# *PARAFAC* と *ALSCAL* による SD 法データの新しい分析法

## ——意味空間における個人差の解析に向けて——

菅　　千　索

# New Methods of Analysis on Semantic Differential Data by *PARAFAC* and *ALSCAL*

## ——Toward the analysis of individual differences in the semantic space——

SUGA Sensaku

## I. はじめに

OSGOOD, *et al.* (1957) によって提案された Semantic Differential (以下，SD 法とよぶ) は，本来は言語心理学の領域における意味の分析法として提案されたが，今日では感情やイメージなどの主観的な内容を扱う際に有効な方法として，行動科学の諸領域で広く普及している。この SD 法には心理学的測定法としての信頼性と妥当性が認められることは，すでに多くの先行研究によって検証されている (cf. SNIDER & OSGOOD, 1969)。ところが，SD 法で得られたデータを因子分析法で処理する段階での統計学上の問題については，これまで余り議論されることがなかった。その問題とは，結局のところ，因子分析法のような 2 次元的(変数×対象)なモデルによって，3 次元的(変数×対象×条件)な SD 法データを分析することにある。そのため分析に入る前に元のデータを加工しておく必要があるが，その時点で幾つかの好ましくない問題が起るのである (後述)。一方，SD 法で代表されるような 3 次元的なデータを，そのまま入力して分析できる統計的モデルがないわけではない。古くは TUCKER (1964, 1966) の Three-mode Factor Analysis があり，SD 法データへの最初の適用例は彼の弟子の LEVIN (1965) によって報告されている。さらに '70 年代には，多次元尺度法の急速な進歩に伴なって，2 種類の注目すべきモデルが提案されている。しかし，残念なことに，SD 法に限らず実際の研究への応用は極めて少ないのが現状である。

そこで本論文では，まず最初に，SD 法データに対する従来の分析法を系統的に分類することによって，そこでの諸問題を明確にしておく。次に，先に触れた 3 次元的なデータを直接に分析できる 3 種類のモデルについて，SD 法データへの適用可能性という観点から理論的な検討を行なう。そして最後に，同一データによる分析例を示して，実践的な側面からも議論していくことにする。これらの作業を通して，SD 法データの新しい分析法を探ることが本論文の主な目的である。その背景には，SD 法を利用する研究では個人差の問題をもっと積極的に考慮するべきだ，という筆者の心理学上の問題意識があることを明記しておきたい。

## II. 2-mode モデルによる分析法

SD 法で収集される素データは，CARROLL & ARABIE (1980) の定義によれば，3-mode・3-way データとよぶことができる。'mode (モード)' と 'way (ウェイ)' は1組のデータを形態によって分類するための概念であって，'mode' はデータ全体が関与する集合体の種類を指し，'way' はデータ中の1つの値が同時に対応する集合体の要素数を表わすものである。SD 法データで具体的に説明すれば，複数の評定対象を要素とする刺激モード，複数の評定次元を要素とする尺度モード，および，複数の評定主体を要素とする個人モードの3種類が存在するため 3-mode となる。そして，任意のデータ値は特定の刺激と尺度と個人という3要素と対応づけられているから 3-way である。なお，CARROLL & ARABIE (1980) では，これらを集合論のデカルト積で表現しているし，他方，斉藤(1980)がいう「相」と「元」もほぼ同じ概念である。

この 'mode' と 'way' は，さらに入力データの形態によって分析のモデルまたは手法(以下，単にモデルとよぶ) を分類する際にも使われることがある。SD 法と関係のあるモデルでいえば，一般的な主成分分析法や因子分析法は「変数×対象」型のデータを入力とする 2-mode・2-way モデルである。また，比較的に新しい多次元尺度法の *INDSCAL* (CARROLL & CHANG, 1970) などは「対象×対象×個人」型のデータを分析する 2-mode・3-way モデルといえる (これらをまとめて，単に 2-mode モデルと総称することがある)。

このようにデータとモデルを同じ基準で分類してみると， 3-mode・3-way データをいかにして 2-mode モデルで分析するかに問題の焦点が絞られてくる。そこで，これまで一般に広く行われてきた 2-mode モデルによる分析法を具体的にみていくことにする。

最も単純で素朴なのは，元のデータを複数の 2-mode・2-way データに分解して，それぞれを別々に分析する方法であろう。具体的には，「尺度×刺激」の組合せで個人ごとに因子分析を行ない，評定者の数だけ独立した分析結果を得る(以下，これを分離法とよぶ)。ところで，このような複数の分析結果を客観的に比較するためには，プロクラテス法(SCHÖNEMANN, 1966 など) や因子類似係数 (NEUHAUS & WRIGLEY, 1954) などがあるが，いずれも2者間の関係に限定されるため，ここでは余り役に立たない。結論としては，分離法では複数の分析結果を相互に検討せねばならないために，評定者数が少しでも多くなれば実際には使いものにならないであろう。

これに対して，通常よく使われてきたのは，データを1度に分析してしまう方法であり，それには幾通りかのやり方が考えられている。そこでの原則はデータのモード数を減すことであるが，大きく分類すると，2つのモードを1つに統合する方法と，1つのモードを消去する方法がある (以下，前者を統合法，後者を消去法とよぶ)。

統合法は，データの見かけ上の形態だけを変えるもので，具体的には，尺度モードを固定しておき，刺激モードと個人モードを統合して，あたかも1つのモードとみなす方法である。視覚的にいうと，元のデータが立体的な形をしているのに，その各断面を引き伸して平面的な形に並べることになり，OSGOOD 学派によって String-out 法ともよばれてきた。こうしてできるのは「尺度×(刺激・個人)」という見せかけだけの 2-way データであるが，これに対して因子分析が行なわれることになる。この方法で出力されるのは，尺度モードの因子負荷量と，刺激と個人のすべての組合せの因子得点である。そのため刺激の特性や個人差に関心がある場合には，得られた因子得点をさらに分析せねばならない。また，統計学的に問題とされるのは，吉田(1976)も

指摘しているように，刺激間の分散と個人間の分散を一緒にしてしまうため，抽出される因子の性質が曖昧になってしまう点である。ただし，統合法では次に述べる諸方法と比べて，元のデータに代数的な変換を加えずに済むため，その意味でデータ情報が事前に変容してしまう危険は少ない。

もう一方の消去法については，さらに，2-mode•2-way モデルを使う代表値による消去法と，2-mode•3-way モデルを使う近親度による消去法に区分される。前者は，普通は個人モードを単なる測定の繰返しとみなして，その平均値や中央値をとってできる「尺度×刺激」型のデータを因子分析する。OSGOOD 学派は個人モードの総和をとるため Summation 法とよぶが，内容的には平均値とまったく同じである。言うまでもなく，この方法は代表値をとる統計的操作が妥当な場合に限って利用できる。その場合には，データのランダムな測定誤差は中和されることになるため，集団平均的な因子がうまく抽出できることになる。しかし，例えば岩下(1972)は，評価性因子と相関の高い尺度には他の尺度と比較して有意味な個人差が存在する可能性を例証して，代表値をとることに疑問を提起している。一般的にいっても，個人差をすべて誤差に帰着できる保障はどこにもないのである。さらに別の面での欠点としては，分析前に個人モードが消去されてしまうため，分析中に個人間の分散に関する情報は生かされないし，当然，結果についても個人モードについては一切が失なわれてしまうことである。

消去法のもう一方は，*INDSCAL* に代表される多次元尺度法の個人差モデルを応用した比較的新しい方法である。ここでは，1つのモード内の要素間の近親度を計算する過程で，もう1つのモードが自動的に消去されてしまう。具体的には2通りの方法があるが，第1は内積系として個人ごとに尺度間の共分散または相関を求めてできる「尺度×尺度×個人」の 2-mode•3-way データを *INDSCAL* などで分析する方法である。なお，個人ごとの尺度間相関行列から「尺度×尺度」の平均相関行列を求めて因子分解する方法は，OSGOOD 学派によって mean-correlation とよばれている。第2の方法は距離系であり，やはり個人ごとに刺激間のプロフィール距離またはマハラノビス汎距離をとって「刺激×刺激×個人」のデータを分析するものである。これらの方法では，個人差がうまく表現できることと，解が回転に対して一義的に定まることが大いに注目される。しかし，消去されたモードに問題の残るのは，代表値による場合と同じである(それを部分的に解決する KRUSKAL & WISH (1978) の提案もあるが，やや特殊な方法なので省略する)。

この節では，2-mode モデルに依存した従来の主な分析法をみてきたが，それを図式的にまとめたのが図1である。

特別な研究目的があるときには，これ以外の方法も色々と考えられるが，ここでは一般性が高いと思われる方法だけを採り上げた。これらの分析法における基本的な問題点をまとめると以下のようになる。

(1) データ情報の損失：データがもつ潜在的な情報が十分に活用できない。
(2) 出力結果が不完備：特定のモードの結果が得られない(または不完全である)。
(3) 理論的な非整合性：データ変換に統計学的な疑問が残ることがある。

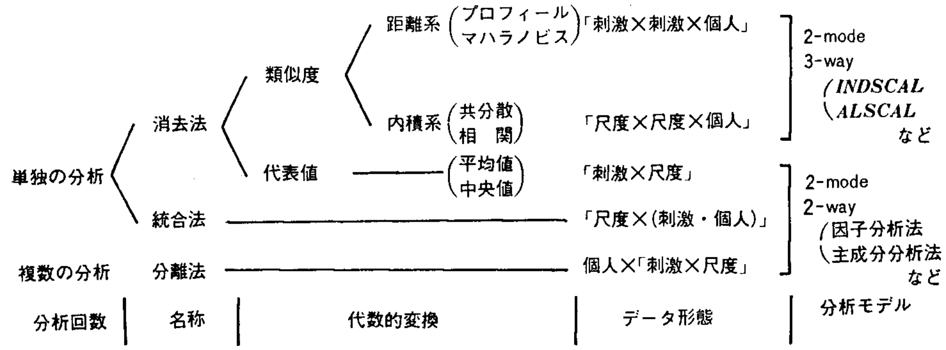


図1　2-mode モデルによる SD 法データの分析法の分類.

こうした不都合な点があるにもかかわらず，2-mode モデルによる分析が主流をなしてきた理由には2つの側面が指摘できるであろう。第1の側面は，SD 法データの特徴として，個人間の分散は刺激間や尺度間の分散と比較して相対的にかなり小さいため，個人差をどう扱かっても全体の結果は大きく変らないことである。OSGOOD 学派などは，交差文化的な集団差に比べれば集団内での個人差は無視できると一貫して主張している。第2の側面は，SD 法の3つのモードに同時に関心をもった研究が非常に少なかったこと，逆にいえば，分析法の制約からそのような研究計画が立てにくかったことである。どうしても3つのモードについて言及したいときは，異なるモードの組合せで何度か分析することによって妥協的に回避されることもあった。

しかしながら，収集されたデータのままで分析できるモデルがあるならば，それで分析する方が望ましいのは当然である。それは，たとえ3つのモードに同時に関心がない場合にもあてはまる。すなわち，データを2-mode 化することに起因する諸問題は一気に解決できるし，さらに新しいメリットも期待できるのである(後述)。次節では，そうした新しい分析法についてみていくことにする。

## III. 3-mode モデルの理論的検討

SD 法のような 3-mode•3-way データを直接に入力して，3つのモードを一度に分析できるモデルを 3-mode•3-way モデル（または単に 3-mode モデル）とよぶが，これに該当するモデルは現在のところ3種類が提案されている。ここでは各モデルについて，SD 法への適用を前提とした理論的な検討を行なう。そのために，本節に共通して現われる事項を以下のように約束しておく。まず，分析の対象となる SD 法データについては，刺激の数を$I$個 ($i, i', \cdots=1, 2, \cdots I$)，尺度の数を$J$種 ($j, j', \cdots=1, 2, \cdots J$)，個人の数を$K$人 ($k, k', \cdots=1, 2, \cdots K$) とし，その $I\times J\times K$ のデータ中の任意の値を $x_{ijk}$ で表わす。一方，モデル・パラメタについては，$R(S, T)$ を解の因子数 ($r=1, 2, \cdots R$ など)，また $f_{ir}$, $a_{jr}$, $w_{kr}$ をそれぞれ刺激，尺度，個人に与える因子負荷量とする。最後に，モデル式の近似記号$\cong$は，誤差の最小自乗など何らかの意味で左辺のデータと右辺のモデルを最良近似することを意味するものとする。

3-mode Factor Analysis (TUCKER, 1964, 1966)

このモデルには core 行列とよばれる特別なモデル・パラメタがあり，それを $g_{rst}$ で表わす

と，3-mode Factor Analysis（以下，3相因子分析とよぶ）は

$$x_{ijk} \cong \sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T} f_{ir}a_{js}w_{kt}g_{rst} \qquad [1]$$

と定式化される。ただし，Rは刺激の因子数，$S$は尺度の因子数，$T$は個人の因子数であり，必ずしも $R=S=T$ でなくてもよい。このモデルの基本的な考え方は，3つのモードを異なる因子体系で独立に分析して $f_{ir}$, $a_{js}$, $w_{kt}$ を定め，その後に各モードの因子間の関係を $g_{rst}$ で定量的に記述することにある。実際の解法の概略は以下の通りである。

刺激モードの因子負荷行列（$f_{jr}$）は，データ行列（$x_{ijk}$）から計算できる $\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}x_{i'jk}$ を $ii'$ 要素とする「刺激×刺激」の内積行列を固有値分解することによって，その固有ベクトルとして求められる。この $I \times I$ の対象行列は明らかに対象であるから，異なる固有値に対応する固有ベクトルは独立であるために直交解となる。まったく同様にして，$a_{js}$ は $\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}x_{ij'k}$ が $jj'$ の要素の「尺度×尺度」の内積行列の固有ベクトルとなり，$W_{kt}$ は $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ijk}x_{ijk'}$ が $kk'$ 要素の「個人×個人」の内積行列の固有ベクトルとなる。ここまでの手続きは，前節で述べた 2-mode モデルによる統合法をすべてのモードの組合せで3度分析したのと本質的に同じである。そして最後に core 行列（$g_{rst}$）は，既知の $x_{ijk}$, $f_{ir}$, $a_{js}$, $w_{kt}$ から，

$$x_{ijk} = \sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T} f_{ir}a_{js}w_{kt}g_{rst} \qquad [2]$$

を満たすものとして，

$$g_{rst} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}f_{ir}a_{js}w_{kt} \qquad [3]$$

で求められている。

3相因子分析は以上のような解析的な操作だけで解が得られるため，他の2つの 3-mode モデルよりは計算の面で能率的なモデルである。しかし，実際にデータを分析してみると，結果の解釈の面で厄介な点があることがわかる。そのひとつは，このモデルでは各モードに固有の因子体系が仮定されているため，ほかのすべてのモデルと違って3つのモードそれぞれに因子数を決定せねばならないことである。もうひとつは，3個の因子負荷行列および core 行列には，それぞれ独自の回転が許されることである。そして，この因子数と回転の問題を一緒に考えてみると，実際には同一のデータから，一定の条件下でも，非常に多くの最終解を導くことができるのである。それらの中から1つを選択するのは決して容易ではないし，仮に1つを決めたとしても，それが客観性をもった有意味な解であるのかには疑問が少なからず残るであろう。これは3相因子分析の宿命ともいえ，提案されてから相当の年月を経ているにもかかわらず，心理学で広く普及しない1つの大きな原因だと考えられる。

さらに，SD 法データからみた3相因子分析の特徴についても触れておく。このモデルでは，3つのモードが完全に対称的に扱かわれるために，個人モードも因子という枠組で処理されることになる。個人モードから2因子以上が抽出される条件は，評定者群のなかに複数の異なった評定パターンがなければならない。しかも，そのパターン間の差は，core 行列の意味からみて，刺激因子と尺度因子の関係が異なるという形で表現できる性質のものでなければならない。一方，SD 法データにおける個人間の変動が相対的に小さいことはすでに述べた。したがって，個人モ

ードから抽出できる因子数は小さくなるが，経験的には1因子に収束してしまう可能性が非常に高い。そのような場合には，個人の因子負荷ベクトルは評定者集団の平均的な評定パターンからのズレを示すにすぎず，このような複雑なモデルを敢えて利用するメリットはほとんどないのである。結論としては，3相因子分析は，2-mode モデルで処理するには統計学上の無理がある個人差の大きなデータには有効であるが，SD 法にとってはモードごとに因子体系が異なるというモデルの自由度の大きさのため，実用性がかなり低いといわざるを得ないのである。

*PARAFAC* (HARSHMAN, 1970)

HARSHMAN (1970, 1972) には *PARAFAC*1 と *PARAFAC*2 という2つの階層的モデルがあり，さらに *PARAFAC*1 にはデータ行列 ($x_{ijk}$) から分析を開始する方法と，$x_{ijk}$ から計算される共分散行列から分析を開始する方法の2種類がある。ここではモデルとしての制約条件がきつい *PARAFAC*1 のうち，データ行列から分析する最も基本的な形を改めて *PARAFAC* とよぶことにすると，そのモデルは

$$x_{ijk} \cong \sum_{r=1}^{R} f_{ir} a_{jr} w_{kr} \qquad [4]$$

で定式化されている。この式〔4〕は，外見的には因子分析法を 3-mode へ拡張するのに最も簡単な形にみえるが，HARSHMAN (1970) は，そこの重要な心理学的意義を見い出している。それは，このモデルの解には回転が許されないことを，単に数学的に示しただけでなく，概念的な意味づけにも成功している点にある。彼が注目したのは，因子の回転基準を7種類に分類した CATTELL (1944) が，その中でも特に優れた基準とみなしていた Parallel Proportional Profiles という原理である。この原理を簡潔にまとめると，同じ変数による2組のデータを別々に因子分析したときの負荷量の変化は，心理学的に有意味な因子上で起るべきだと仮定して，両者の差が比例関係をなすように回転方向を定めようとするものである (CATTELL & CATTELL, 1955)。これを2組から一般にK組に拡大して考えてみると，式〔4〕中の $w_{kr}$ はK組の因子負荷行列の比例関係を表わすものと解釈できるであろう。*PARAFAC* は，独立した分析後の回転の段階ではなく，K組のデータすなわち1組の 3-mode・3-way データを一度に分析する過程で Parallel Proportional Profiles の原理を実現したものであり，そのため正式には Parallel Factor Analysis と名付けられている。そして HARSHMAN (1970, 1972) は，CATTELL (1954) の主張を受継いで，実証科学における客観性を保障する立場から，心理学的に有意味と仮定できる解が回転に対して一義的に決定できることの重要性を強調している。これは英国経験主義派より強い意味で，因子を自由に回転するのを否定したものと捉えてよいであろう。実際には因子を回転できないことが解釈の場面で不利になるかもしれないが，そのことを *PARAFAC* モデルの欠点とみるか否かは，研究者によって意見が分れるかもしれない。

続いて，このモデルの特徴を3相因子分析との関係からみていくことにする。3相因子分析のモデル式〔1〕において，3つのモードの因子数は同じで(すなわち $R=S=T$)，しかも core 行列の非対角部分は0(すなわち $r \neq s \neq t$ のとき $g_{rst}=0$) という条件を追加すると，最終的には式〔1〕は式〔4〕と同等になり，数学的には *PARAFAC* モデルは3相因子分析の特殊な場合に還元される。これを概念的に説明すれば，3つのモードが独自の因子体系をとるのを禁止したことになるが，それによって3相因子分析の実用上の諸問題は完全に克服される。とりわけ SD 法

データにとっては，モデルの自由度が小さくなったことが幸いしており，個人差は集団平均的な因子に対する重みづけパターンの違いとしてうまく表現できるようになる。したがって，数学的には階層的な関係にあるにもかかわらず，その特徴は根本的に別のものとなっていることを確認しておかねばならない。

*PARAFAC* モデルの解法は，あらかじめ $f_{ir}$, $a_{jr}$, $w_{kr}$ に乱数などの初期値を与えておきそこから次に定義される誤差関数

$$E^2=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(x_{ijk}-\sum f_{ir}a_{jr}w_{kr})^2 \qquad [5]$$

を最小化する $f_{ir}$, $a_{jr}$の，$w_{kr}$ の組合せを，交互最小自乗法で逐次近似していく。この解法は独自に考案されたにもかかわらず，CARROLL & CHANG (1972) が *INDSCAL* のために開発した *CANDECOMP* と同じである。このようなモデル・パラメタの推定法は，解析的な方法と比べてみると，計算量が大幅に増加するし，誤差関数が極値に収束することによる不適解や，無意味な最小値に収束することによる退化解などが得られる可能性がある。CARROLL & CHANG (1972) は *INDSCAL* では経験的にはまったく問題はなかったと述べているものの，出力された結果を無前提に信用できないことは，この種の解法に共通した弱点といえる。

式〔4〕のモデルには，その後，*ALSCOMP* 3 (SAND & YOUNG, 1979) と *CFH-PARAFAC* (HAYASHI & HAYASHI, 1982) という別のプログラムも公表されている。どちらも計算量の軽減を計るために，元のデータからの最適な初期値の推定法が組込まれているのが特徴である。公表された順序とは逆になるが，*CFH-PARAFAC* の推定法は，最初に $f_{ir}$ と $a_{jr}$ だけを3相因子分析と実質的に同じ手続きで定め(すなわち統合法の応用とみなされる)，それらと $x_{ijk}$ から $w_{kr}$ の最適値を求めて初期値とする。この推定法が統計学的に気にかかるのは，3相因子分析で繰返し述べたように，$f_{ir}$ と $a_{jr}$ は異なる因子体系に属するのに，それを同一とみなして $w_{kr}$ を定めてしまうことである。計算が経験的に速くなるならば如何なる初期値でもかまわない，と言えばそれまでだが，*CHF-PARAFAC* の方法はいささか荒っぽいと感じざるを得ない。その意味では，先に公表されたにもかかわらず，*ALSCOMP* 3 の推定法は実に巧妙にできている。ここでも最初に $f_{ir}$ と $a_{jr}$ だけを定めるのは同じであるが，そのためには個人の平均をとったデータを因子分析する（すなわち消去法の応用とみなされる)。注目すべき点は，このままでは $f_{ir}$ と $a_{jr}$ に回転の不定性が残るため，SCHÖNEMANN, *et al.* (1976, ただし高根，1980 による）が多次元尺度で提案した固有値行列のベキ乗をとる技法を応用して適切な回転行列を求めて，回転後の新たな $f_{ir}$ と $a_{jr}$ を初期値としているのである。これは *PARAFAC* モデルの解には回転が許されないことを意識した上での合理的な手続きである。その後に $w_{kr}$ を定めるのは，やはり *CFH-PARAFAC* と同じである。なお，初期値から最終解を求める方法としては，*ALSCOMP* 3 では最適尺度化(後述)を導入しているが基本的には HARSHMAN (1970) と同じであり，*CFH-PARAFAC* では別の数値最適化法が使われている。

いずれのプログラムを使用するにせよ，この *PARAFAC* モデルで得られるのは，回転に自由度をもたない斜交解である。林・林 (1982) によれば，モデル式〔4〕に直交条件を加えると，結果的には 2-mode モデルに帰着されてしまうという。斜交解であることの評価は別にしても，結論としては，*PARAFAC* モデルは SD 法データの分析法として期待できると判断される。

ALSCAL-4 (TAKANE, *et al.*, 1977)

TAKANE, *et al.* (1977) は，多次元尺度法の *INDSCAL* モデルの非計量的解法を開発する過程で，新しい 3-mode•3-way モデルを提案している。このモデルは，それまで 2-mode•2-way データに限定されていた多次元展開法を 3-mode に拡張したものと位置づけられ，その距離公式の一般形は，

$$d_{ijk}^{l}=\sum_{r=1}^{R}\sum_{r'=1}^{R}\left|f_{ir}-a_{jr}\right|^{\frac{l}{2}}h_{krr'}\left|f_{ir'}-a_{jr'}\right|^{\frac{l}{2}} \quad [6]$$

と書ける。ただし，$d_{ijk}$ はモデルによって再現される距離，$l$ は Minkovski 定数，$h_{krr'}$ は $w_{kr}$ を 3-way に拡大したモデル・パラメタである。そこでは，$l$ の値によって任意の Minkovski 空間が仮定できるし，$h_{krr'}$に対する制約条件を変えることに幾つかの階層的な個人差モデルが設定できる。しかし，このままでは非常に自由度が大きい理論公式であるため，現時点で提案者らによって具現されているのは (*ALSCAL*, *Version* 4), $l=2$ の Euclid 空間だけを仮定し，さらに $h_{krr'}$ には *INDSCAL* モデルに相当する条件 ($h_{krr'}=0$, ただし $r\neq r'$, $k=1, 2, \cdots K$) が採用されている。これらの制約を式〔6〕に与えてモデル化すると，

$$x_{ijk}\cong\sqrt{\sum w_{kr}(f_{ir}-a_{jr})^2} \quad [7]$$

となり，これを本論文では *ALSCAL*-4 モデルとよぶことにする。

このモデルの特徴を先の *PARAFAC* モデルと比較してみると，抽出される因子は斜交解でなく直交解であるが，その因子は回転できない点と，個人差が集団平均的な各因子への重みづけの違いとして表現される点は同じである。さらに，*ALSCAL*-4 の解法も交互最小自乗法による逐次近似であるため，やはり解に不安が残る。一方，両者を別の面で比較して注目されるのは，CARROLL (1972) がいうように，ベクトル・モデルは展開法モデルの特殊な場合とみなすこともできるのである。*ALSCAL*-4 が展開法モデルの拡張であることはすでに述べたし，*PARAFAC* は形式的には明らかに bilinear から trilinear へのベクトル・モデルの拡張であるため（林・林，1982)，前者は後者よりもデータの表現力が大きいことになる。それを具体的に説明するために，少々極端な例をあげてみよう。あらかじめ『明—暗』因子がデータに潜在的にあると仮定しておくと，「明るい—暗い」という SD 尺度は，両モデルとも因子上で容易に再現できるが，「明暗感がある—明暗感がない」という尺度を考えてみると，*ALSCAL*-4 モデルでは因子の中性点に右極の理想点(負荷量)をとればよいが，*PARAFAC* モデルはこの尺度を『明—暗』因子上には再現できないのである。通常の SD 法ではこのような例を仮定する必要は余りないが，その他の特徴も併せて総合的に判断すれば，この *ALSCAL*-4 モデルは SD 法データの分析法としてかなり有効だと考えられる。

ところで，この *ALSCAL*-4 のプログラムには，*ALSCOMP* 3 と同様に最適尺度変化という技法が採用されているため，観測データに対して任意の尺度水準(間隔尺度順序尺度など)と条件性(1組のデータ中で数値が比較可能な範囲)などが仮定できる。最適尺度化の基本的な原理は，データ ($x_{ijk}$) とモデル・パラメタ ($f_{ir}$, $a_{jr}$, $w_{kr}$) の関係を最良にするために，データからモデル・パラメタの最適推定だけでなく，逆に，モデル・パラメタからデータの最適変換を仮定されている条件下で行なうものである(高根，1980)。SD 法では，分析以前の得点化の段階で，尺度を間隔尺度とみなして数値を与えることや，尺度の使われ方の個人差を考慮していないことが

疑問視される場合がある。しかし，最適尺度化が採用されているプログラムでは，尺度水準を順序尺度に，また条件性を個人内のみ比較可能と指定すれば，これらの疑問は分析中に解消されてしまう。これは非常に興味深い特徴であるが，SD 法データで実際にそこまで厳密にやる必要があるかは別の次元の問題といえる。

## IV. 同一データによる分析例とまとめ

前節における理論的な側面での検討から，*PARAFAC* モデルと *ALSCAL*-4 モデルはかなり類似した性質をもち，いずれも SD 法データの新しい分析法として可能性があることが示唆された。そこで本節では，これら2つのモデルと，さらに比較のため因子分析法による従来の分析法によって同じデータを分析してみて，実践的な側面からもみていくことにする（実際は同じデータを3相因子分析でも分析してみたが，個人モードが完全に1因子収束して興味ある結果が得られなかったため，ここでの報告は省略した）。

分析に使用されたデータの概容を，まず最初に明らかにしておく。

刺激：表1に示す L. v. BEETHOVEN の交響曲の楽章の冒頭部分(約2分間)が9曲。市販レコードより該当部分をカセット・テープにダビングして，防音室内でスピーカーにより通常の音量で提示した。提示順序はランダムに6種類で，それぞれにほぼ同数の評定者が割当てられた。

尺度：表2に示す20の両極性 SD 尺度。これらは音楽を刺激とした先行研究（梅本，1966；岩下，1972. など)を参考にして，『明一暗』と『興奮一沈静』と『緊張一弛緩』の3因子を仮定して選択されたものである。そのため Evaluation と Activity と Potency にもとづく SD 法の典型的な尺度バッテリーとは若干異なっている。とりわけ，個人差が現われやすいと予想される評価性の尺度は一切含まれていないため，従来の2-mode モデルで分析してもさほど問題が起らないタイプのデータと考えることができる。なお，すべての尺度は左極から各評定段階に1～7点を与えて得点化された。

評定者：57名の大学生・院生および社会人。年令は20～31才で男子28名，女子29名。評定は1～

表1　分析データの刺激リスト

| 記号 | 番-楽章 | 表　現 |
|---|---|---|
| $M_1$ | 1 - 2 | *Andante cantabile con moto* |
| $M_2$ | 3 - 1 | *Allegro con brio* |
| $M_3$ | 3 - 2 | *Adagio assai* |
| $M_4$ | 4 - 2 | *Adagio* |
| $M_5$ | 4 - 4 | *Allegro ma non troppo* |
| $M_6$ | 5 - 1 | *Allegro con brio* |
| $M_7$ | 7 - 2 | *Allegretto* |
| $M_8$ | 7 - 4 | *Allegro con brio* |
| $M_9$ | 8 - 1 | *Allegretto scherzando* |

表2　分析データの尺度リスト

| 記号 | 左　極 | 一 右　極 |
|---|---|---|
| $S_1$ | 明るい | 一 暗い |
| $S_2$ | 軽ろやかな | 一 重々しい |
| $S_3$ | さわがしい | 一 しずかな |
| $S_4$ | 地味な | 一 派手な |
| $S_5$ | 厳しい | 一 やさしい |
| $S_6$ | 静的な | 一 動的な |
| $S_7$ | すんだ | 一 にごった |
| $S_8$ | 弛緩した | 一 緊張した |
| $S_9$ | 浮き浮きした | 一 しみじみした |
| $S_{10}$ | 陰気な | 一 陽気な |
| $S_{11}$ | 激しい | 一 穏やかな |
| $S_{12}$ | ひっそりとした | 一 にぎやかな |
| $S_{13}$ | 冷たい | 一 暖かい |
| $S_{14}$ | ゆったりとした | 一 はりつめた |
| $S_{15}$ | あわただしい | 一 おちついた |
| $S_{16}$ | 楽しい | 一 悲しい |
| $S_{17}$ | 力強い | 一 弱々しい |
| $S_{18}$ | 沈静した | 一 興奮した |
| $S_{19}$ | のびのびした | 一 せわしい |
| $S_{20}$ | おとなしい | 一 いさましい |

2名ずつ個別に行なわれた。

## 因子分析法による結果

ここでは，統合法が刺激モードと尺度モードを統合した20×513の行列から，また，消去法が個人モードの平均値をとった20×9の行列から，それぞれ尺度間相関行列→主因子解→Varimax回転→因子得点の流れで分析した（相関行列の対角要素は1としたため，厳密には変数ごとに標準化する(主)成分分析を行なったことになる)。その結果，回転前の各因子の寄与率は，統合法では45%，26%，7%，3%，…，また消去法では64%，34%，1%，0.5%，…であった。全般的に統合法の寄与率が低いが，固有値が1以上という基準でみると消去法では完全に2因子であり，統合法は3因子となった。このことは，個人間の変動がまったくランダムではないことを意味しているが，この分析法ではその内容は明らかではない。

一方，Varimax 回転後の因子負荷量をみると，上位の2因子の基本的な性質には大きな差はみられない。そこで消去法による回転後の因子負荷量と因子得点を，紙面の都合で便宜的に同じ平面上へプロットしたのが図2である。それによると，第1因子は『興奮—沈静』と『緊張—弛緩』が複合した因子，第2因子は『明—暗』因子と解釈できる。この2因子での累積寄与率は98%に達しており，平均データ行列がほぼ完全に再現できたことになる。

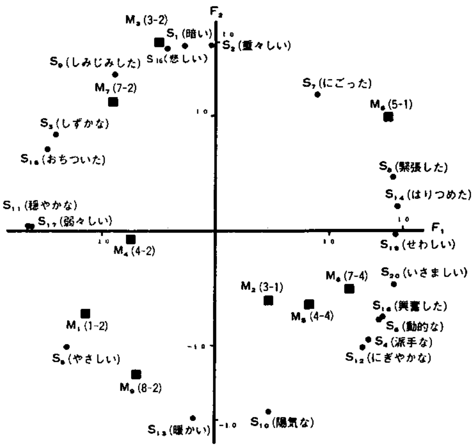


図2　因子分析法による分析結果

## *PARAFAC* モデルによる結果

*ALSCOMP*3 によって *PARAFAC* モデルの解を求めたが，因子数が2~5における誤差関数の Stress 2 (KRUSKAL, 1964 a, b) の変化は，2因子解から順に0.33, 0.30, 0.28, 0.26であり，一方，データとモデルの相関係数の2乗に相当する RSQ は，同じく 0.89, 0.91, 0.92, 0.93であった。Stress 2 は5因子でもかなり大きいが，RSQ は2因子でも高く，因子数を増しても変化が少ないため，ここでは2因子解を採択した。このモデルでは斜交解が許されるため，実際に2因子間の相関係数を計算してみると，刺激モードが0.010，尺度モードが −0.002 となっており，結果的には直交解になっていたのはおもしろい。これを根拠に，両モードの負荷量を，やはり便宜的に同じ平面にプロットしてみたのが図3である。それによると，第1因子は『興奮—沈静』因子，第2因子は『明—暗』と『緊張—沈静』が複合した因子と解釈でき，この2因子で元のデータの約90%が再現されている。次に個人モードの負荷量（因子への重み係数）を図4に示すと，評定者の中には，相対的に第1因子に比重が大きい者と，第2因子に比重が大きい者が存在することがはっきりと分かり，個人差が見事に表現されている。なお，分析の際に使用した option は，データが順序尺度 (ordinal) で個人内の尺度内のみ条件性が成り立つ (row conditional) と仮定するものであった。

## *ALSCAL-4* モデルによる結果

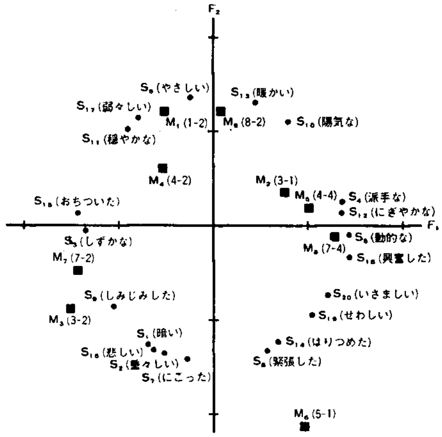

図 3　*PARAFAC* モデルによる分析結果

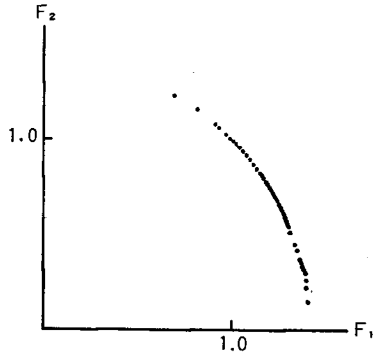


図 4　個人モードの重み係数 (*PARAFAC*)

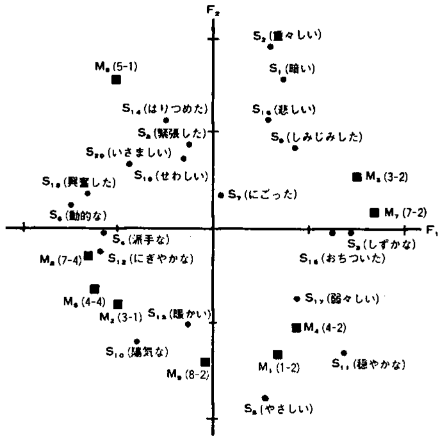

図 5　*ALSCAL*–4 モデルによる分析結果

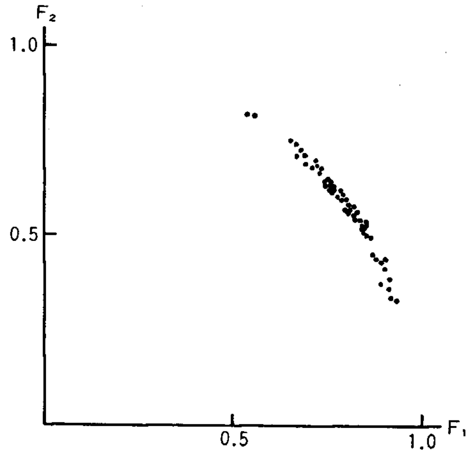


図 6　個人モードの重み係数 (*ACSCAL*–4)

ここでは他の結果を参考にして2因子解だけを求めたが，その Stress 2 は 0.217，また RSQ は 0.957 であった。使用したプログラムの option は *ALSCOMP* 3 と等価である。結果については，刺激と尺度の共通空間を図5(こちらは同じ空間内の布置である)，また，個人モード負荷量を図6に示す。これらの結果は内容的には *PARAFAC* モデルとほぼ同じになったが，モデルの再現率は96%まで上昇していた。

結果の比較と総合的検討

因子分析法の累積寄与率と *ALSCOMP* 3 および *ALSCAL*–4 の RSQ は，ともにモデルによるデータ変動の説明率であるから，相互に比較できる。そこで2因子解に限定して議論を進めると，消去法で98%となったのは，平均値をとることで誤差的成分が除去された結果とみてよい。しかし，これは平均データ行列の説明率であって，元のデータ行列に対するものではない。一方，元のデータ値をそのまま使う他の3種の方法では，2-mode モデルに依存した統合法が約70%程

度にすぎなかったのに比べて，3-mode モデルは両方とも約90%以上の説明率を示した。このことは，SD 法データに対しては，2-mode モデルと比べて 3-mode モデルがかなり当てはまりの良い優れた分析法であることを実証している。参考として 3-mode モデル内で比較しておくと，*PARAFAC* モデルよりも *ALSCAL*-4 モデルの方が Stress 2 と RSQ とも優秀な値を示したが，これは前者のベクトル・モデルより後者の展開法モデルが大きな自由度をもつことに起因したものと解釈できる。

最後に解の内容を比較すると，3-mode モデルからは実質的に同じと解釈できる因子が抽出されていた。一方，消去法による Varimax 解は，見かけ上はやや違うが，回転が許されることを利用して時計方向に約 20°～30° だけ軸を廻してみると，*ALSCOMP* 3 の解とよく一致する。この事実は，刺激モードと尺度モードに関して，平均値をもとにして抽出される集団平均的な因子構造が，3-mode モデルからも直接的に抽出できることを意味しており，3-mode モデルの統計学的な妥当性の一部が実証されたことになる。したがって，個人モードに特に関心がないときでも，3-mode モデルを利用することによって，データ情報を有効に活用して一義性をもつ客観的で有意味な因子を，しかも統計的整合性を保ちつつ抽出できるのである。もちろん個人モードの情報も自由に活用できるのであり，ここで分析したデータは個人差が小さいと予想されたにもかかわらず，図4や図6のような結果になっている。

これまでの議論をまとめると，ここで取り上げた2つの 3-mode・3-way モデル，とりわけ *ALSCAL*-4 モデルは，SD 法データの新しい分析法として大いに期待できるといえるであろう。それによって，SD 法で得られる情報を合理的かつ積極的に利用することが可能になってくるのである。しかし，本論文で示したのは1つの分析例にすぎず，筆者の知る限り他では未だ公表されていないようである。そのため，今後の課題としては，もっと多くの種類のデータを分析していくことによって，これらの 3-mode・3-way モデルの有効性と限界を追求していかねばならない。

## 附　記

1) この論文は行動計量関西懇話会と関西心理学会懇話会の合同シンポジウム「3次元データの解析」(1981年12月12日，於大阪市立大学)で発表したものの一部をまとめたものである。

2) *PARAFAC* 関係の文献の入手については，大阪市大・生沢雅夫教授に大変お世話になったことを記して感謝したい。

3) コンピーター・プログラムについては，因子分析法は SPSS 第6版の *FACTOR* (*PA* 1), *ALSCOMP*-3 と *ALSCAL* は North Carolina 大学の F. W. Young 教授から筆者が提供をうけたもの，また，3相因子分析は筆者が作成したものをそれぞれ使用して，京都大学大型計算機センターで分析を行なった。

## 引用文献

Cattell, R. B., 1944. "Parallel Proportional Profiles" and other principles for determining the choice of factor by rotation. *Psychometrika,* **9**, 267-283.

Cattell, R. B., & Cattell, A. K. S., 1955. Factor rotation for proportional profiles : analytical solution and an example. *British Journal of Statistical Psychology,* 8, 83-92.

Carroll, J. D., 1972. Individual differences and multidimensional scaling. In R. N. Shepard, A. K. Romney, & S. B. Nerlove (eds) : *Multidimensional Scaling I, Theory.* New York : Seminar Press.

Carroll, J. D., & Arabie, P., 1980. Multidimensional scaling. *Annual Review of Psychology,* **31**, 607

-649.

Carroll, J. D., & Chang, J. J., 1970. Analysis of individual differences in multitimensional scaling via N-way generalization of "Eckart-Young" decomposition. *Psychometrika,* **35**, 283-319.

Harshman, R. A., 1970. Foundation of the *PARAFAC* procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-modal factor analysis. U. C. L. A., Working Papers in Phonetics, No. 16.

Harshman. R. A., 1972. *PARAFAC* 2: Mathematical and technical notes. U. C. L. A.: Working Papers in Phonetics, No. **22**, 30-47.

林 知己夫・林 文, 1972. *PARAFAC* とその応用. 数理科学 3月号, 32-36.

Hayashi, C., & Hayashi, F., 1982. A new algorithm to solve *PARAFAC*-model.*Behaviormetrika,* No. 11, 49-60.

岩下豊彦, 1972. 情緒的意味空間に関する一実験的考察. 心理学研究, **43**, 188-200.

Kruskal, J. B., 1964a. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika,* **29**, 1-27.

Kruskal, J. B., 1964b. Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method. *Psychometrika,* **29**, 115-129.

Kruskal, J. B., & Wish, M., 1978. *Multidimensional scaling.* Beverly Hills: Sage Publications.

Levin, J., 1965. Three-mode Factor Analysis. *Psychological Bulletin,* **64**, 442-452.

Neuhaus, J. O., & Wrigley, C., 1954. The Quartimax Method: An analytical approach to orthogonal simple structure. *British Journal of Statistical Psychology,* **7**, 81-91.

Osgood, C. E., Suci, G. J., & Tannenbaum, P. H., 1957. *The measurement of meaning.* Urabama: Univ. of Illinois Press.

斉藤堯幸, 1980. 多次元尺度構成法. 朝倉書店.

Sand, R., & Young, F. W., 1979. Component models for 3-way data: *ALSCOMP* 3, an alternating least squares algorithm with optimal scaling features. Unpublished Paper, Univ. of North carolina.

Schönemann, P. H., 1966. A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika,* **31**, 1-10.

Snider, J. G., & Osgood, C. E., 1969. *Semantic differential technique.* Chicago: Aldine Publishing Company.

高根芳雄, 1980. 多次元尺度法. 東京大学出版会.

Takane, Y., Young, F. W., & de Leeuw, J., 1977. Nonmetric individual differences multidimensional scaling: An alternating least squares method with optimal scaling features. *Psychometrika,* **42**, 7-67.

Tucker, L. R., 1964. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. In N. Frederiksen, & H. Gulliksen (eds): *Contribution to mathematical Psychology.* New York: Holt

Tucker, L. R., 1966. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika,* **31**, 279-311.

梅本堯夫, 1966. 音楽心理学. 誠信書房.

吉田正昭, 1976. 心理統計学. 丸善.

(本研究科博士後期課程)