教具による数学言語の理解について

野　中　佳　代

On the Understanding of Mathematical Language through the Use of Instructional Aids

NONAKA Kayo

I　問題設定

数学とは紙の上に書かれた符号を意味もなく操作することだという見方を，数学教育が多くの子どもたちに形成しているということは，現在でも多くの学校でみられる事実である。このような事実に対し，数学教育の改革をめざす理論・実践では，数学言語やその操作にいかなる意味を与えるか，また，そのような意味はいかなるプロセスでもって子どもに理解されるのかという問題が設定され，解決への努力がなされてきた[1)]。

その中で重要な位置づけを与えられてきたのが，教具である。つまり，教具の操作によって，数学言語やその操作の意味の理解を図ろうというのである。こうした試みの代表的事例としては，ブルーナーやディエネス（Dienes, Z. P.）などの構造主義のアプローチに基づくプロジェクトや，わが国の数教協（数学教育協議会）の理論・実践をあげることができるが，そのほか，新数学（new math）のアプローチに基づくプロジェクトやピアジェ理論に基づくプロジェクトなどにおいても教具は重視されている[2)]。しかし，これら様々な教具の構造や機能を分析し，その特質を明らかにするための理論的枠組は未だ存在してない。

本稿の目的は，数学言語やその操作の意味の理解という問題に焦点をあてて，教具を分析するための理論的枠組をつくることにある。

この目的に対して，本稿では，数教協によって開発された教科内容・教具・授業過程を主要な検討対象とし，構造主義のアプローチと比較しながら，それらの検討を進めていくという方法をとる。このような方法をとるのは，教具による数学言語の理解という問題に対する両者の接近の仕方が，対照的ではあるが同時に相補的な面ももっていると考えるからである。一言でいえば，数教協のアプローチは，「数学的問題解決の図式」（銀林浩）に示されるように，数学の構成と応用を連続的に捉え数学教育の過程を現実の問題解決の過程とみるのに対し，構造主義のアプローチは，「数学学習過程の 6 段階」（ディエネス）に示されるように，数学の構成と応用を区別し数学教育の過程を表現一理解の過程とみるのである[3)]。以上をうけて本稿の目的をより具体的に述べれば，両者のアプローチの相補的な面を明らかにすることによって，教具による数学言語の理解という問題についてのより洗練された枠組をつくることだといえる。

では，この目的にせまるためにどのような研究成果を参照することができるだろうか。上にあげた問題は，教育学の課題であるヴァーバリズムの数学教育における現れである。したがって，教科の枠をこえてなされてきた，教具によるこの課題へのとりくみの成果をまずあげることがで

きる。しかし，上の問題を理論的に把握しようとすれば，次のような教育学以外の学問分野の成果にも目を向けることが必要になってくる。例えば，科学論・科学哲学の分野では，数学言語で記述される理論言語の，物理学的なモデルやアナロジーによる解釈の問題が探究されてきた。また，記号論の分野では，記号の構造や伝達・意味作用のメカニズムなどが論じられている。さらに，認知心理学の分野では，これらの学問分野の成果も含みつつ，スキーマやアナロジーなどの概念によって理解や問題解決などのプロセスの解明が試みられてきている。

本稿では，これらの諸成果に依拠しながら，先の目的に対して以下の課題を設定する。

(1)一般に教具の性格はどう捉えられるか（II）。

(2)理論言語としての数学言語と教科内容としての数学言語の相違点は何か。それぞれに与えられる意味はどう異なるのか（III）。

(3)教科内容としての数学言語と教具とはいかなる対応関係をもつのか（IV）。

(4)両者の対応関係を通じて教科内容としての数学言語が理解されるプロセスは，授業過程にどう具体化されるか（V）。

II　教具の二側面

教具の概念規定は多様な形でなされてきたが，まだ一致をみていない。その一因として，従来の概念規定は記号活動と操作活動のいずれかをモデルにして行われることが多く，両者の関連について意識的には論じられてこなかったことがあげられる。本稿では，この難点を克服し，また数教協，構造主義のアプローチ，それぞれの教具の特徴を論じるために，教具を，記号としての性格と操作対象としての性格という二つの側面によって捉える。

1．記号としての性格

あらかじめ断わっておくと，本稿では，記号（sign）を「何か他のものの代わりをするもの」という広い概念として用いている。したがって，象徴（symbol）や自然言語と対比される場合のような狭い概念ではない。

このような概念とした上で，記号は次のような構造をもつものであることを確認しておきたい。エーコ（Eco, U.）によれば，記号は，内容面・表現面という二つの面およびその二面を関係づけるコードからなる。内容面・表現面はどちらも，内容単位（content-unit，あるいは意味単位 semantic unit）・表現単位(expression-unit)という一まとまりをなしており，これらの単位はそれぞれ，その背後に存在する意味体系（semantic system）・統辞体系(syntactic system)によってその位置を与えられる[4]。記号の構造をこのように捉えることは，一見必要以上に煩雑にみえるかもしれないが，数学言語と教具の対応関係を考える際には有効性を発揮する。ただしここでは，とりあえず，記号の二面性をおさえておくだけで十分である（簡略のために，以下，必要のない限りは，内容単位を「意味」，表現単位を「表現」と書き表すことにする）。

本稿では，数学言語だけでなく，教具も，以上のような記号の一形態とみる。すると教具を用いた授業過程は次のように略述できるだろう。エーコのいうように，コミュニケーションの中で提示された表現は，意味作用の諸条件（コードやコンテクスト・状況など）の絡み合いによって様々な可能な意味を与えることのできる「空虚な形式」である。子どもははじめ，それまでの学校の内・外での経験の中で獲得したコードや，自分なりのコンテクストや状況の解釈によって，

教具という表現に対して，教師が意図したものとは異なる意味を与えるかもしれない。だが，教師や仲間集団とのコミュニケーションを通じて，子どもは，教具に対して新しい意味を与えることができるようになる。いいかえると，教具は数学言語に意味を与えるだけでなく，逆に，教具も数学言語と対応づけられることによって数学的な意味づけをもって見られるようになるのである。数学的なものの見方ができるようになるとは，教具として授業過程の中に取り入れられた現実世界の事物についてこのような見方が成立することだ，と考えることができよう。

以上のような捉え方は，観察も理論枠組に基づく解釈であるとする科学哲学での主張や，パタン認識についての研究成果とも整合するものである。

従来の概念規定では，教具は，単に〈記号の指示対象〉やそれ自体は意味をもたない〈記号媒体〉という性格をもたされることが多かった。数教協の場合も，教具の記号としての性格が明確に意識されているとはいえない。けれども，それでは上のような過程を理論的に説明することは困難である。これに対して，ディエネスは，教具の表す数学的構造が教具の知覚される面とは無関係であることを理解させるよう配慮している（後述の「知覚的多様性の原理」参照)。そこでは，教具が二面性をもつ記号であることがはっきり認識されていたといえる。

2．操作対象としての性格

しかしながら，他の記号と異なる教具の形態上の独自性は，記号としての性格に加えてさらに操作対象としての性格をもつという点にある。この場合の操作とは，手などを使って実際に行われる操作（physical operation）のことである。銀林は，数学言語に対する操作は物に対する操作の「標準化」「様式化」であるとし，数学言語と教具の対応関係を「操作的な性格」から分析している。つまり，数教協の教具概念は，操作対象としての性格に着目したものである。ディエネスの場合も，数学的構造を表すような場面は教具の操作によってつくりだされるのであるから，もちろん操作対象としての性格は捉えられている。だが，数教協のような徹底した論究はなされていない。

このように，数教協と構造主義のアプローチにおいては，相対的にみて教具の二側面の一方に比重をおいた教具の概念規定がなされている。したがってこれを両者の相補的な面とみれば，そこから両者の枠組を統合する可能性が開けてくると予想される。この問題はⅢ章での検討をうけてⅣ章で具体的に論じられる。

III　数学言語の意味の構成

数学言語と教具の対応関係について考察する前に，教具によって与えられる数学言語やその操作の意味とはいかなるものであるかをみておく必要があろう。教具が直接に対応づけられるのは，教科内容としての数学言語である。そして，この数学言語の意味を捉えるには，数学者の共同体が使用する言語，すなわち，理論言語としての数学言語が，教科内容としての数学言語へと再構成される過程をふまえておく必要がある。

1．理論言語としての数学言語

現代数学の対象は数学的構造である。数学的構造は，現実世界の制約から解放されそれを超えて構築される抽象的な存在であり，その構築の過程では直観的内容を含んでいることもあるが，記述され完成した段階では直観的内容を切り離された形式となる。記号の構造に照らしあわせて

いえば，数学的構造は記号の統辞体系として表されることになる。つまり，理論言語としての数学言語の特徴は，意味を剝奪されてほとんど統辞体系のみで成立していることにある。したがって，理論言語としての数学言語の意味とは，あとから解釈として付与されたものにすぎない。数学言語は，自然科学や社会科学において現実世界の隠れた法則を明らかにしようとする際に，論理性・単純性・経済性をもった表現法を提供する。そして，そのようにして得られた法則が逆に数学言語の解釈となって，数学言語に意味を与えるのである。

2．教科内容としての数学言語

(1)構造主義や新数学のアプローチでは，教科内容としての数学言語と現実世界の関係は，上に述べた理論言語としての数学言語の場合と同じように捉えられている。例えば，ディエネスは，数学には，「数に関する諸概念の実際の構造的関係（純粋数学），ならびに，現実世界で生ずる諸問題へのその応用（応用数学）」があるとしている[5]。

(2)これに対して，数教協のアプローチでは，このような純粋数学と応用数学の区別はなされず，現実の問題をその数学の問題に直す「定式化」の過程と，数学的な解を現実問題の解決に戻す「解釈」の過程は，互いに逆の過程とみなされている[6]。このようなアプローチのもとでは，当然，教科内容としての数学言語は，内容面，表現面のいずれにおいても，理論言語としての数学言語とは異なる特徴をもつことになると予想される。では，それはどのような特徴だろうか。

①表現面

例として「水道方式」をとりあげよう。水道方式は周知のように，〈分析・総合〉と〈一般から特殊へ〉という二つの原則によって構成された，計算指導のための教科内容である。計算は数学言語の操作の一つであり，その手続きはアルゴリズムとして記述できる。ここで注目したいのは，水道方式では，数字という数学言語の統辞体系として十進構造が取りだされて，それが数学言語の操作手続きであるアルゴリズムの意味の理解を可能にしているということである。

十進構造という統辞体系についてもう少し詳しくみてみよう。記号論の概念を使うと，一般に，数字は，０から９までの要素（表現手段）が，十進構造という統辞体系によって結合された表現単位であると分析できる。そうしてみると，例えば，子どもがしばしばおかす「88－８＝８」というようなつまずきは，88という表現単位が a ×10＋ b という統辞体系によって結合されてできているのだ，ということを理解してないことから生じるつまずきだということになる。

このような統辞体系は，先にみた理論言語における統辞体系の中には含まれてない。それは，「教育のなかで構造を考えるときは，それを広い意味に解釈し，子どもにふさわしい材料を発見し，構造的なとらえ方を学ばせるようにすべきである」[7] という主張から，理論言語にはないが教科内容としての価値をもつものとして構成された統辞体系である。ここには，理論言語としての数学言語と教科内容としての数学言語の表現面における違いが端的に示されている。

②内容面

だが両者がより鋭く対立するのは，内容面においてである。上にみたように，理論言語としての数学言語は，意味を剝奪された統辞体系として成立している。しかし本来，表現は意味を前提に存在しているはずである。数教協の実践の中でも，子どもの「わかり方」には，表現面における手続きの習得にあたる「できる」と，内容面の理解にあたる「わかる」の二種類があるということが経験的に確かめられてきている。こうして，教科内容としての数学言語に対してどのよう

な意味を与え，またそれをどのような仕方で構成するかが教科内容研究の大きな課題となってくる。

a．意味単位と意味体系

数教協の理論において，数字や演算記号などの意味をつくりだす際の中心概念になったのが，量の概念である。量は現実世界の事物の一側面とされる。したがって，事物の種類や状態の違いによって様々な質の量が存在する。「量の理論」は，それらの多様な量が一つのまとまった体系，「量の体系」をなしていることを明らかにした。

量の体系によれば，量は，それが個物の集合の一側面であるのか連続体の一側面であるのかという基準によって，分離量と連続量に分類され，他方，加法性をもつか否かという基準によって，外延量と内包量に分類される。このように量を分類し系統化した結果，自然数は分離量，小数・分数は連続量によって意味づけられ，また，加法・減法は外延量，乗法・除法は内包量によって意味づけられることになった。これらを数学言語の構造の中にあてはめれば，分離量・連続量，内包量・外延量は，それぞれ一個の意味単位であり，量の体系は，それらの意味単位に位置を与える意味体系だということになる。このような量の理論は，理論言語において剝奪されていた意味を教科内容において構成するという野心的な仕事であったと評価することができる。

b．意味規定の特徴

では，そこでの意味規定はいかなる特徴をもっているだろうか。意味の規定の仕方には，内包による規定と外延による規定の二通りがある。結論を先にいうと，数教協における数学言語の意味規定の特徴は，この二通りの規定を同時にみたしている点にある。内包による規定は上述のような形でなされるのだが，外延による規定についてはどうだろうか。乗法の場合を例にとってみてみよう。量の理論では，「実数×実数＝実数」は，「一あたり量×土台量＝全体量」として意味づけられる。認知心理学の用語でいいかえると，「×」という演算記号の意味は，〈一あたり量と土台量という二つの量からなる初期状態から，全体量という目標状態を導く演算子（operator)〉ということになる。ここで，一あたり量は内包量，土台量・全体量は外延量であり，また量は事物の一側面とされるから，これら三つの量はすべて現実世界の事物によって表すことができることになる。そのような事物によって構成される場面が数学言語の外延を示すのである。

一般的にみて，理論言語の意味は，内包的に規定されることが多く，意味体系は明確であるが，その現実世界における指示物や語の適用される状況は理解されにくい。逆に，日常言語の意味は，外延的に規定されることが多く，指示物や状況は明確であるが，意味体系は曖昧である（ヴィトゲンシュタインは，「家族的類似性（family likeness)」という概念を使って日常言語の意味体系の形式化は不可能であることを主張した)。このように理論言語と日常言語は，その意味規定の仕方において対照的である。この点については，ヴィゴツキーが科学的概念・生活的概念の特徴としてすでに指摘していたし，また最近では，ジョンソン-レアード（Johnson-Laird, P. N.）も「内包的な曖昧さ（intensional vagueness)」と「外延的な曖昧さ（extentional vagueness)」の質の違いとして述べている[8]。

量の理論は，内包的な規定と外延的な規定を同時に可能にすることによって，意味単位間の関係と意味単位の適用される指示物や状況をともに明確化することに成功している。

IV 数学言語と教具の対応関係

数学言語と教具の対応関係は，このような教科内容研究を基盤としている。両者の対応関係は，構造と機能の二つの観点から捉えることができる。構造とは，記号の構造のことであり，したがってさらに，表現面・内容面の二面から捉えられる。本稿では，両者の対応関係を分析するために，「統辞論的同型性」「意味論的連続性」「機能的有効性」という三つの概念を提案する。

1．構造上の対応関係

(i) 統辞論的同型性

統辞論的同型性とは，数学言語と教具の統辞体系が同型である，ということである。いいかえると，数学言語と教具は二つの異なる表現単位であるが，表現単位を構成する要素（表現手段）間の相互関係は同じだということである。例えば，タイルは，十進構造を「表現（representation)」する教具だとされてきた。ここで「表現」とは，数学の術語で，抽象的な構造を同型の具体的な構造でおきかえることを意味している。つまり，III章でみたような数字（数学言語）の統辞体系をタイル（教具）が知覚可能な形でもつことによって，両者の間に統辞論的同型性という対応関係が成り立つのである。

これは，教具の記号としての性格の一面である。しかし，タイルが統辞論的同型性をそなえるためには，その前に，「記号生産（sign production）のための労働（labor)」(エーコ）がなされなければならない。その「労働」とは次のようなものである。子どもの前には，ばらの1-タイルがある。1-タイルは，この時点ではまだ，相互関係のつけられてない要素にすぎない。が，十ずつ束にし，それをべき数の大きい順に左から右へ並べるという操作がなされることによって，ばらのタイル（要素）の間に十進構造と同じ相互関係がつくりだされる。こうしてタイルは，数字と同型の統辞体系をもつ一まとまりの表現単位となるのである。なお，このようなプロセスの中で，教具の操作対象としての性格が発揮されているのは明らかであろう。

(ii) 意味論的連続性

意味論的連続性とは，数学言語と教具の間に意味単位の連続性があるということである。(i)で教具(「具体物」およびタイルのような「半具体物」）と数学言語は統辞論的同型性をもっていることを述べたが，その前提には，下のような意味論的連続性が存在している。

《具体物》	《タイル（教具・図)》	《数字》
分離量 →	分離量 →	自然数
（特殊）	（一般）	（集合数）

上の図で，教具の意味単位である分離量と，数字の意味単位である集合数とは，具体一抽象を軸とした連続性をもっている。そして，(i)の場合と同様に，意味論的連続性のもたらされるプロセスにおいても，教具の操作対象としての性格が発揮される。ただ，記号生産のための労働の中味は異なっている。この場合には，未だ意味をもたないモノとしての教具に対して，分類や1対1対応などの操作を行うことによって分離量という意味を与えるという労働がなされるのである。

ここで，このような意味論的連続性と上にみた統辞論的同型性を区別する意義を具体的な例をあげて示しておこう。例えば，タイルは，色板・そろばん・貨幣などに比べてすぐれているということが経験的に確かめられてきたが，これは，色板などの教具が十進構造は表現できても量は表現できないこと，つまり，数学言語との間に統辞論的同型性はもつが意味論的連続性はもたな

いことに起因するということができる。したがってまた，タイルのように二つの対応関係をあわせもつ教具が構成できないときには，複数の教具を用いる必要があるということがわかるのである。

2．機能上の対応関係

ただし，構造という観点からのみ数学言語と教具の対応関係を捉えるのでは，次の二点で不十分である。

①数学言語と教具を対応づけるということは，数学言語の解釈としてのモデルをつくり，そうしてできた複数のモデルをアナロジーによって結びつけるということである。数学言語のモデルとしての教具（または図）は複数存在する。教具を用いた授業過程は，数教協の場合も構造主義のアプローチの場合も，これら複数の教具を，具体物から数学言語へ変換していくという形で組み立てられている。この過程は，アナロジーという点からみると，否定的アナロジー（モデルのもつ諸性質のうち数学言語には存在していない性質）が次第に取りのぞかれて肯定的アナロジー（モデルのもつ諸性質のうち数学言語にも存在している性質）が抽象されていく過程として，論理的には分析できる[9]。だが，授業過程の中にいる子どもは，授業過程をこのような論理的過程として認知しているわけではない。

②1. でみたように，教具が数学言語との間に構造的な対応関係をもつ上では教具の操作対象としての性格が不可欠である。ここで，操作は目的志向性をもった活動であり，操作を単なる模倣として行うのでない限り，操作が行われるところには何らかの目的が存在しているはずである。ところが，構造的な対応関係には目的について論じる枠組がない。

このような不十分点を補うために，数学言語と教具の対応関係をさらに機能という観点から捉えてみよう。

(iii) 機能的有効性

教具では果たすことが困難であったり不可能であるような機能を，数学言語は担うことができる。このような形での数学言語と教具の対応関係を，ここでは機能的有効性と呼ぶことにする。機能的有効性という対応関係は，①数学言語の意味，②数学言語の操作手続きの意味，のどちらにもみられる。

①例えば，積分記号の意味の理解を図るために放物線コマという教具を用いる実践がある。これは二つの放物線と一つの直線からなる図形の重心を見つけてコマを作るというものである。最初の図形が「問題」（初期状態）であり，重心が求められてコマが回ったという状態が「解決」（目標状態）である。だが，この二つの状態をつなぐ演算子は示されない。ここで積分記号がその演算子として登場する。つまり，教具の物理的な操作ではもちえない，重心を見つけるという機能を積分記号という数学言語が果たすことによって，数学言語の意味が示されるのである。

②演算のアルゴリズムは，数学言語だけでなく，具体物，タイルでも示すことができる。ただし操作手続きは，具体物→タイル→数学言語と進むにつれて，より「標準化」「様式化」されていく。演算の結果をだすという目的からみて不必要な操作は少なくなり，手続きの有効性が高まるのである。つまり数学言語の操作手続きは具体物などと比べてより高い機能的有効性をもつといえる。このような授業過程は，認知的教授心理学の分野で VanLehn & Brown の提案した「計画ネット（planning nets)」（ブロック→そろばん→数学言語と変換させることによってひき

算の筆算の手続きの有効性を示すというような，計画性をもった説明の手だて）でも示されている。[10]

3．構造主義のアプローチにおける機能の観点

上にあげた機能的有効性という概念は，主に数教協の教具から導きだした概念である。そこで，構造主義のアプローチにおける機能の観点について述べておきたい。

機能的有効性という対応関係の下では，具体物から数学言語への変換は，〈より効率的な問題解決〉という目的をもって進められる。しかしながら，構造主義のアプローチでは先に述べたように，純粋数学と応用数学とは区別され，数学的構造がまずは数学の応用としての問題解決とは切り離して理解されることがめざされる。したがって，そこではより効率的な問題解決というのとは違った操作の目的が存在するはずである。例えば，ディエネスの「数学学習過程の 6 段階」では，教具は，手遊びやゲームの道具という機能をもって導入され，教具から図的表現へ，図的表現から数学言語へという変換は，教具の段階で理解された数学的構造の〈より効率的な表現〉という目的をもって進められる。[11]このように子どもが意識しうる目的を遊びや〈より効率的な表現〉に設定して授業過程を構成する考え方は，上に述べた数教協の考え方とは対照的であるようにみえる。

ただし，両者は対立するものではない。機能的有効性は数学言語が教具に比べてより効率的な表現であることを基盤に成立するものであり，また，遊び的な要素も機能的有効性という対応関係を情意的な面から補強するものとみることができるからである。実際，先にあげた放物線コマは遊び的な要素も含んだ教具である。このようにみてくると，構造主義のアプローチによって提案された機能的な対応関係は，機能的有効性という概念の中に包括することができるものだといえよう。

V　数学言語の理解のプロセス

しかし，教具と数学言語との間の対応関係を分析するだけでは，教具による数学言語の理解についての検討としては片手落ちである。タイルのような教具は単に数学言語との間に対応関係をもつだけでなく，「シェーマ」を形成するとされており，シェーマという概念は，数教協において数学言語の理解を図る上で重要な位置を与えられているからである。

1．シェーマとスキーマ

シェーマ（schema）とは，もともと「頭のなかに刻みつけられていて，何らかの構造を表現している像」（遠山）[12] として規定された概念である。したがって，本来の意味でのシェーマは，認知心理学において理解や問題解決のプロセスを説明する上での中心概念となっているスキーマ（schema）と類似の意味をもつ心的表象のことである。スキーマとは，物・事象，絵・図，語・文・テキストなどに関する構造化された知識の単位のことである。しかし，スキーマによる理解のプロセスの説明をここでの検討にそのまま適用することはできない。なぜなら，スキーマ論では，すでに獲得しているスキーマの，新しい問題へのあてはめとして理解のプロセスを説明するが，数教協の場合は，シェーマを教具や図によって形成しながら理解のプロセスをつくることがめざされるからである。

2．問題解決の過程におけるシェーマの役割

(1)数学的および物理的理想化

では，教具や図として表現されたシェーマは，理解のプロセスにおいていかなる役割を果たしているのだろうか（以下では，このような教具や図をそれぞれ，「シェーマ教具」,「シェーマ図」と呼ぶことにする)。既にみてきたように，数教協における数学言語の理解のプロセスは，「数学的問題解決」のプロセスである。「数学的問題解決」は，まず，現実世界の問題を数学言語によって記述（「定式化」）することから始まる。

内井惣七によれば，この数学言語による世界の科学的記述には，「数学的理想化」と「物理的理想化」という二種類の理想化が含まれる。数学的理想化では，「経験世界の中での多少とも不確定で漠然とした事実や法則が，厳密で確定した数学的概念や数式で近似的に表現」される。また，物理的理想化では，「現実世界の中での複合的な現象が，一部の本質的だとみなされる条件だけによって記述しなおされる」のである。[13]

ただし，内井の論ではすでに数学言語を理解していることが前提となっている。なるほど，ディエネスの場合には，問題解決は純粋数学として理解された数学言語の応用として設定されるから，この二種類の理想化はそのまま問題解決のプロセスにあてはめることができる。だが，数教協のように「数学的問題解決の図式」として数学言語の理解のプロセスを構成しようとすれば，この二種類の理想化を行いつつ，それを通じて数学言語の理解を図るという難問に取り組まねばならない。

(2)シェーマ教具・シェーマ図の役割

結論を先にいえば，この難問の解決を可能にするのがシェーマ教具やシェーマ図である。速度という内包量の場合を例にとってみてみよう。内包量の指導では，二種類の理想化の難しさが前面にでてくるからである。

ここで行うべき物理的理想化は，速度という内包量，および速度を構成する時間・距離という二つの外延量を，具体物の操作によってつくりだされる物理現象から抽象することである。また，数学的理想化は，二つの外延量を「÷」という演算記号によって関係づけ内包量を数字で表現することである。

まず，等速運動と不等速運動の〈対比〉や速度の異なる運動間での〈比較〉によって物理的理想化が行われる。

ついで，これらの量の関係を数学言語で記述するための数学的理想化が行われる。シェーマ教具やシェーマ図が用いられるのは，この段階においてである。速度を構成する二量の関係は，面積図というシェーマ図によって表現されており，それを適用すれば二量を関係づけて速度を求めることができるからである。この面積図は，すでに別の内包量（こみぐあい）で学習されており，速度という新しい内包量にそれを適用することができるのである。ここで，面積図とは，速度やこみぐあいに限らず，内包量一般を表すことのできるシェーマ図である。多様な内包量をすべて同一の数体系によって測定することができるのは，量がすべて同型の「量の構造」（本稿の用語でいえば意味単位間の関係）をもつからであるが,[14] 面積図は，この量の構造を図示することによって，数の理論によらずに数学的理想化を行うことを可能にするのである。このような役割は，例えばタイルというシェーマ教具によって，未測量としての連続量を単位で分節化し小数・分数を導く際にもみられる。

以上から，数教協においては，教具や図としてのシェーマが，数学言語の理解のプロセスを問題解決の過程として構成する際に重要な役割を果たしていることが明らかになった。これは具体物にはないシェーマ教具・シェーマ図独自の特徴である。

3．心的表象としてのシェーマ

しかしながら，シェーマについての数教協の主張は，もう一歩踏みこんだものである。なぜなら，上でみたのは，すでに獲得しているシェーマを新しい量に適用する仕方であったが，1.でふれたように，シェーマを新しく形成する仕方についても言及されているからである。例えば遠山は，心的表象としてのシェーマがタイル（シェーマ教具）の操作を通じて形成され，さらにタイル図（シェーマ図）を何度も描くことによってその心的表象が定着するという。[15]ここで，タイルは具体物の「典型」（認知心理学の用語では「原型（prototype)」にあたる）であり，またタイル図はそれを図的に表現したものである。この場合，シェーマ教具からシェーマ図への変換は，両者の知覚的な類似性にもとづいて表現上の変換が容易に行えるように組み立てられている。

以上のような主張は，心的表象についてのディエネスの主張とは対照的である。彼は，まず，「知覚的多様性の原理（perceptual variability principle)」において「数学的構造を効果的に抽象するためには，その純粋に構造的な性質を理解するため多様な場面で構造に直面する必要がある」と主張する。[16]これは教具の中に典型として働くものをおかないということである。さらに，彼の学習過程の第4段階には，構造の図的表現が設定されているが，それは教具との間に知覚的類似性（ディエネスの言葉では「画像的共有性（pictorial communality)」）をもたないものであるべきだとされている。彼がこう主張するのは，教具から図的表現への変換が，構造の理解を介さずに単なる表現上での変換になることをおそれるからである。確かに，シェーマ教具（あるいは場面）とシェーマ図との間に知覚的類似性がある場合，子どもが自分でシェーマ図を描いたとしても，それがシェーマ教具の操作を通じて形成されたシェーマを表現したものなのか，シェーマ教具を単に表現上で変換した結果なのかは，容易に判断できない。

このようにみてくると，教具や図として表現されたシェーマが，問題解決の過程としての数学言語の理解のプロセスにおいて重要な役割を果たしていることは認めても，心的表象としてのシェーマが教具によって形成され図によって定着するという主張は，さらに検討が必要な仮説にすぎないというべきだろう。

VI 結　論

本稿では，教具による数学言語の理解という問題を考察するために，数教協に代表される問題解決という枠組と構造主義のアプローチに代表される表現—理解という枠組をこの問題への接近の仕方の二つの典型とみなし，両者の相補的な面を捉えることによって，両者を関係づけ，新たな枠組をつくろうとした。そのさい前者の枠組の方を基本にすえたのは，両者の対照的な面である教科内容について，構造主義のアプローチより数教協の方がよりすぐれた教科内容を構成しえていると判断したからである。

その検討の結果を初めにたてた課題にそってまとめると次のように結論できる。

(1)まず教具には，記号としての性格と操作対象としての性格の二側面が存在することを指摘した。この二側面は，新たな枠組においては，数学言語と教具の対応関係をつくりだす上で教具の

操作対象としての性格が不可欠であり，また，操作対象としての性格によって数学言語の操作手続きの意味づけが可能になる，という仕方で関連づけられる。

(2)数教協における教科内容としての数学言語は，理論言語としての数学言語とは異なる統辞体系と内容面をもっている。とりわけ量の理論は，現実世界の事物と関係づけられた意味単位をもち，しかも意味体系も明確に規定されているという点で評価できる。

(3)このような教科内容としての数学言語が教具を通じて理解されるためには，教具の統辞体系は数学言語と同型で，またその意味単位は数学言語と連続性をもっていることが求められる。ただし，このような対応関係は，子どもが教具を操作することによってはじめてもたらされるのであり，したがってさらに，子どもに操作の目的を示すような対応関係であることが求められてくる。本稿では，この対応関係を機能的有効性という概念で表した。

(4)最後に，数学言語の理解のプロセスを問題解決の過程としてつくりだす際に生じる困難を指摘し，それがシェーマとしての教具や図によってどう解決されようとしているかについて論じた。

ただし，数学言語の理解の心理的プロセスについてはさらに検討の余地が残されている。この点については，本稿で示した教具による数学言語の理解を可能にする発達的力量の問題とあわせて，今後の課題としたい。

註

1) ここでいう数学言語とは，数学の世界のことば—数字，演算記号，文字やその連鎖からなる数式など—のことである。なお，数学言語の分析については以下の文献が参考になる。銀林浩「数学・記号・人間」日本記号学会編『記号学研究2』北斗出版，1982年。林大編『講座現代の言語2　言語と思考の発達』(第Ⅲ部第3章) 三省堂，1984年。Resnick, L. B., "Syntax and Semantics in Learning to Subtract". In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Lawrence Erlbaum Associates, 1982.

2) アプローチの分類に当たっては，次の文献を参考にした。Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J., *Curriculum Development in Mathematics.* Cambridge University Press, 1981. なお，数教協の理論・実践については主に，理論は遠山啓および銀林浩の論稿，また実践は遠山啓監修『わかるさんすう1—6』(むぎ書房，1985年) によった。

3) これらはそれぞれ次の文献に詳しい。銀林浩『人間行動からみた数学』明治図書，1982年。Dienes, Z. P., *The Six Stages in the Process of Learning Mathematics.* NFER, 1973. (吉田・赤監修『ディーンズ選集2』新数社，1977年。)

4) Eco, U., *A Theory of Semiotics.* Indiana University Press, 1976. (池上訳『記号論I II』岩波書店，1982年。)

5) Dienes, Z. P., *Building up Mathematics.* Hutchinson, 1960 (『ディーンズ選集1』), p. 19.

6) 銀林　浩『人間行動からみた数学』172頁。

7) 遠山　啓『遠山啓著作集　数学教育論シリーズ8』太郎次郎社，1980年，39頁。

8) Johnson-Laird, P. N., *Mental Models.* Cambridge University Press, 1983, pp. 201-203.

9) アナロジーについては次の文献が参考になる。Hesse, M. B., *Models and Analogies in Science, 2/e.* University of Notre Dame Press, 1966. (高田訳『科学・モデル・アナロジー』培風館，1986年。)

10) VanLehn, K. & Brown, J. S., "Planning Nets: A Representation for Formalizing Analogies and Semantic Models of Procedural Skills". In R. E. Snow, P. Federico & W. E. Montague (Eds.), *Aptitude, Learning, and Instruction, Vol. 2.* Lawrence Erlbaum Associates, 1980.

11) 数学学習を数学言語のコミュニケーションとする見方は，とりわけ次の論稿で詳しく展開されている。Dienes, Z. P. & Golding, E. W., *Approach to Modern Mathematics.* Herder & Herder, 1971, Ch. 3.

12) 遠山　啓『遠山啓著作集　数学教育論シリーズ8』太郎次郎社，1980年，39頁。
13) 内井惣七「事実と論理」『新・岩波講座哲学3　記号・論理・メタファー』岩波書店，1986年，128-129頁。
14) 銀林　浩『量の世界一構造主義的分析』麦書房，1975年，44-45頁。
15) 遠山　啓『遠山啓著作集　数学教育論シリーズ10』太郎次郎社，1981年，124頁。
16) Dienes, Z. P., *An Experimental Study of Mathematics Learning*. Hutchinson, 1963（『ディーンズ選集5』），p. 158.

（博士後期課程）