1$ における正則解 2 つと，特性指数 s の解が存在することを用いて，式 (18) に相当する関係式を作り，q_0 の $x=1$ における位数の評価を行えば良い．計算すると，一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ に対し，

$$\text{（}q_0 \text{ の } x=1 \text{ における位数）} \ge \begin{cases} 2+s_{\boldsymbol{k}} & \text{if} \quad s_{\boldsymbol{k}}\le -2, \\ 0 & \text{if} \quad s_{\boldsymbol{k}}\ge -2 \end{cases} \tag{26}$$

を得る．ここで，$s_{\boldsymbol{k}}:=l_1+l_2-k_0-k_1-k_2$ である．式 (24), (25), (26) をまとめることで次を得る：

命題 4.12 （q_0 の形） $\boldsymbol{k}$ は式 (23) を満たしているとする．(u_0, v_0, w_0) を

$$(u_0,\ v_0,\ w_0) = \begin{cases} (1-l_2,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-3) & \text{if} \quad 1 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -2, \\ (1-l_2,\ 0,\ l_2-k_0-1) & \text{if} \quad 1 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -2, \\ (0,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-l_2-2) & \text{if} \quad 1 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -2, \\ (0,\ 0,\ -k_0) & \text{if} \quad 1 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -2 \end{cases}$$

と取ったとき，q_0 は一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ の下，x の有理関数として，

$$q_0 = x^{u_0}(1-x)^{v_0} p_0, \qquad p_0 : x \text{ に関する } w_0 \text{ 次多項式，} p_0|_{x=0} \neq 0$$

と表される．

注意 4.13 式 (26) で見たように, 一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ においてさえ, p_0 が $x=1$ で零になるかどうかは不明である.

同様の議論を q_1, q_2 に対して行うことで次を得る：

命題 4.14 （q_1, q_2 の形） $\boldsymbol{k}$ は式 (23) を満たしているとする．(u_i, v_i, w_i) （ここで，$i = 1, 2$）を

$$(u_1,\ v_1,\ w_1) = \begin{cases} (1-l_2,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-2) & \text{if} \quad 0 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -2, \\ (1-l_2,\ 0,\ l_2-k_0) & \text{if} \quad 0 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -2, \\ (1,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-l_2-2) & \text{if} \quad 0 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -2, \\ (1,\ 0,\ -k_0) & \text{if} \quad 0 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -2, \end{cases}$$

$$(u_2,\ v_2,\ w_2) = \begin{cases} (2-l_2,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-2) & \text{if} \quad 0 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -1, \\ (2-l_2,\ 1,\ l_2-k_0-1) & \text{if} \quad 0 \leq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -1, \\ (2,\ 2+s_{\boldsymbol{k}},\ k_1+k_2-l_1-l_2-2) & \text{if} \quad 0 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \leq -1, \\ (2,\ 1,\ -k_0-1) & \text{if} \quad 0 \geq l_2,\ s_{\boldsymbol{k}} \geq -1 \end{cases}$$

と取ったとき，q_i は一般のパラメータ $\boldsymbol{a}$ の下，x の有理関数として，

$$q_i = x^{u_i}(1-x)^{v_i} p_i, \qquad p_i : x \text{ に関する } w_i \text{ 次多項式，} p_i|_{x=0} \neq 0$$

と表される．

特に，$\boldsymbol{k} = -n \cdot \mathbf{1}$（ここで，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$）である場合に命題 4.12, 4.14 を適用することで，命題 4.1 (iv) の前半部が得られる．こうして，駆け足であるが，命題 4.1 が導けた．道中省略した計算や，より進んだ話題は，論文 [3] で述べる予定である．

§ 5.　準備 2：差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の超越解

前節に続き，命題 3.2 の証明のための準備を行う．この節での目標は，次のような差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の超越解を与えることである：

命題 5.1

$$\left\{\frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1)\right\}\qquad(i=0,1,2,3,4,5) \tag{27}$$

は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解である[4].

注意 5.2　Bühring や Nørlund によって既に与えられている $\{Q_i^{(0)}(n)\}$ $(i=2,3,4)$ でなく，わざわざ式 (27) を導入する利点は，対称性が見やすいことにある．

注意 5.3　$y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1)$ の収束条件は $\mathrm{Re}\,(s-n)<1$ である．この条件を満たさない場合，式 (27) の代わりに，命題 5.15 のように取ればよい．注意 5.12 も参照せよ．

以下，5.1, 5.2, 5.3 節で命題 5.1 を導出していく．今後，$y_i(\boldsymbol{a};1)$ の収束性について考えていかなければならないので，次の記号を導入しておこう：

定義 5.4　$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2\end{pmatrix}$ に対し，$s_{\boldsymbol{\alpha}}:=\beta_1-\beta_2-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2$ と定める．

注意 5.5　$s_{\boldsymbol{a}}=s$ である．また，各 $i=0,1,2$ に対し，$s_{\tau_i(\boldsymbol{a})}=s$, $s_{\sigma_i(\boldsymbol{a})}=s$ が成り立つので，$y_i(\boldsymbol{a};1)$　$(i=0,1,2,3,4,5)$ の収束条件は $\mathrm{Re}\,s>0$ である．

§ 5.1.　差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の形式解

この小節では, 差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の形式解を与える．まず, $y_i(\boldsymbol{a};x)$ $(i=0,1,2,3,4,5)$ の接続公式

$$y_i(\boldsymbol{a};x)=\sum_{n=0}^{\infty}Q(n)\cdot(1-x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}R(n)\cdot(1-x)^{s+n} \tag{28}$$

を考えよう．$Q(n)$, $R(n)$ は i に依るため，それぞれ $Q_i(n)$, $R_i(n)$ と書くべきだが，ここでは簡便のため i は省略する．また，勿論 $i=0$ の場合，その具体形は Bühring によって与えられている（定理 2.5 (ii) 参照）．しかし今はそのことを用いず，$\{Q(n)\}$ が差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たすことのみ使う．式 (28) の両辺を x で N 回微分すると，補題 4.8 より，

$$\begin{aligned}y_i(\boldsymbol{a}+N\cdot\mathbf{1};x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^N(n+1)_N\cdot Q(n+N)\cdot(1-x)^n\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^N(s+n-N+1)_N\cdot R(n)\cdot(1-x)^{s+n-N}\end{aligned} \tag{29}$$

[4] $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ の定義は，命題 4.1 を参照せよ．

を得る．今，$\mathrm{Re}\,(s-N)>0$ であるとしよう．このとき，式 (29) において $x\to 1-$ とすると，両辺は収束し[5],

$$y_i(\boldsymbol{a}+N\cdot\mathbf{1};1)=(-1)^N N!\,Q(N),\quad \text{すなわち，} Q(N)=\frac{(-1)^N y_i(\boldsymbol{a}+N\cdot\mathbf{1};1)}{N!}$$

が成り立つことになる．これは次を意味する：

補題 5.6 N を自然数とし，$\mathrm{Re}\,(s-N)>0$ であると仮定する．$i=0,1,2,3,4,5$ に対し，

$$Q(0)=y_i(\boldsymbol{a};1),\qquad Q(1)=-y_i(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};1)$$

を初期条件に持つ差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解を $\{Q(n)\}_{n=0}^{\infty}$ と書き表す．このとき，その部分解 $\{Q(n)\}_{n=0}^{N}$ は,

$$\{Q(n)\}_{n=0}^{N}=\left\{\frac{(-1)^n y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)}{n!}\right\}_{n=0}^{N}$$

となる．

注意 5.7 形式的には，$\left\{(-1)^n y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)/n!\right\}_{n=0}^{\infty}$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たす．しかし，$\mathrm{Re}\,(s-n)<0$ を満たす n に対し，$y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)$ $(i=0,1,2,3,4,5)$ は収束しなくなり，意味を持たなくなる．

§ 5.2. 差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の超越解 1

前小節に引き続き，差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の形式解 $\left\{(-1)^n y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)/n!\right\}_{n=0}^{\infty}$ について考察する．注意 5.7 で見た問題を回避するために，補題 4.9 に注目しよう．式 (19), (22) に注意すると，それは,

$$\text{(30)}\quad y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};x)=(-1)^i\frac{\pi}{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}D^{-1}x^{b_1+b_2-1}(1-x)^{1-s}\begin{vmatrix} y_{i'}(\boldsymbol{a};x) & y_{i'}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};x)\\ y_{i''}(\boldsymbol{a};x) & y_{i''}(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};x)\end{vmatrix},$$

$$\text{但し，}\ D=(1-b_1)(1-b_2)(b_1-b_2)\prod_{j=0}^{2}\Gamma(\tau_j(\boldsymbol{a})),\ \{i,i',i''\}=\{0,1,2\},\ i'<i''$$

と書けた．ここで，次の補題を思い出す：

補題 5.8 （[11] の補題 2，[1] の式 (3.14) 参照） $\mathrm{Re}\,s<0$ であるならば

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)^{-s}y_i(\boldsymbol{a};x)=\Gamma(-s),\qquad (i=0,1,2,3,4,5).$$

[5]実際，$s_{\boldsymbol{a}+N\cdot\mathbf{1}}=s-N$ である．

補題 5.8 は,「$\mathrm{Re}\, s < 1$ であるならば,

$$\lim_{x\to 1-}(1-x)^{1-s}y_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};x) = \Gamma(1-s), \qquad (i=0,1,2,3,4,5)$$

である」と言い換えられる．従って，$0<\mathrm{Re}\, s<1$ の下，式 (30) において $x\to 1-$ としたとき，次が得られる：

補題 5.9 （岸本・野海 [8] の式 (2.113) 参照） 式 (30) のように，D, i, i', i'' を定める．このとき，$0<\mathrm{Re}\, s<1$ 上で，

$$y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}};1) = (-1)^i\frac{\pi}{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}D^{-1}\Gamma(1-s)\{y_{i'}(\boldsymbol{a};1)-y_{i''}(\boldsymbol{a};1)\}$$

が成り立つ.

この補題において，$\boldsymbol{a}\to\widetilde{\boldsymbol{a}}$ としよう．簡単な計算から以下の定義の下，補題 5.11 が成り立つことが分かる：

定義 5.10 式 (30) のように，D, i, i', i'' を定めたとき，

$$z_i(\boldsymbol{a};1) := (-1)^i\frac{\sin\pi(\tau_{i'}(\boldsymbol{a}))\sin\pi(\tau_{i''}(\boldsymbol{a}))}{\pi^2}D\Gamma(s)\{y_{i'}(\widetilde{\boldsymbol{a}};1)-y_{i''}(\widetilde{\boldsymbol{a}};1)\}$$

と表す.

補題 5.11 $0<\mathrm{Re}\, s<1$ 上で，$y_i(\boldsymbol{a};1)=z_i(\boldsymbol{a};1)$ $(i=0,1,2)$ が成り立つ.

注意 5.12 補題 5.11 で注目すべきは，$y_i(\boldsymbol{a};1)$ $(i=0,1,2)$ の収束条件が $\mathrm{Re}\, s>0$ であることに対し，$z_i(\boldsymbol{a};1)$ の収束条件は $\mathrm{Re}\, s<1$ となることである（岸本・野海 [8] の 259 頁参照)．従って，一致の定理から，$\boldsymbol{a}$ の関数 $y_i(\boldsymbol{a};1)$ の解析接続が $z_i(\boldsymbol{a};1)$ によって与えられる．こうして，収束しない $y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\boldsymbol{1};1)$ に対しても $z_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\boldsymbol{1};1)$ の値として意味が与えられるようになった.

最後に，$z_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\boldsymbol{1};1)$ の値を書き下す．$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+n\cdot\boldsymbol{1}$ としたとき，

$$\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\to(-1)^n\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a})) \quad (i=0,1,2), \qquad D\to D\cdot(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n,$$
$$\Gamma(s)\to\frac{(-1)^n\pi}{\sin\pi s\cdot\Gamma(1-s)\cdot(1-s)_n}$$

となるから,

$$\begin{aligned}z_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\boldsymbol{1};1) &= (-1)^i\frac{\sin\pi(\tau_{i'}(\boldsymbol{a}))\sin\pi(\tau_{i''}(\boldsymbol{a}))}{\pi\sin\pi s\cdot\Gamma(1-s)}D \\ &\qquad\times\frac{(-1)^n(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{(1-s)_n}\{y_{i'}(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\boldsymbol{1};1)-y_{i''}(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\boldsymbol{1};1)\}\end{aligned} \tag{31}$$

であり，これは $\mathrm{Re}(s-n)<1$，特に $\mathrm{Re}\,(s-n)\le 0$ であるとき収束する．以上をまとめよう：

命題 5.13　式 (31) のように表される $z_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)$ を使い,

$$Q(n) := \begin{cases} \dfrac{(-1)^n y_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)}{n!} & \text{if} \quad \mathrm{Re}\,(s-n)>0, \\ \dfrac{(-1)^n z_i(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)}{n!} & \text{if} \quad \mathrm{Re}\,(s-n)\le 0 \end{cases}$$

と定める．このとき，$\{Q(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たす．

§ 5.3.　差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の超越解 2

命題 5.13 で，差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の超越解を与えた．今小節では，別の超越解を与えることにする．補題 5.9 において，$\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1}$ とすると，次を得る：

補題 5.14　式 (30) のように，D, i,i',i'' を定める．このとき，$0<\mathrm{Re}\,(s-n)<1$ 上で,

$$\begin{aligned} &(-1)^i\frac{\pi\cdot\Gamma(1-s)}{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}D^{-1}\{y_{i'}(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)-y_{i''}(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)\} \\ &=\frac{(-1)^n(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{(1-s)_n}y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1) \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 5.13 を得たように，補題 5.14 から次が分かる：

命題 5.15　式 (30) のような D, i,i',i'' に対し,

$$Q(n) :=$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi\cdot\Gamma(1-s)}{\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))}D^{-1}\cdot\dfrac{(-1)^{n+i}}{n!}\{y_{i'}(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)-y_{i''}(\boldsymbol{a}+n\cdot\mathbf{1};1)\} & \text{if} \quad \mathrm{Re}\,(s-n)\ge 1, \\ \dfrac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1) & \text{if} \quad \mathrm{Re}\,(s-n)<1, \end{cases}$$

と定める．このとき，$\{Q(n)\}_{n=0}^{\infty}$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たす．

こうして，命題 5.1 が導出出来た．

§ 6.　命題 3.2 の証明

それでは準備が整ったので，命題 3.2 の証明に取り掛かろう．以降では，これまでの仮定 (12), (13) に加え，$0<\mathrm{Re}\,s<1$ の下で議論する．この仮定の下では，式 (27) は収束することに注意しよう．（注意 5.3 参照）．

命題 4.1 において，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})\to(\widetilde{\boldsymbol{a}},-n\cdot\mathbf{1})$ とすることで次を得る：

補題 6.1

(i) $$\widetilde{q}_0(n;x) := q_0|_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})\to(\widetilde{\boldsymbol{a}},-n\cdot\mathbf{1})} = \frac{(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\,y_i(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$$

は x に関する n 次多項式である.

(ii) $$\widetilde{q}_1(n;x) := q_1|_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})\to(\widetilde{\boldsymbol{a}},-n\cdot\mathbf{1})} = -\frac{x}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\Big\{\Big((b_1+b_2-3)(1-x)+sx\Big)y_i(\boldsymbol{a};x) + x(1-x)\,y_i(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};x)\Big\}\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$$

は $x\times$ (x の n 次多項式) と表される.

(iii) $$\widetilde{q}_2(n;x) := q_2|_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})\to(\widetilde{\boldsymbol{a}},-n\cdot\mathbf{1})} = \frac{x^2(1-x)}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\,y_i(\boldsymbol{a};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x).$$

は $x^2(1-x)\times$ (x の $(n-1)$ 次多項式) と表される.

ここで，仮定 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ の下では,

(32) $$\lim_{x\to 1-} y_i(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x) = y_i(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};1)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1),$$

(33) $$\lim_{x\to 1-} y_i(\boldsymbol{a};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x) = y_i(\boldsymbol{a};1)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1),$$

(34) $$\lim_{x\to 1-}(1-x)y_i(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x) = 0$$

となり，各 $\widetilde{q}_j(n;1)$ $(j=0,1,2)$ は $y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1)$ $(i=0,1,2)$ の 1 次結合として表される．従って,

(35) $$\widetilde{Q}_j^{(0)}(n) := \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}\widetilde{q}_j(n;1), \qquad (j=0,1,2)$$

と置いたとき，命題 5.1 から，$\Big\{\widetilde{Q}_j^{(0)}(n)\Big\}$ は線形差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解であることが分かる．但し，$\widetilde{q}_2(n;1)=0$ のため，$\Big\{\widetilde{Q}_2^{(0)}(n)\Big\}$ は $T^{(0)}(n)$ の自明な解である．そこで，$\widetilde{Q}_0^{(0)}(n), \widetilde{Q}_1^{(0)}(n)$ のみに焦点を当て，これらの表示式を求めていくことにしよう.

§ 6.1. $\widetilde{Q}_0^{(0)}(n)$ の表示式

$\widetilde{Q}_0^{(0)}(n)$ は $\widetilde{q}_0^{(0)}(n;1)$ を使って定められていた（式 (35) 参照)．そこで，まず $\widetilde{q}_0^{(0)}(n;1)$ の表示式から考える．補題 6.1 (i) より，$\widetilde{q}_0(n;x)$ の表示式中に現れる $y_i(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-$

$n\cdot\mathbf{1};x)$ (ここで, $i=1,2$) は, x に関する n 次多項式 $\widetilde{q_0}(n;x)$ の係数に影響を与えないことが分かる．実際，それらの $x=0$ での零点の位数は $n+1$ となるからである．同様に，$y_0(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開において，x^{n+1} 以降の項は $\widetilde{q_0}(n;x)$ の係数に影響を与えない．従って，次を得る：

補題 6.2 $\dfrac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}y_0(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$ と表す．このとき，

$$\widetilde{q_0}(n;1)=(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)\sum_{k=0}^{n}A_k. \tag{36}$$

次に A_k を求めることにしよう．一般に

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_lx^l\sum_{m=0}^{\infty}\beta_mx^m=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}\alpha_l\beta_{k-l}\right)x^k$$

である．$y_0(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)$ の x^l の係数は $\dfrac{\Gamma(\boldsymbol{a}+(l-1)\cdot\mathbf{1})}{l!}$ と表されることに注意すると[6]，

$$A_k=\sum_{l=0}^{k}\frac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}\frac{\Gamma(\boldsymbol{a}+(l-1)\cdot\mathbf{1})}{l!}\frac{\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{a}}+(k-l-n)\cdot\mathbf{1})}{(k-l)!}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
\Gamma(\boldsymbol{a}+(l-1)\cdot\mathbf{1})&=(\boldsymbol{a})_{l-1}\Gamma(\boldsymbol{a}),\\
\Gamma(\widetilde{\boldsymbol{a}}+(k-l-n)\cdot\mathbf{1})&=\frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})_{k-l-n}\Gamma(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})}{(1-b_1+k-l-n)(1-b_2+k-l-n)}\\
&=\frac{(-1)^{n+l-k}\Gamma(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})}{(1-b_1+k-l-n)(1-b_2+k-l-n)(\boldsymbol{a})_{n+l-k}},\\
\frac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}\Gamma(\boldsymbol{a})\Gamma(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})&=1
\end{aligned}$$

となることを使おう．ただし，

$$(\boldsymbol{\alpha})_n=\begin{pmatrix}\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\\ \beta_1,\beta_2\end{pmatrix}_n:=\frac{(\alpha_0)_n(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n}$$

[6] 式 (20) 参照.

を意味する．これらの関係式より，

$$
\begin{aligned}
A_k &= \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{n+l-k}(\boldsymbol{a})_{l-1}}{(1-b_1+k-l-n)(1-b_2+k-l-n)(\boldsymbol{a})_{n+l-k}\, l!(k-l)!} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{n+l-k}}{(1-b_1+k-l-n)(1-b_2+k-l-n)(\boldsymbol{a}+(l-1)\cdot\mathbf{1})_{n+1-k}\, l!(k-l)!} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{n+l-k}(b_1+l-1)_{n-k}(b_2+l-1)_{n-k}}{(a_0+l-1)_{n+1-k}(a_1+l-1)_{n+1-k}(a_2+l-1)_{n+1-k}\, l!(k-l)!}
\end{aligned}
$$

となる．こうして，A_k の表示が得られた．

最後に，この式と式 (36) を式 (35) に代入することで，$\widetilde{Q}_0^{(0)}(n)$ を以下のように表すことが出来る：

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{Q}_0^{(0)}(n) \\
&= \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}\widetilde{q}_0(n;1) \\
&= \frac{(a_0-1)_{n+1}(a_1-1)_{n+1}(a_2-1)_{n+1}}{n!(1-s)_n} \\
&\times \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{n+l-k}(b_1+l-1)_{n-k}(b_2+l-1)_{n-k}}{(a_0+l-1)_{n+1-k}(a_1+l-1)_{n+1-k}(a_2+l-1)_{n+1-k}\, l!(k-l)!} \\
&= \frac{1}{n!(1-s)_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^{n+l-k}\prod_{i=0}^{2}(a_i-1)_l(a_i+n+l-k)_{k-l}\prod_{j=1}^{2}(b_j-1+l)_{n-k}}{l!(k-l)!} \\
&= \frac{1}{n!(1-s)_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+l}\prod_{i=0}^{2}(a_i-1)_l(a_i+k+l)_{n-k-l}\prod_{j=1}^{2}(b_j-1+l)_{k}}{l!(n-k-l)!}.
\end{aligned}
$$

これは命題 3.2 に現れた $Q_0^{(0)}(n)$ に他ならない．こうして，$Q_0^{(0)}(n)$ が差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たすことが確かめられた．命題 3.2 に書いてあるように

$$
Q_0^{(0)}(0)=1, \quad Q_0^{(0)}(1)=\frac{a_0a_1+a_1a_2+a_2a_0-b_1b_2+s}{1-s} \tag{37}
$$

となることも容易に分かる．

注意 6.3 ここまで，仮定 (12), (13), $0<\mathrm{Re}\,s<1$ の下で，$Q_0^{(0)}(n)$ の表示式を導いてきた．しかし，これらの仮定は除去することが出来る．実際，初期条件 (37) を満たす差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解は $s\notin\mathbb{Z}_{\geq 1}$ の下で帰納的に定まり，それは $(\boldsymbol{a},x)$ の有理関数からなっている．一方で $Q_0^{(0)}(n)$ の表示式もまた同じ条件下で定義される．従って，仮定 $s\notin\mathbb{Z}_{\geq 1}$ の下で $\left\{Q_0^{(0)}(n)\right\}\left(=\left\{\widetilde{Q}_0^{(0)}(n)\right\}\right)$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ の解となる．

§6.2. $\widetilde{Q}_1^{(0)}(n)$ の表示式

$\widetilde{Q}_1^{(0)}(n)$ は $\widetilde{q}_1^{(0)}(n;1)$ を使って定められていた（式 (35) 参照）．そこで，まず $\widetilde{q}_1^{(0)}(n;1)$ の表示式から考える．補題 6.1 (ii)，式 (32), (33), (34) より，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{q}_1(n;1) &= -\frac{x}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))\cdot s\cdot x\,y_i(\boldsymbol{a};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)\Big|_{x=1} \\
&= -\frac{s}{\pi}\sum_{i=0}^{2}\sin\pi(\tau_i(\boldsymbol{a}))y_i(\boldsymbol{a};1)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};1)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

であり，また $\widetilde{q}_1(n;x)$ は $x\times$ (x の n 次多項式) と表されていた．ここで，式 (38) 中の $x\,y_i(\boldsymbol{a};x)\,y_i(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$ （ここで, $i=1,2$) は，x の n 次多項式 $\widetilde{q}_1(n;x)/x$ の係数に影響を与えない．実際，それらの $x=0$ での零点の位数は $n+1$ となるからである．同様に，$x\,y_0(\boldsymbol{a};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開において，x^{n+1} 以降の項は $\widetilde{q}_1(n;x)/x$ の係数に影響を与えない．従って，次を得る：

補題 6.4 $\dfrac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}y_0(\boldsymbol{a};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}B_kx^k$ と表す．このとき，

$$
\widetilde{q}_1(n;1) = -s\sum_{k=0}^{n-1}B_k. \tag{39}
$$

次に，$\widetilde{q}_1(n;1)$ と $\widetilde{q}_0(n;1)$ の間の関係を探ることにしよう．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}y_0(\boldsymbol{a};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x) \\
&= -\frac{\sin\pi(\tau_0(\boldsymbol{a}))}{\pi}\,y_0(\boldsymbol{a}-\mathbf{1};x)\,y_0(\widetilde{\boldsymbol{a}}-n\cdot\mathbf{1};x)|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\mathbf{1},\ n\to n-1}
\end{aligned}
$$

であるから，B_k は，補題 6.2 に現れた A_k を使って次のように表される：

$$
B_k = -A_k|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\mathbf{1},\ n\to n-1}. \tag{40}
$$

従って，式 (36), (39), (40) より，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{q}_1(n;1) &= s\sum_{k=0}^{n-1}(\,A_k|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\mathbf{1},\ n\to n-1}) = s\left(\sum_{k=0}^{n}A_k\right)\Bigg|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\mathbf{1},\ n\to n-1} \\
&= s\left(\frac{\widetilde{q}_0(n;1)}{(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\mathbf{1},\ n\to n-1}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

を得る．

以上の考察を下に，$\widetilde{Q}_1^{(0)}(n)$ と $Q_0^{(0)}(n)\bigl(=Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a};n)=\widetilde{Q}_0^{(0)}(n)\bigr)$ との間の関係を求めよう．式 (35), (41) より，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}_1^{(0)}(n) &= \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}\widetilde{q}_1(n;1)\\
&= \frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}\cdot s\left(\frac{\widetilde{q}_0(n;1)}{(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1},\ n\to n-1}\\
&= \frac{s}{n(1-s)}\left(\frac{(a_0-1)_{n+1}(a_1-1)_{n+1}(a_2-1)_{n+1}\cdot\widetilde{q}_0(n;1)}{n!(1-s)_n\cdot(a_0-1)(a_1-1)(a_2-1)}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1},\ n\to n-1}\\
&= \frac{s}{n(1-s)}\left(\frac{(a_0)_n(a_1)_n(a_2)_n}{n!(1-s)_n}\widetilde{q}_0(n;1)\right)\Bigg|_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1},\ n\to n-1}\\
&= \frac{s}{n(1-s)}Q_0^{(0)}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{1};n-1)
\end{aligned}
$$

を得る．こうして，$Q_1^{(0)}(n)$ の表示式が得られた．既に述べたように，$\{Q_1^{(0)}(n)\}$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たす．しかし，この初期条件は $\widetilde{Q}_1^{(0)}(0)=0,\ \widetilde{Q}_1^{(0)}(1)=\dfrac{s}{1-s}$ となるから，これを正規化した

$$
\left\{\frac{1-s}{s}\cdot\widetilde{Q}_1^{(0)}(n)\right\}
$$

を考えることにしよう．これが命題 3.2 に現れた $\{Q_1^{(0)}(n)\}$ となっている．勿論，注意 6.3 と同じ議論をすることで，仮定 $s\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のみの下で $\{Q_1^{(0)}(n)\}$ は差分方程式 $T^{(0)}(n)$ を満たすことが分かる．

以上のことから，仮定 $s\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の下で，$\{Q_0^{(0)}(n)\},\{Q_1^{(0)}(n)\}$ は $T^{(0)}(n)$ の独立解となることが分かった．ただし，これらを係数に持つ級数 (11) が，${}_3S_2^{(1,holo)}(\boldsymbol{a};x)$ を張るための十分条件として条件 (7) を課すことにする．こうして命題 3.2 が証明され，結果，定理 3.3 が得られたのである．

References

[1] W. Bühring, *The behavior at unit argument of the hypergeometric function ${}_3F_2$*, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987), pp. 1227–1234.

[2] A. Ebisu, *Apparent singular points of factors of reducible generalized hypergeometric equations*, Math. Nachr., 287 (2014), pp. 210–215.

[3] ———, *Four term relations for ${}_3F_2(x)$*, preprint, (2022).

[4] A. Ebisu and K. Iwasaki, *Three-term relations for ${}_3F_2(1)$*, J. Math. Anal. Appl., 463 (2018), pp. 593–610.

[5] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vol. I*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981.

[6] Y. Kajihara, *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications*, Adv. Math., 187 (2004), pp. 53–97.

[7] D. Karp and E. Prilepkina, *Hypergeometric differential equation and new identities for the coefficients of Nørlund and Bühring*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 12 (2016), pp. Paper No. 052, 23 pages.

[8] 岸岡広幸, 野海正俊, *Mellin* 変換と接続問題, 数理解析研究所講究録, 1662 (2009), pp. 231–260.

[9] K. Mimachi, *Connection matrices associated with the generalized hypergeometric function* ${}_3F_2$, Funkcial. Ekvac., 51 (2008), pp. 107–133.

[10] N. E. Nørlund, *Hypergeometric functions*, Acta Math., 94 (1955), pp. 289–349.

[11] K. Okubo, K. Takano, and S. Yoshida, *A connection problem for the generalized hypergeometric equation*, Funkcial. Ekvac., 31 (1988), pp. 483–495.