RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B91 (2023), 087–102

$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式のラックス形式
A 3×3 Lax form and q-Painlevé equations of type $E_6^{(1)}$

By

Kanam Park*

Abstract

In a previous work, the author introduced non-linear q-difference systems which include q-Garnier systems. These systems were given as a compatibility condition of linear q-difference equations whose coefficients were products of $N \times N$ matrices. In this paper, we consider a special case with $N = 3$ and derive a 3×3 matrix Lax form of the q-Painlevé equation of type $E_6^{(1)}$ and two kinds of characterizations of a 3rd-order scalar equation related to it. They seems to be new.

§1. はじめに

本稿の主題である $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式は，$E_6^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性を持つ q 差分方程式系であり，[2] において初めて導出された方程式系である．$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式のよく知られた式は

$$T : (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8; f, g) \to (a_1/q, a_2/q, a_3/q, a_4/q, a_5, a_6, a_7, a_8; \overline{f}, \overline{g}),$$

$$\frac{(\overline{f}g-1)(fg-1)}{f\overline{f}} = \frac{(g-1/a_5)(g-1/a_6)(g-1/a_7)(g-1/a_8)}{(g-a_3)(g-a_4)},$$

$$\frac{(\overline{f}g-1)(\overline{f}\overline{g}-1)}{g\overline{g}} = \frac{(\overline{f}-a_5)(\overline{f}-a_6)(\overline{f}-a_7)(\overline{f}-a_8)}{(\overline{f}-a_1/q)(\overline{f}-a_2/q)}, \tag{1.1}$$

$$q = \frac{a_1a_2}{a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$$

Received January 31, 2022. Revised December 21, 2022.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 14H70, 34M56, 39A13
Key Words: *Lax formalism, q-Painlevé equation*
*National Institute of Technology, Toba College, 1-1 Ikegami-cho, Toba City, Mie, 517-8501, Japan
e-mail: paku-k@toba-cmt.ac.jp

である．ここで，T は離散的な時間発展の変換であり，$\overline{*}$ は $T(*)$ を表す．また，f, g は従属変数，a_i $(1 \le i \le 8)$ はパラメーターである．方程式 (1.1) における本質的なパラメーターの個数は従属変数 f, g への適当なスケール変換により 6 である．

$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式のラックス形式に関する既知の結果を述べる．まず，行列型のラックス形式については [4], [10] の結果が知られている．[4] では 4 次元の q-Garnier 系 [3] の退化から得られており，[10] では直交多項式系の理論から得られている．いずれもその係数行列は 2 次の正方行列である．また，スカラー・ラックス形式については [14] の結果が知られている．[14] では，$E_8^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式のスカラー・ラックス形式を退化することによって得られており，変形される方程式は 2 階線形 q 差分方程式で与えられている．

本稿では $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式の 3 次の行列型ラックス形式と，それに付随する 3 階のスカラー方程式について報告する．内容は次の通りである．第 2 節では著者による関連論文から必要な内容をまとめる．第 3 節では 3 次の行列型ラックス形式について述べ，第 4 節では $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式に関する 3 階スカラー方程式について述べる．

§ 2. 因子化された行列型ラックス形式

この節では，著者による関連論文 [6] から，本稿において必要な部分をまとめる．

[6] において，横ベクトル $\Psi(z) = [\Psi_j(z)]_{j=1,2,\cdots,N}$（$\Psi_j(z)$ は未知関数）に対する以下の連立方程式

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \Psi(qz) = \Psi(z)A(z), \quad A(z) = DX_1^{\varepsilon_1}(z)X_2^{\varepsilon_2}(z)\cdots X_M^{\varepsilon_M}(z), \\ \overline{\Psi}(z) = \Psi(z)B(z), \quad B(z) = X_M^{-\varepsilon_M}(z/q)X_{M-1}^{-\varepsilon_{M-1}}(z/q) \end{cases}$$

によるラックス形式を考えた．ここで，$\varepsilon_i = \pm 1$ $(1 \le i \le M)$ であり，行列 D と $X_i(z)$ は

(2.2)

$$D = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_N], \quad X_i(z) = \mathrm{diag}[u_{1,i}, u_{2,i}, \cdots u_{N,i}] + \Lambda,$$

$$\Lambda = \sum_{1\le k\le N-1} E_{k,k+1} + zE_{N,1}, \quad E_{l,m} : (l,m) \text{ 成分が } 1\text{，他の成分は } 0 \text{ の } N \text{ 次正方行列}$$

を表す．$\{u_{j,i}\}_{\substack{1\le i\le M\\ 1\le j\le N}}$ と $\{c_i, d_j\}$ はそれぞれ，連立方程式 (2.1) のラックス形式における従属変数とパラメーターで

$$(2.3)\qquad \prod_{j=1}^{N} u_{j,i} = c_i \quad (1 \le i \le M)$$

を満たす．本稿では，方程式系 (2.1) の係数行列のように，積で表されることを「因子化」と呼んでいる．

さらに，$\ast$ はパラメーター $\{c_i, d_j\}$ に対して次のように作用する：

• $\varepsilon_{M-1} = \varepsilon_M = +1$ のとき

$$\begin{gathered}\overline{c_i} = c_i \quad (1 \le i \le M-2), \quad \overline{c_{M-1}} = qc_{M-1}, \quad \overline{c_M} = qc_M, \\ \overline{d_1} = d_N, \quad \overline{d_j} = d_{j-1}/q \quad (2 \le j \le N).\end{gathered} \tag{2.4}$$

• $\varepsilon_{M-1} = -\varepsilon_M$ のとき

$$\begin{gathered}\overline{c_i} = c_i \quad (1 \le i \le M-2), \quad \overline{c_{M-1}} = qc_{M-1}, \quad \overline{c_M} = qc_M, \\ \overline{d_j} = d_j \quad (1 \le j \le N).\end{gathered} \tag{2.5}$$

• $\varepsilon_{M-1} = \varepsilon_M = -1$ のとき

$$\begin{gathered}\overline{c_i} = c_i \quad (1 \le i \le M-2), \quad \overline{c_{M-1}} = qc_{M-1}, \quad \overline{c_M} = qc_M, \\ \overline{d_j} = qd_{j+1} \quad (1 \le j \le N-1), \quad \overline{d_N} = d_1.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Definition 2.1 ([6], Definition 2.1.)**.** 従属変数 $\{u_{j,i}\}_{\substack{1 \le i \le M, \\ 1 \le j \le N}}$ が満たす非線形 q 差分方程式系 $\mathcal{P}_{N,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M)}$ を，連立方程式 (2.1) に対する以下の両立条件

$$A(z)B(qz) = B(z)\overline{A(z)} \tag{2.7}$$

で定義する．

方程式系 $\mathcal{P}_{N,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M)}$ は行列 $X_i(z)$ の数と，その逆行列 $X_i^{-1}(z)$ の数にのみ依存する．したがって，$M_\pm = \#\{\varepsilon_i | \varepsilon_i = \pm 1\}$ と表し，方程式系 $\mathcal{P}_{N,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_M)}$ を $\mathcal{P}_{N,(M_+,M_-)}$ と表す．

方程式系 $\mathcal{P}_{N,(M_+,M_-)}$ と既知の方程式系との関係について述べる．まず, $(M_+, M_-, N) = (2m+2, 0, 2)$ の場合，(2.1) における第 1 式は，$2m$ 次元 q-Garnier 系 [3] に関する線形 q 差分方程式と等価である．また，$(M_+, M_-, N) = (2, 0, 2n+2)$ の場合，(2.1) における第 1 式は，$2n$ 次元の方程式系 q-$P_{(n+1,n+1)}$[12] に関する線形 q 差分方程式と等価である．以上において，$m = 1$, $n = 1$ のとき，つまり $(M_+, M_-, N) = (4, 0, 2)$, $(2, 0, 4)$ のとき，それぞれ 2 次元の方程式系 q-$P_{\rm VI}$ [9] に関する線形 q 差分方程式と等価である．

ここで，方程式 (2.1) の第 1 式が 2 次元の方程式系を与える場合について考える．方程式系 $\mathcal{P}_{N,(M_+,M_-)}$ は $(M_+, M_-, N) = (4, 0, 2)$, $(2, 0, 4)$ のとき 2 次元の方程式系 q-$P_{\rm VI}$ [9] を含む．本稿では，方程式系 $\mathcal{P}_{N,(M_+,M_-)}$ が，方程式系 q-$P_{\rm VI}$ [9] 以外に 2 次元の方程式系を与える場合として，$(M_+, M_-, N) = (3, 0, 3)$ の場合を考えた．

§ 3. 3 次の行列型ラックス形式

$(M_+, M_-, N) = (3, 0, 3)$ の場合，(2.1) の第 1 式は

$$\Psi(qz) = \Psi(z)A(z), \quad A(z) = DX_1(z)X_2(z)X_3(z) \tag{3.1}$$

であり，行列 D, $X_i(z)$ $(1 \le i \le 3)$ は

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad X_i(z) = \begin{bmatrix} u_{1,i} & 1 & 0 \\ 0 & u_{2,i} & 1 \\ z & 0 & u_{3,i} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

である．また，$\{u_{j,i}\}_{1\le i,j\le 3}$, $\{b_j,\ c_i,\ d_j\}$ はそれぞれ，方程式 (3.1), (3.2) のモノドロミー保存変形方程式の従属変数とパラメーターで

$$\prod_{i=1}^{3} u_{j,i} = b_j \quad (1 \le j \le 3), \quad \prod_{j=1}^{3} u_{j,i} = c_i \quad (1 \le i \le 3), \tag{3.3}$$
$$b_1 b_2 b_3 = c_1 c_2 c_3$$

を満たすものとする．ここで，パラメーター $\{b_j,\ c_i,\ d_j\}$ について述べる．方程式 (3.1) の $z = 0$ における特性指数は b_1d_1, b_2d_2, b_3d_3 であり，$z = \infty$ における特性指数は d_1, d_2, d_3 である．(3.3) の第 1 式は $z = 0$ における特性指数の条件と等価な条件式である．また，パラメーター c_1, c_2, c_3 は行列 $A(z)$ の行列式の根

$$|A(z)| = d_1 d_2 d_3 (z + c_1)(z + c_2)(z + c_3) \tag{3.4}$$

であり，(3.3) の第 2 式は (3.4) と等価な条件式である．

次に，方程式 (3.1) のモノドロミー保存変形方程式の従属変数の個数について述べる．方程式 (3.1) のモノドロミー保存変形方程式の従属変数は，係数行列 $A(z)$ が持つ $\{u_{j,i}\}$ $(1 \le i, j \le 3)$ であり，9 つある．そのうち，条件 (3.3) によって変数を 5 つ減らすことができる．さらに，定数倍を除く 3 次の対角行列 G によるゲージ変換 $\widetilde{\Psi}(z) = \Psi(z)G$ により，変数を 2 つ減らすことができる．以上より，方程式 (3.1) のモノドロミー保存変形方程式の持つ本質的な従属変数の数は 2 である．

続いて，方程式 (3.1) のモノドロミー保存変形方程式の持つパラメーターの個数について述べる．パラメーターは係数行列 $A(z)$ に含まれる $\{b_j,\ c_i,\ d_j\}$ $(1 \le i, j \le 3)$ であり，9 つある．そのうち，ゲージ変換 $\Psi(z) = z^k \Psi'(z)$ と線形方程式 (3.1) の独立変数 z のスケール変換 $z = lz'$ により，パラメーターを 2 つ減らすことができる．さらに条件 (3.3) の第 3 式によって，パラメーターを 1 つ減らすことができる．以上より，本質的なパラメーターの個数は 6 である．

Remark. 方程式 (3.1) は，[13] における $m = 3$, $n = 1$ の場合と本質的に一致する．

§ 3.1. $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式が得られる変形

方程式 (3.1) を，定数倍を除く対角行列によるゲージ変換によって

$$\Psi(qz) = \Psi(z)A(z), \quad A(z) = \begin{bmatrix} b_1d_1 & 1 & v_1 \\ 0 & b_2d_2 & 1 \\ 0 & 0 & b_3d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ v_2 & d_2 & 0 \\ v_3 & v_4 & d_3 \end{bmatrix} z \tag{3.5}$$

のように表す．方程式 (3.5) における係数行列の行列式 $|A(z)|$ は
(3.6)
$$d_1d_2d_3z^3+(b_1d_1d_2d_3+b_2d_1d_2d_3+b_3d_1d_2d_3-d_3v_2-d_2v_1v_3-d_1v_4+v_1v_2v_4)z^2 \\ +(-b_3d_3v_2+b_2d_2(b_3d_1d_3-v_1v_3)+b_1d_1(b_2d_2d_3+b_3d_2d_3-v_4)+v_3)z+c_1c_2c_3d_1d_2d_3$$

である．方程式 (3.5) の係数行列 $A(z)$ がもつ変数 v_2, v_3 は，式 (3.6) と行列式の条件 (3.4) の z^2 と z の係数を比較することにより，変数 v_1, v_4 の有理関数で一意的に定まる．

方程式 (3.5) に対する接続保存変形として，パラメーターが

$$T_1:(b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3)\to\left(b_1,qb_2,\frac{b_3}{q},c_1,c_2,c_3,qd_1,d_2,qd_3\right) \tag{3.7}$$

と変形されるものを考える．このとき，ある行列 $B(z)$ を用いて

$$T_1\Psi(z)=B(z)\Psi(z) \tag{3.8}$$

と表せる．ここで，係数行列 $B(z)$ は z に関する有理関数である [9]．

実際には，[9] における行列 $B(z)$ の決定に関する議論より，行列 $B(z)$ は z に関する 1 次式となる．そのことは次のようにしてわかる：

(i) 変形 T_1 は行列 $A(z)$ の行列式の根 c_i を変形しないため，行列 $B(z)$ は $z=-q^kc_i$ $(k\in\mathbb{Z})$ において極を持たない．つまり，$z=0,\infty$ 以外に極を持たない．

(ii) 変形 T_1 は線形方程式 (3.5) の $z=0$ における特性指数を

$$T_1:(b_1d_1,b_2d_2,b_3d_3)\to(qb_1d_1,qb_2d_2,b_3d_3) \tag{3.9}$$

と変形する．これより，行列 $B(z)$ は $z=0$ の近くで

$$B(z)=B_0+B_1z+\mathcal{O}(z^2) \tag{3.10}$$

のようにふるまう．

(iii) 変形 T_1 は線形方程式 (3.5) の $z=\infty$ における特性指数を

$$T_1:(d_1,d_2,d_3)\to(qd_1,d_2,qd_3) \tag{3.11}$$

と変形する．これより，行列 $B(z)$ は $z=\infty$ の近くで

$$B(z)=B_1z+B_0+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{3.12}$$

のようにふるまう．

以上のことから，行列 $B(z)$ は z に関して 1 次式である．
　次に，行列 $B(z)$ を z の 1 次式

$$B(z) = B_0 + B_1 z, \quad B_i = [\beta^i_{j,k}]_{1 \le j,k \le 3} \quad (i = 1,\ 2) \tag{3.13}$$

で表す．係数行列 $A(z)$ と $B(z)$ による両立条件式

$$B(z)\overline{A(z)} = A(z)B(qz) \quad (\overline{*} = T_1(*)) \tag{3.14}$$

における z の係数を比較すると，次の 3 つの関係式

$$B_0\overline{A_0} = A_0 B_0, \quad B_1\overline{A_0} + B_0\overline{A_1} = qA_0B_1 + A_1B_0, \quad B_1\overline{A_1} = qA_1B_1 \tag{3.15}$$

を得る．ここで，行列 A_i は (3.5) における行列 $A(z)$ の z^i の係数行列を表す．(3.15) の第 1 式において，行列 A_0 が上三角行列より，行列 B_0 も上三角行列である．また，(3.15) の第 3 式において，行列 A_1 が下三角行列より，行列 B_1 も下三角行列である．最後に，行列 B_0, B_1 の具体形を示す．(3.15) の第 1 式から行列 B_0 は

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0\,0 & \dfrac{\beta^0_{2,3}(b_2d_2v_1 - b_3d_3v_1 - 1)}{b_1d_1 - b_3d_3} \\ 0\,0 & \beta^0_{2,3} \\ 0\,0 & -\beta^0_{2,3}(b_2d_2 - b_3d_3) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

であり，(3.15) の第 3 式から，行列 B_1 は
(3.17)

$$B_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{(d_1 - d_2)\beta^1_{2,1}}{v_2} & 0 & 0 \\ \beta^1_{2,1} & 0 & 0 \\ \frac{d_1qv_3\overline{v_4}\beta^1_{2,1} + d_2\left(v_2\overline{v_3}\beta^1_{3,2} - qv_3\overline{v_4}\beta^1_{2,1}\right) + v_2\left(qv_4\overline{v_4}\beta^1_{2,1} - \beta^1_{3,2}(d_3q\overline{v_3} + \overline{v_2v_4})\right)}{(d_1 - d_3)qv_2\overline{v_4}} & \beta^1_{3,2} & -\dfrac{\beta^1_{3,2}(d_2 - d_3q)}{\overline{v_4}} \end{bmatrix}$$

である．さらに，(3.15) の第 2 式から時間発展 $\overline{v_i}$ と $\beta^0_{2,3}$, $\beta^1_{2,1}$ が求められる．$\beta^0_{2,3}$, $\beta^1_{2,1}$

はそれぞれ

(3.18)

$$\begin{aligned}
\beta^0_{2,3} = {} & \beta^1_{3,2} q(b_1d_1 - b_3d_3)(d_1 - d_2 - v_1v_2) \\
& (-b_2^2d_2^2qv_1v_2(d_3q - d_1 + v_1v_2) - b_3d_3d_2qv_2 - 2b_3^2d_3^2d_2qv_1v_2 + b_3d_3d_2qv_1v_3 \\
& +b_2d_2(b_3d_3(d_1q(d_3(-(q-1)) - 2v_1v_2) + qv_1v_2(d_3q + 2v_1v_2) + d_2(d_3(q-1)q + (2q-1)v_1v_2)) \\
& +q\big(d_3qv_2 + d_1(v_1v_3 - v_2) + v_1\big(-d_2v_3 + v_2^2 - v_1v_3v_2\big)\big)) \\
& +b_3d_3d_2qv_4 - b_3^2d_3^2qv_1^2v_2^2 - b_3d_3qv_1v_2^2 - b_3d_3^2qv_2 + b_3d_1d_3qv_2 + b_3^2d_1d_3^2qv_1v_2 - b_3d_1d_3qv_1v_3 \\
& +b_3d_3qv_1^2v_2v_3 - b_3d_1d_3qv_4 + b_3d_3qv_1v_2v_4 + b_1d_1(b_3d_3(d_2qv_1v_2 - d_3qv_1v_2 + d_2^2(q-1) \\
& -d_1d_2(q-1)) + b_2d_2q(d_2(d_3(-q) + d_3 - v_1v_2) + d_1d_3(q-1) + d_3v_1v_2) \\
& +qv_4(d_1 - d_2 - v_1v_2)) - b_3^2d_3^2d_2^2q + b_3^2d_1d_3^2d_2q + b_3d_3d_2v_2 + b_3^2d_3^2d_2v_1v_2 \\
& +b_3^2d_3^2d_2^2 - b_3^2d_1d_3^2d_2 + d_2qv_3 - d_1qv_3 + qv_1v_2v_3)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\beta^1_{2,1} = \beta^1_{3,2}\frac{qv_2(b_1d_1v_1 - b_2d_2v_1 + 1)}{v_2(1 - b_2d_2v_1) + b_3d_3(-d_1 + d_2 + v_1v_2) + b_1d_1(d_1 - d_2)}$$

である．ここで，時間発展 $\overline{v_i}$ $(1 \le i \le 4)$ は $\beta^1_{3,2}$ に依存しないため，$\beta^1_{3,2} = 1$ とする．以上により，方程式 $T_1\Psi(z) = \Psi(z)B(z)$ は

(3.19)

$$T_1\Psi(z) = \Psi(z)B(z), \quad B(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_4 & 0 & 0 \\ w_5 & 0 & 0 \\ w_6 & 1 & w_7 \end{bmatrix} z,$$

$$T_1 : (b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3; v_1, v_4) \to \left(b_1, qb_2, \frac{b_3}{q}, c_1, c_2, c_3, qd_1, d_2, qd_3; \overline{v_1}, \overline{v_4}\right)$$

のような形で表される．

線形方程式系 (3.5), (3.19) に対して，次が成り立つ．

Theorem 3.1 ([7])**.** 線形方程式系 (3.5), (3.19) の両立条件

(3.20) $$B(z)\overline{A(z)} = A(z)B(qz)$$

を解くことにより，以下の方程式

(3.21)
$$\begin{aligned}
\frac{(fg-1)(\overline{f}g-1)}{f\overline{f}} &= \frac{(g-1/c_1)(g-1/c_2)(g-1/c_3)(g-d_2/b_3d_3)}{(g-1/b_2)(g-d_2/b_1d_1)}, \\
\frac{(\overline{f}g-1)(\overline{f}\overline{g}-1)}{g\overline{g}} &= \frac{(\overline{f}-c_1)(\overline{f}-c_2)(\overline{f}-c_3)(\overline{f}-b_3d_3/d_2)}{(\overline{f}-b_3d_3/d_1)(\overline{f}-b_3/q)}
\end{aligned}$$

を得る．ここで

(3.22) $$f = \frac{b_3d_3}{d_3 - v_1v_4}, \quad g = \frac{d_2v_1}{b_2d_2v_1 - 1}$$

であり，$\overline{*}$ は $T_1(*)$ を表す．

証明の概略を述べる．両立条件式 $A(z)B(qz) = B(z)\overline{A(z)}(\overline{*} = T_1(*))$ を解くことにより，変数 v_i $(1 \leq i \leq 4)$ の時間発展 $\overline{v_i}$ が，変数 $\{v_k\}_{1\leq k\leq 4}$ の有理関数で得られる．時間発展 $\overline{v_1}$, $\overline{v_4}$ を表す方程式に含まれる変数 v_2, v_3 を，行列式の条件 (3.4) から v_1, v_4 で表すことにより，$\overline{v_1}$, $\overline{v_4}$ はそれぞれ v_1, v_4 の有理関数で表される：

$$\overline{v_1} = \frac{N_1(v_1,\ v_4)N_2(v_1,\ v_4)}{D_1(v_1,\ v_4)D_2(v_1,\ v_4)}, \quad \overline{v_4} = \frac{N_3(v_1,\ v_4)}{D_3(v_1,\ v_4)D_4(v_1,\ v_4)},$$

(3.23)

$$\begin{array}{ll} N_1(v_1,\ v_4) : (2,\ 1) \text{ 次の多項式}, & D_1(v_1,\ v_4) : (1,\ 0) \text{ 次の多項式}, \\ N_2(v_1,\ v_4) : (3,\ 1) \text{ 次の多項式}, & D_2(v_1,\ v_4) : (4,\ 3) \text{ 次多項式}, \\ N_3(v_1,\ v_4) : (4,\ 3) \text{ 次の多項式}, & D_3(v_1,\ v_4) : (2,\ 1) \text{ 次の多項式}, \\ & D_4(v_1,\ v_4) : (2,\ 1) \text{ 次の多項式}. \end{array}$$

しかし，(3.23) はよく知られた $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式の形 (1.1) には程遠い．したがって，時間発展の方程式 $\overline{v_1}$, $\overline{v_4}$ (3.23) の特異点を調べ，変数変換 (3.22) をして近い形に書き直す．つまり，時間発展の方程式 (3.23) の右辺が不定となる点を調べ，それらと $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式 (1.1) の特異点が対応するような変換を考える．このような変換の方法は [1] による．(3.23) の特異点を調べると，有限な範囲で以下の 4 点

(3.24)

$$(v_1,\ v_4) = \left(-\frac{1}{(u^{-1} - b_2)d_2}, -\frac{(u^{-1} - b_3)(u^{-1} - b_2)d_3d_2}{u^{-1}}\right)$$

$$(u = c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1}, d_2/b_3d_3)$$

が見つかる．この 4 点 (3.24) が，曲線 $fg = 1$ 上に移るような変換を考えると，(3.22) が得られる．これにより，f と g の時間発展の方程式として (3.21) が得られる．

Remark. (1.1) におけるパラメーター a_k $(1 \leq k \leq 8)$ と，(3.21) におけるパラメーター b_j, c_i, d_j $(1 \leq i, j \leq 3)$ との対応は

(3.25)

$$a_1 = \frac{qb_3d_3}{d_1}, \quad a_2 = b_3, \quad a_3 = \frac{d_2}{b_1d_1}, \quad a_4 = \frac{1}{b_2},$$

$$a_5 = c_1, \quad a_6 = c_2, \quad a_7 = c_3, \quad a_8 = \frac{b_3d_3}{d_2}$$

である．

以上より， 連立方程式 (3.5), (3.19) の両立条件式を解くことにより, $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式を得た.

§ 3.2. 特性指数に関する変形

§3.1 における変形 T_1 は式 (3.5) の $z = 0, \infty$ における特性指数がそれぞれ 2 つずつ，1 回 q シフトされるような変形として選んだ．本節では，変形 T_1 の他に方程式 (3.5) の

特性指数の q シフトを与える 18 通りの変形について述べる．以下の表はそれらをまとめたものである．

(3.26)

	$z=0$			$z=\infty$					
	b_1d_1	b_2d_2	b_3d_3	d_1	d_2	d_3	b_1	b_2	b_3
1.	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2.	1	0	0	0	1	0	1	−1	0
3.	1	0	0	0	0	1	1	0	−1
4.	0	1	0	1	0	0	−1	1	0
5.	0	1	0	0	1	0	0	0	0
6.	0	1	0	0	0	1	0	0	0
7.	0	0	1	1	0	0	−1	0	1
8.	0	0	1	0	1	0	0	−1	1
9.	0	0	1	0	0	1	0	0	0
10.	1	1	0	1	1	0	0	0	0
11.	1	1	0	1	0	1	0	1	−1
12.	1	1	0	0	1	1	1	0	−1
13.	1	0	1	1	1	0	0	−1	1
14.	1	0	1	1	0	1	0	0	0
15.	1	0	1	0	1	1	1	−1	0
16.	0	1	1	1	1	0	−1	0	1
17.	0	1	1	1	0	1	−1	1	0
18.	0	1	1	0	1	1	0	0	0

ここで，−1, 0, 1 は q^i $(i=-1,0,1)$ をパラメーターにかけることを表す．変形 T_1 は以上 18 個の変形のうち 11 番に相当する．

以上の各変形方向に対応する変形方程式 $\overline{\Psi(z)}=\Psi(z)B(z)$ は，§3.1 で述べた変形方程式 (3.19) の導出方法と同様にして得られる．

Example 3.2. 表 (3.26) における 1 番目の変形方向 $(\overline{d_1}=qd_1)$ に対する変形方程式は

$$\overline{\Psi(z)}=\Psi(z)B(z),\quad B(z)=\begin{bmatrix}0 & w_1 & w_2\\ 0 & w_3 & w_4\\ 0 & 0 & w_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_6 & 0 & 0\\ w_7 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}z \tag{3.27}$$

である．ここで，変数 w_i $(1 \leq i \leq 7)$ は

(3.28)

$$
\begin{aligned}
w_1 = {} & (-b_3d_3d_1v_2 + b_1d_1(-b_2(d_1-d_2)d_2(d_1-d_3) - b_3(d_1-d_2)d_3(d_1-d_3) + d_1v_2 - d_3v \\
& +d_1v_1v_3 - d_2v_1v_3 + v_1v_2v_4) + b_3d_3^2v_2 - b_2d_2(v_1(d_1v_3 - d_2v_3 + v_2v_4) - b_3(d_1-d_2)(d_1-d_3)d_3) \\
& +b_1^2(d_1-d_2)(d_1-d_3)d_1^2 + d_1v_3 - d_2v_3 + v_2v_4)\cdot \\
& ((d_1v_3 - d_2v_3 + v_2v_4)(b_1^2d_1^2(d_1 - d_2 - v_1v_4) + b_1d_1(b_2d_2(-d_1 + d_2 + 2v_1v_4) + b_3(d_2 - d_1)d_3 \\
& +v_2 + v_1v_3 - v_4) - b_3d_3v_2 - b_2^2d_2^2v_1v_4 + b_2d_2(b_3(d_1-d_2)d_3 - v_1v_3 + v_4) + v_3))^{-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2 &= w_1\frac{(d_1-d_2)(b_1d_1v_1 - b_2d_2v_1 + 1)}{v_2(1 - b_2d_2v_1) + b_3d_3(-d_1 + d_2 + v_1v_2) + b_1d_1(d_1-d_2)}, \\
w_3 &= w_1(b_2d_2 - b_1d_1), \\
w_4 &= w_2\frac{v_2}{d_1-d_2}, \\
w_5 &= -w_2\frac{(b_1d_1 - b_3d_3)(b_1d_1(d_1-d_2) + b_2d_2(d_2-d_1) + v_2)}{(d_1-d_2)(b_1d_1v_1 - b_2d_2v_1 + 1)}, \\
w_6 &= \frac{(d_1-d_2)(d_1-d_3)}{(d_1v_3 - d_2v_3 + v_2v_4)}, \\
w_7 &= w_6\frac{v_2}{d_1-d_2}
\end{aligned}
$$

である．連立方程式 (3.5), (3.27), (3.28) に対する両立条件式

$$A(z)B(qz) = B(z)\overline{A(z)} \tag{3.29}$$

を解くと，変数 v_1, v_4 の時間発展の方程式が得られる：

$$
\begin{gathered}
\overline{v}_1 = \frac{G_1(v_1,v_4)G_2(v_1,v_4)G_3(v_1,v_4)}{G_4(v_1,v_4)G_5(v_1,v_4)}, \quad \overline{v}_4 = \frac{H_1(v_1,v_4)H_2(v_1,v_4)}{H_3(v_1,v_4)H_4(v_1,v_4)}, \\
\begin{aligned}
&G_1(v_1,v_4) : (1,\ 0)\ \text{次式の多項式}, && H_1(v_1,v_4) : (2,\ 1)\ \text{次式の多項式}, \\
&G_2(v_1,v_4) : (2,\ 1)\ \text{次式の多項式}, && H_2(v_1,v_4) : (2,\ 2)\ \text{次式の多項式}, \\
&G_3(v_1,v_4) : (2,\ 2)\ \text{次式の多項式}, && H_3(v_1,v_4) : (2,\ 1)\ \text{次式の多項式}, \\
&G_4(v_1,v_4) : (2,\ 1)\ \text{次式の多項式}, && H_4(v_1,v_4) : (2,\ 2)\ \text{次式の多項式}, \\
&G_5(v_1,v_4) : (3,\ 2)\ \text{次式の多項式}.
\end{aligned}
\end{gathered}
\tag{3.30}
$$

§ 3.3.　行列の互換による変形

本節では，線形方程式 (3.1) に対する変形方程式として

$$T_2\Psi(z) = \Psi(z)B(z) = \Psi(z)X_3(z/q)^{-1} \tag{3.31}$$

をとる．このとき，変形 T_2 がパラメーター b_j, c_i, d_j と変数 $u_{j,i}$ へどのように作用するかについて述べる．

まず, 連立方程式 (3.1), (3.31) に対する両立条件式 $B(z)\overline{A(z)} = A(z)B(qz)$ $(\overline{*} = T_2(*))$ が成り立つこと，つまり，方程式

$$X_3(z/q) \cdot DX_1(z)X_2(z) = \overline{DX_1}(z)\overline{X_2}(z)\overline{X_3}(z), \quad \overline{*} = T_2(*) \tag{3.32}$$

を満たす行列 $\overline{D}$, $\overline{X_i}(z)$ が一意的に存在することを述べる．パラメーター b_j, c_i, d_j, 変数 $u_{j,i}$ に対して，次の 2 つの変換 δ, $s_{i,k}$ [5, 6] を考える：

(3.33)

$$\delta(b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3; u_{j,l}, u_{j,3})$$
$$= \left(\frac{b_1d_1}{d_2}, \frac{b_2d_2}{d_3}, \frac{b_3d_3}{d_4}, c_1, c_2, qc_3, d_2, d_3, d_4; u_{j,l}, \frac{d_j}{d_{j+1}}u_{j,3}\right) \quad (1 \leq j \leq 3,\ l \neq 3), \quad d_4 = \frac{d_1}{q},$$

(3.34)

$$s_{i,k}(b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3; u_{j,i}, u_{j,k})$$
$$= \left(b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3; u_{j,i}\frac{Q_{j-1,(i,k)}}{Q_{j,(i,k)}}, u_{j,k}\frac{Q_{j,(i,k)}}{Q_{j-1,(i,k)}}\right) \quad (1 \leq i, k \leq 3),$$
$$Q_{j,(i,k)} = \sum_{a=1}^{3}\left(\prod_{l=1}^{a-1} u_{j+l,k} \prod_{l=a+1}^{3} u_{j+l,i}\right), \quad u_{m+3,i} = u_{m,i} \quad (1 \leq m \leq 3).$$

(3.33), (3.34) はそれぞれ以下のように書き換えられる．

$$\delta(DX_3(z)) = X_3(z/q)D, \tag{3.35}$$

$$s_{i,k}(X_i(z)X_k(z)) = X_k(z)X_i(z). \tag{3.36}$$

これらを用いると，方程式 (3.32) の左辺は

$$X_3(z/q) \cdot DX_1(z)X_2(z) = \delta s_{1,3}s_{2,3}(DX_1(z)X_2(z)X_3(z)). \tag{3.37}$$

と表せ，変換 δ, $s_{i,k}$ は一意的なので,

$$\delta s_{1,3}s_{2,3}(DX_1(z)X_2(z)X_3(z)) = \overline{DX_1}(z)\overline{X_2}(z)\overline{X_3}(z), \quad \overline{*} = T_2(*) \tag{3.38}$$

が成り立つ．よって，$T_2 = \delta s_{1,3}s_{2,3}$ である．

以上より，方程式 (3.1) に対する変形方程式として,

(3.39)

$$T_2\Psi(z) = \Psi(z)B(z), \quad B(z) = X_3(z/q)^{-1},$$
$$T_2 : (b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3; u_{j,i}) \to \left(\frac{b_1d_1}{d_2}, \frac{b_2d_2}{d_3}, \frac{b_3d_3}{d_4}, c_1, c_2, c_3q, d_2, d_3, d_4; \overline{u_{j,i}}\right), \quad d_4 = \frac{d_1}{q}$$

をとれる．

Remark. [6] において，行列 $X_i(z)^{\pm 1}$ の積を係数に持つ線形方程式のモノドロミー保存変形方程式を，行列 $X_i(z)^{\pm 1}$ の互換 ([6] Proposition 2.1) によって得た．変形方向 T_2 はそこで扱ったものの一部である．

本節では，線形方程式 (3.1) において，変数 x, y とゲージ自由度 w_1, w_2 を，変数 $\{u_{j,i}\}$ で

$$x = \frac{u_{1,1}u_{1,2}u_{2,1}u_{2,2}}{u_{1,1}+u_{2,2}}, \quad y = \frac{1}{u_{1,1}u_{1,2}(u_{2,1}+u_{3,2})}, \quad w_1 = u_{1,1}, \quad w_2 = u_{1,3} \tag{3.40}$$

と定める．

線形方程式系 (3.1), (3.39), (3.40) に対して，次が成り立つ．

Theorem 3.3 ([7])**.** 線形方程式系 (3.1), (3.39), (3.40) の両立条件

$$B(z)\overline{A(z)} = A(z)B(qz) \tag{3.41}$$

を解くことにより，以下の方程式

$$\frac{\overline{x}+c_1}{\overline{x}+c_2} = \frac{E_1E_2}{E_3E_4}, \quad \frac{c_1\overline{y}+1}{c_2\overline{y}+1} = \frac{F_1F_2}{F_3F_4} \tag{3.42}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}
&E_1 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_1d_3y(c_2+x))+c_1d_2d_3x(c_2y+1),\\
&E_2 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_3d_3qy(c_1+x))+c_3d_2d_3qx(c_1y+1),\\
&E_3 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_2d_3y(c_1+x))+c_2d_2d_3x(c_1y+1),\\
&E_4 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_3d_3qy(c_2+x))+c_3d_2d_3qx(c_2y+1),\\
&F_1 = E_1, F_2 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_2d_3y(c_1+x))+c_3d_2d_3qx(c_1y+1),\\
&F_3 = E_3, F_4 = b_1d_1(b_2d_2(1-xy)+c_1d_3y(c_2+x))+c_3d_2d_3qx(c_2y+1)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

であり，$\overline{*}$ は $T_2(*)$ を表す．

証明は直接計算である．連立方程式 (3.1), (3.39), (3.40) に対する両立条件式 $A(z)B(qz) = B(z)\overline{A(z)}$ ($\overline{*} = T_2(*)$) を解くことにより，x, y の時間発展の方程式を得る．$\overline{x}$, $\overline{y}$ の特異点は

$$\begin{aligned}
(x,y) = &\left(-c_1, -\frac{1}{c_1}\right), \quad \left(-c_2, -\frac{1}{c_2}\right), \quad \left(-\frac{b_1d_1}{d_2}, -\frac{d_2}{b_1d_1}\right), \quad \left(-\frac{b_1b_2}{c_3}, -\frac{c_3}{b_1b_2}\right),\\
&(-b_2, 0), \quad \left(-\frac{b_1b_2d_1}{c_3d_3q}, 0\right),\\
&\left(0, -\frac{1}{b_1}\right), \quad \left(0, -\frac{b_2d_2}{c_1c_2d_3}\right)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

であり，曲線 $xy(xy-1)=0$ 上に 8 点ある．(3.44) より，$\dfrac{\overline{x}+c_1}{\overline{x}+c_2}, \dfrac{c_1\overline{y}+1}{c_2\overline{y}+1}$ を計算すると (3.42) を得る．

§ 4. $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式に関する 3 階スカラー方程式

本節では，$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式に関する線形方程式 (3.1)–(3.3) から 3 階スカラー方程式を導出し，その特徴付けについて述べる．

線形方程式 (3.1)–(3.3) のモノドロミー保存変形方程式の変数 $\{u_{j,i}\}$ $(1 \le i,j \le 3)$ について，独立な 4 変数を改めて

$$u_1 = u_{1,2}u_{2,1}u_{2,2}, \quad u_2 = \frac{u_{2,2}}{u_{1,1}}, \quad w_1 = \frac{1}{u_{1,1}u_{1,2}}, \quad w_2 = \frac{1}{u_{1,1}} \tag{4.1}$$

とおく．線形方程式 (3.1)–(3.3) における未知関数 $\Psi_2(z), \Psi_3(z)$ を消去して，$\Psi_1(z)$ に関する線形 q 差分方程式を導出し，さらに，それを決定づける特徴を 2 種類考察する．

線形方程式 (3.1)–(3.3) から $\Psi_2(z), \Psi_3(z)$ を消去すると，$\Psi_1(z) =: \Phi(z)$ に関して，次の 3 階 q 差分方程式

$$L(z) = P_3(z)\Phi(q^3z) + P_2(z)\Phi(q^2z) + P_1(z)\Phi(qz) + P_0(z)\Phi(z) = 0 \tag{4.2}$$

を得る．ここで，係数 $P_i(z)$ $(1 \le i \le 3)$ は z に関する次のような多項式である：

$$\begin{aligned}
P_3(z) &= p_{31}(z-u),\\
P_2(z) &= p_{22}z^2 + p_{21}z + p_{20},\\
P_1(z) &= p_{13}z^3 + p_{12}z^2 + p_{11}z + p_{10},\\
P_0(z) &= -P_3(qz)d_1d_2d_3(z+c_1)(z+c_2)(z+c_3).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで変数 u は u_1 と u_2 で表され，$\Psi_2(z), \Psi_3(z)$ を消去する中で現れた見かけの特異点である．変数 v を係数 $P_i(z)$ $(1 \le i \le 3)$ の比として

$$v := \frac{P_0(u)}{P_1(u/q)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u/q)} = \frac{P_2(u)}{P_3(u/q)} \tag{4.4}$$

のように定義する．式 (4.4) の後半 2 個の等号は，$z=u$ が見かけの特異点であることから得られ，方程式 (4.2), (4.3) はこの条件を自動的に満たす．このとき，各係数 $p_{k,l}$ $(1 \le k \le 3,\ 0 \le l \le 3)$ は，(3.1)–(3.3) のモノドロミー保存変形方程式のパラメーター b_j, c_i, d_j と変数 u, v で表される．また，方程式 $L(z)=0$ の $z=0$ における特性指数は b_1d_1, qb_2d_2, qb_3d_3 であり，$z=\infty$ における特性指数は d_1, d_2, d_3 である．

逆に，方程式

$$L(z) = P_3(z)\Phi(q^3z) + P_2(z)\Phi(q^2z) + P_1(z)\Phi(qz) + P_0(z)\Phi(z) = 0,$$

$$\begin{aligned}
P_3(z) &= p_{31}(z-u),\\
P_2(z) &= p_{22}z^2 + p_{21}z + p_{20},\\
P_1(z) &= p_{13}z^3 + p_{12}z^2 + p_{11}z + p_{10},\\
P_0(z) &= p_{04}(z-u/q)(z+c_1)(z+c_2)(z+c_3)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

に対して，式 (4.4) と特性指数の条件を課すと，係数 $p_{k,l}$ がスカラー倍を除いて決定される ($p_{04} = -q^3 d_1 d_2 d_3 p_{31}$).

以上より，次が言える．

Proposition 4.1 ([7])**.** 方程式 $L(z) = 0$ は以下の性質を持つ：

(i) 関数 $L(z)$ は $\Phi(q^i z)$ $(0 \le i \le 3)$ の線形結合で，$\Phi(q^i z)$ の係数 $P_i(z)$ は，z に関して $(4-i)$ 次の多項式である．

(ii) 係数 $P_0(z)$ は，$z = -c_i$ $(1 \le i \le 3)$, u/q を根に持つ．

(iii) 方程式 $L(z) = 0$ の $z = 0$ における特性指数は $q^\lambda = b_1 d_1,\ qb_2 d_2,\ qb_3 d_3$ であり，$z = \infty$ における特性指数は $q^\lambda = d_1,\ d_2,\ d_3$ である．

(iv) 係数 $P_3(z)$ において，$P_3(z) = 0$ を満たす $z = u$ は線形方程式 $L(z) = 0$ の見かけの特異点であり

$$v = \frac{P_0(u)}{P_1(u/q)} = \frac{P_1(u)}{P_2(u/q)} = \frac{P_2(u)}{P_3(u/q)} \tag{4.6}$$

を満たす．

逆に，方程式 $L(z) = 0$ は以上の性質 (i)–(iv) から決定される．

続いて，$L(z)$ (4.2)–(4.4) を u, v の関数と見なし，それを $P(u, v; z)$ と表す．関数 $P(u, v; z)$ は u に関する 4 次，v に関する 3 次の多項式

$$\begin{gathered} P(u, v; z) = \sum_{\substack{0 \le j \le 3 \\ 0 \le i+j \le 4}} c_{i,j}(z) u^i v^j, \\ c_{0,0}(z) = c_0 z^2 \Phi(qz) \end{gathered} \tag{4.7}$$

である．ここで，係数 $c_{i,j}(z)$ $(0 \le j \le 3,\ 0 \le i + j \le 4)$ は b_k, c_k, d_k $(0 \le k \le 3)$, z, $\Phi(q^k z)$ で表される．また，$P(u, v; z) = 0$ で定まる曲線は次の 8 点

$$\begin{gathered} (u, v) = (0, qb_1 d_1), \quad (0, q^2 b_2 d_2), \quad (0, q^2 b_3 d_3), \quad (qz, \infty), \\ (z, 0), \quad (-c_1, 0), \quad (-c_2, 0), \quad (-c_3, 0) \end{gathered} \tag{4.8}$$

を通り，$(r, s) = (u, v/u)$ 座標において，次の 3 点

$$(\infty, q^2 d_1), \quad (\infty, q^2 d_2), \quad (\infty, q^2 d_3) \tag{4.9}$$

を通る．さらに，$z = u$ は線形方程式 $L(z) = P(u, v; z) = 0$ の見かけの特異点である条件と，それに基づく v の定義 (4.4) から次が成り立つ．

$$v = \frac{P(u, v; qz)|_{u=qz}}{P(u, v; z)|_{u=qz}}. \tag{4.10}$$

逆に，u, v の方程式 $P(u,v;z)=0$ は以上の 3 条件からスカラー倍を除いて決定される．以上より，次が言える．

Proposition 4.2 ([7])**.** 方程式 $P(u,v;z)=0$ は以下の性質を持つ：

(i) 関数 $P(u,v;z)$ は，u に関する 4 次，v に関する 3 次の多項式

$$P(u,v;z)=\sum_{\substack{0\le j\le 3\\ 0\le i+j\le 4}} c_{i,j}(z)u^i v^j, \qquad c_{0,0}(z):=c_0 z^2\Phi(qz) \tag{4.11}$$

である．

(ii) 方程式 $P(u,v;z)=0$ で定まる曲線は以下の 8 点

$$\begin{gathered}(u,v)=(0,qb_1d_1),\quad (0,q^2b_2d_2),\quad (0,q^2b_3d_3),\quad (qz,\infty),\\ (z,0),\quad (-c_1,0),\quad (-c_2,0),\quad (-c_3,0)\end{gathered} \tag{4.12}$$

を通り，座標 $(r,s)=(u,v/u)$ において，以下の 3 点

$$(r,s)=(\infty,q^2d_1),\quad (\infty,q^2d_2),\quad (\infty,q^2d_3) \tag{4.13}$$

を通る．

(iii) $z=u$ が，方程式 $L(z)=P(u,v;z)=0$ の見かけの特異点であることによる変数 v の定義 (4.4) から

$$v=\frac{T_z(P(u,v)|_{u=z})}{P(u,v)|_{u=qz}} \tag{4.14}$$

が成り立つ．

逆に，方程式 $P(u,v;z)=0$ は以上の性質 (i)–(iii) から決定される．

以上より $E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェに関する 3 次行列型方程式 (3.1)–(3.3) から，3 階スカラー方程式を導き，その特徴付けが 2 種類なされた．

§5. まとめと課題

本稿では，$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェ方程式の 3 次の行列型ラックス形式と，$E_6^{(1)}$ 型 q パンルヴェに関する 3 階スカラー方程式の特徴付けを 2 種類紹介した．

今後の課題を以下に挙げる．

- 3 次の行列型ラックス形式の持つ特殊解と対称性（[8] との関係）と退化

- スカラー方程式 (4.2) の 2 種類の幾何的特徴づけを利用した，変形方程式との両立条件式の導出
- 方程式系 $\mathcal{P}_{N,(M_+,M_-)}$ [6] に関する線形方程式が 4 次元の方程式系を与える場合の考察

謝辞　講演の機会を与えて下さった福知山公立大学の前田一貴先生に感謝申し上げます．また，本稿の研究を進めるにあたり，多くの助言と示唆を下さった神戸大学の山田泰彦先生と山田研究室の皆様に感謝申し上げます．

References

[1] A. Dzhamay and T. Takenawa, On some applications of Sakai's geometric theory of discrete Painlevé equations, *SIGMA*, **14** (2018), 075, 20 pages.
[2] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 1829–1832.
[3] H. Sakai, A q-analog of the Garnier system, *Fukc. Ecvacioj.*, **48** (2005), 273–297.
[4] H. Sakai, Lax form of the q-Painlevé equation associated with the $A_2^{(1)}$ surface, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39** (2006), 12203–12210.
[5] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, Discrete Dynamical Systems with $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$ Symmetry, *Lett. in Math. Phys.*, **60** (2002), 211–219.
[6] K. Park, A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related connection preserving deformation II, Funkc. Ekvacioj., **65** (2022), 311–328.
[7] K. Park, A 3×3 Lax form for q-Painlevé equations of type E_6, arXiv:2211.16706v2.
[8] K. Park and Y. Yamada, Symmetry of factorized Lax matrices, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B87** (2021), 133–145.
[9] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analogue of the sixth Painlevé equation, *Lett. in Math. Phys.*, **38** (1996), 145–154.
[10] N. S. Witte and C. M. Ormerod, Construction of a Lax pair for $E_6^{(1)}$ q-Painlevé system, *SIGMA*, **8** (2012), 097, 27 pages.
[11] P. Boalch, Quivers and difference Painlevé equations, *Groups and symmetries, CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI.*
[12] T. Suzuki, A q-analogue of the Drinferd-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, *AMS Contemp. Math.*, **651** (2015), 25–38. **47** (2009), 25–51.
[13] T. Suzuki, A Lax Formulation of a Generalized q-Garnier System, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **24** (2021), 38.
[14] Y. Yamada, Lax formalism for q-Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type $E_n^{(1)}$, *Int. Math. Res. Notices*, **17** (2011), 3823–3838.