Operations on twisted D-modules over schemes*

林 拓磨 †

概要

筆者は [12] において, Fabian Januszewski 氏 (Paderborn 大学) と共に, 一般の基礎概型上の平滑概型に対する捻じれ D 加群の一般論を構築した. これは Alexander Beilinson 氏, Joseph Bernstein 氏, 柏原正樹氏, 及び谷崎俊之氏らの標数 0 の体上の平滑代数多様体に対する捻じれ D 加群の理論 ([2], [15], [3], [16]) の一般化になっている. また, 同プレプリントではこの理論, 特に捻じれ D 加群の順像関手を使って $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の可換環上のモデルを構成した. 本稿では Paderborn 大学の Fabian Januszewski 氏との共同研究である [12] の一般の底概型上の捻じれ D 加群の基本操作を紹介する.

1 動機

捻じれ微分作用素の層 (tdo) 及び捻じれ D 加群の概念は [2] において導入された. その主な目的は, 自明とは限らない無限小指標を持つ複素半単純 Lie 環の表現または Harish-Chandra 加群と (部分) 旗多様体を結びつけることにあった. その後, 捻じれ微分作用素の層の理論の整備, 特に捻じれ微分作用素の分類や関手的な操作などの一般論が [15], [3] において展開された. 捻じれ D 加群, すなわち捻じれ微分作用素の層上の加群の関手的操作については [16] にて概説された. これら捻じれ微分作用素の層及び捻じれ D 加群の一般論の表現論における恩恵として例えば次のような結果が知られている:

定理 1.1 (相対定理, [17] Theorem 5.1, Corollary 5.5)**.** *G を連結実半単純代数群, θ を G の Cartan 対合, K を G の θ による固定部分群の単位成分とする. K の極大トーラス T を 1 つとり, H を T に付随する G の基本 Cartan 部分群とする. H, K, G の複素化をそれぞれ $H_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}}$ と書く. Q' を $H_{\mathbb{C}}$ を含む $G_{\mathbb{C}}$ の θ 安定放物型部分群とし, $\bar{Q}'$ をその複素共役とする. u を $K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}'$ の冪単根基の次元とする. $\mathcal{L}$ を Q' に付随するコホモロジー誘導関手 ([18] (5.3a)) とする. $i' : K_{\mathbb{C}}/(K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}') \to G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}'$ を $\bar{Q}'$ に付随する軌道射とする. θ 安定という仮定からこれは閉埋め込みであることに注意する. $\mathcal{A}'$ を $G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}'$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 同変 tdo, $\mathcal{M}'$ を $K_{\mathbb{C}}/(K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}')$ 上の $K_{\mathbb{C}}$ 同変 $(i')^{\cdot}\mathcal{A}$ 接続, M' を $\mathcal{M}'$ の $\bar{Q}' \cap K_{\mathbb{C}}$ におけるファイバーとする. u を $K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}'$ の冪単根基の次元とする. このとき Harish-Chandra 加群の同型*

$$H^{\bullet}(G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}', i'_{+}\mathcal{M}') \cong \mathcal{L}_{u-\bullet}(M')$$

が存在する. ここで i'_{+} は捻じれ D 加群の順像関手である.

この結果は 1987 年前後には専門家にとっては周知の事実であったようである. 論文で見ても, この結果はほとんど [13] 4.3. Theorem の証明から従う. 念のためもう少し内容に触れておく. まず, [13], [17] 共に閉 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道だけを扱ったわけではなく, 一般の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道に対してこの形の定理を与えている. ただし, [13] では旗

* 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号 : 21J00023) の助成を受けたものである.

† 大阪大学大学院情報科学研究科 hayashi-t@ist.osaka-u.ac.jp

多様体のみを扱っている．実際, 旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道がアファイン埋め込みになっているという Beilinson 氏, Bernstein 氏らの結果 ([13] Proposition 4.1) を利用しているため, 部分旗多様体の閉でない $K_{\mathbb{C}}$ 軌道を扱おうとする場合にはそのまま一般化することはできない．[17] ではこの技術的な問題を同変導来圏を利用して解消したのであった．

ところで, 2010 年代になって保型表現論, 特に保型 L 関数や Rankin-Selberg L 関数の特殊値の有理性・整性に関連して Harish-Chandra 加群の数論的構造 (有理構造や整構造) が注目されるようになった．Michael Harris 氏は上述の幾何的な構成を真似ることで離散系列表現の代数体上のモデルを構成することを提案した ([5], [6])．実際には数論的な立場からは $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群をより小さい環上で定義したいところである．環上定義したいというのは, 有理数体や Gauss 数体で定義する代わりに $\mathbb{Z}[1/2]$ や $\mathbb{Z}\left[1/2, \sqrt{-1}\right]$ 上定義したいという意図である ($\mathbb{Z}$ は整数環)．こういう事情はいわゆる合同関係式や保型 L 関数や Rankin-Selberg L 関数の特殊値の p 進的な性質を見据えてのことである．Gauss 数体を有理数体にしたいなど, 定義体 (環) をより小さくしたいという願望は, 表現を代数閉体でない体 (環) 上定義しようという問題設定を一度認めてしまえば自然なものと言えるだろう．ただし数論の立場からはそういう単純な動機だけでなく, Deligne 予想 ([4]) との整合性という正当な理由があるようだ．Deligne 予想とはモチーフに付随する L 関数の臨界値の有理性を予想するもので, この予想は「L 関数」の特殊値の有理性を統一するものとして期待されている．であれば, 保型表現論側で得られた特殊値の有理性の結果と Deligne 予想の関係が気になるところである．(Januszewski 氏曰く) これらの整合性を見据えて定義体の降下を行っているというのが現状である．保型 L 関数や Rankin-Selberg L 関数の特殊値の有理性・整性と保型表現の数論的構造の関係については [8] においてできる範囲で説明を試みたので詳しくはそちらを参照されたい．

Harris 氏のアイデアをもとにして $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群をより小さい環上定義できるかどうかについて考えてみよう．つまり, 前述の $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の幾何的構成における登場人物たちをより小さい環上定義し, そのうえで同様の操作を行うことで小さい環上の表現を得ようというのである．これを実行しようとする場合, 次が必要になる:

1. 環上の捻じれ D 加群の理論
2. 基点を持つとは限らない部分旗概型上の同変線束
3. 部分旗概型の閉 K 軌道の (基点を持つとは限らない) 数論的モデル.

[12] 第 1 – 4 節では一般の基礎概型を底とする捻じれ D 加群の理論を構築した．部分旗概型上の同変線束の構成と分類の計算方法については [9] にまとめた (体上の場合は [20] 2 節)．部分旗概型の閉 K 軌道の数論的モデルの構成は [12] 第 5 節で行った．これらの結果を合わせることで $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の $\mathbb{Z}[1/2]$ 形式の幾何的な構成を得た ([12] Corollary 6.2.4)．また, このモデルは $\mathbb{Z}[1/2]$ 上自由であることが最近証明できた ([10] Corollary 1.3).

本稿ではまず標数 0 の体上の捻じれ D 加群の基礎的な結果とその証明について簡単に説明する．その後, 一般の底概型の場合に何が起こるかについて概説する．tdo の基礎理論については [10] や [11] にまとめてあるのでそちらを見てもらいたい．詳しいことは [12] 第 1 節 (標数 0 の場合については [15], [3]) を参照されたい．

2　記号一覧

- 環 A に対して左 A 加群の有界導来圏を $D^{\mathrm{b}}(A)$ と書く．
- 概型 X に対して X の構造層を $\mathcal{O}_X$ と書く．
- 概型 X に対してその Krull 次元を $\dim X$ と書く．

- 概型の平滑射 $X \to S$ に対して X 上の S ベクトル場の層を $\Theta_{X/S}$ と書く．$S = \operatorname{Spec} F$ (F は体) のときは $\Theta_{X/F}$ と書く．
- フィルター加群の層 $(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M})$ に付随する次数付き加群の層を $\mathrm{gr}_F\,\mathcal{M}$ と書く．
- $\mathcal{R}$ を位相空間上の環の層とする．このとき左 $\mathcal{R}$ 加群の有界導来圏, 右 $\mathcal{R}$ 加群の有界導来圏, 左 $\mathcal{R}$ 加群の上に有界な複体のなす導来圏, 右 $\mathcal{R}$ 加群の上に有界な複体のなす導来圏, 左 $\mathcal{R}$ 加群の非有界導来圏, 右 $\mathcal{R}$ 加群の非有界導来圏をそれぞれ $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{R})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(\mathcal{R})$, $D^{-}(\mathcal{R})$, $D^{-}_{\mathrm{r}}(\mathcal{R})$, $D(\mathcal{R})$, $D_{\mathrm{r}}(\mathcal{R})$ と書く．
- 環の層 $\mathcal{R}$ に対してその反転環の層を $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ と書く．
- 概型 S 上の平滑概型の射 $g : Y \to Z$ とする．このとき g による tdo の逆像関手を $g^{\cdot}$ と書く．また, Z 上の tdo $\mathcal{A}$ に付随する移行双加群を $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ と書く．

3　標数 0 の体上の捻じれ D 加群

この節では標数 0 の体 F 上の準射影平滑代数多様体の捻じれ D 加群の順像関手について簡単に述べたい．主な参考文献として [16] を挙げておく．以下述べる内容は [14] の議論を [16] を踏まえて捻じれ D 加群の議論に書き換えることで得られる．

以下 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を F 上の準射影平滑代数多様体の射, $\mathcal{A}$ を Z 上の tdo とする．

定義 3.1. 左 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{O}_Z$ 加群として準連接であるとき $\mathcal{M}$ は準連接であるという．右加群についても同様である．

この定義は D 加群の文献ではよく見かけるが, 準連接層の一般的な定義を知っている人にとっては少し引っかかるところだろう．実はここには少しからくりがあり, この定義は層の一般論の意味での左 (右) $\mathcal{A}$ 加群としての準連接と同値であることが知られている．

では捻じれ D 加群が活動するための舞台を用意しよう:

定義 3.2. $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r,qc}}(\mathcal{A})$ をそれぞれコホモロジーが準連接な複体のなす $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(\mathcal{A})$ の充満部分圏とする．

周知のように, アーベル圏ではなく導来圏である．理由は捻じれ D 加群の順像関手の自然性にある (後述)．準連接層の導来圏ではなく $\mathcal{A}$ 加群の導来圏 (の部分圏) を考えることは代数幾何における導来圏の一般論に関する事情 ([7]) から来る．

以下いくつかの基本的な関手を定義し, それらについての基礎的な結果を紹介する．

3.1　大域化

定理 3.3. $A = \Gamma(Z, \mathcal{A})$ とおく．大域切断関手は導来関手 $\mathbb{R}\Gamma(Z, -) : D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}(A)$ を持つ．これを大域化と呼ぶ．

問題は有界性にまつわる部分で, これは Z の有限次元性から従う．なお, この導来関手は脆弱分解によって計算できるのでアーベル群の層の導来大域切断関手と同一視することもできる．ただし, 脆弱分解によって計算できるという事実には (下への) 有界性を用いていることを注意しておきたい．

3.2 逆像関手

$\mathcal{M}$ を左 $\mathcal{A}$ 加群とする. このとき左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{A}_{Y\to Z}\otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}\mathcal{M}$ は左 $\mathcal{O}_Y$ 加群として $\mathcal{M}$ の $\mathcal{O}_Z$ 加群としての逆像 $g^*\mathcal{M}$ と同一視できる. そこで, 左 $\mathcal{A}$ 加群の圏から左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群の圏への関手 g^* を $\mathcal{A}_{Y\to Z}\otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}(-)$ により定義する.

定理 3.4. *(1)* g^* は導来関手 $\mathbb{L}g^* : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(g^{\cdot}\mathcal{A})$ を持つ.
(2) (1) の導来関手は $\mathbb{L}g^* : D^-(\mathcal{O}_Z) \to D^-(\mathcal{O}_Y)$ によって計算できる.
(3) (1) の導来関手 $\mathbb{L}g^*$ は $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(f^{\cdot}\mathcal{A})$ に制限される.
(4) $\mathbb{L}f^* \circ \mathbb{L}g^* \simeq \mathbb{L}(g\circ f)^*$ が $D^-(\mathcal{A})$ 上成り立つ.

(1) は層の導来圏の一般論. (2) は $\mathcal{A}$ が $\mathcal{O}_Z$ 上平坦であることから従う. (3) の D^{b} を D^- に書き換えたもの及び (4) は [7] Chapter II, Proposition 4.4 より従う. (3) で有界性を保つことは多様体の有限次元性と準射影性による (参考: [14] Proposition 1.4.18, Corollary 1.4.20 の証明).

3.3 順像関手

一般に tdo $\mathcal{A}$ に対して自然な同型

$$g^{\cdot}((\omega_{Z/F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_{Z/F}^{\vee})^{\mathrm{op}}) \cong (\omega_{Y/F}\otimes_{\mathcal{O}_Y} g^{\cdot}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega_{Y/F}^{\vee})^{\mathrm{op}}$$

が存在する. これにより, 右加群の導来圏で順像関手が定義できれば左加群でも順像関手が定義できたことになる:

$$\begin{tikzcd}
D^{\mathrm{b}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "g_+"] \arrow[d, "\omega_{Y/F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}-"'] & D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\omega_{Z/F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}-"] \\
D^{\mathrm{b}}(\omega_{Y/F}\otimes_{\mathcal{O}_Y} g^{\cdot}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega_{Y/F}^{\vee}) \arrow[d, "\wr"'] & D^{\mathrm{b}}(\omega_{Z/F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_{Z/F}^{\vee}) \arrow[d, "\wr"] \\
D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(g^{\cdot}((\omega_{Z/F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_{Z/F}^{\vee})^{\mathrm{op}})) \arrow[r, dashed, "g_+"] & D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}((\omega_{Z/F}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_{Z/F}^{\vee})^{\mathrm{op}}).
\end{tikzcd}$$

というわけで, 以下右加群の複体の順像関手について考えたいと思う.

逆像関手の時と同じように順像関手の定義でも移行双加群が関わってくる. $g_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(\mathcal{A})$ を次の 2 つの関手の合成と定義する:

$$-\otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}}\mathcal{A}_{Y\to Z} : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(g^{-1}\mathcal{A})$$

$$\mathbb{R}g_* : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(g^{-1}\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(\mathcal{A}).$$

この定義を見てわかる通り, 移行双加群の構造上右加群の方が順像関手を簡単に定義できる. だから右加群の場合を考えたというわけである. なお, $-\otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}}\mathcal{A}_{Y\to Z}$ の有界性は Y が準射影代数多様体であることから従う.

定理 3.5. *(1)* $(g\circ f)_+ \simeq g_+\circ f_+$ が $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(f^{\cdot}g^{\cdot}\mathcal{A})$ 上成り立つ.
(2) $g = i$ が閉埋め込みであるとする. このとき i_+ は対応するアーベル圏の間の完全関手に制限できる.
(3) g_+ は $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r,qc}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r,qc}}(\mathcal{A})$ に制限できる.

(1) は逆像関手のときと異なり, それなりに非自明である. というのも, 今回は移行双加群が関手の定義の中に残ってしまっているからである. というわけで $g_+ \circ f_+$ は定義から 2 つの移行加群が現れるはずだが, $g_+ \circ f_+$ との同値を証明しようとするならその 2 つを 1 つの移行加群にまとめたいところである. 移行加群をまとめるということだけならば

$$\mathcal{A}_{X\to Z} \cong (g^{\cdot}\mathcal{A})_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y\to Z}$$

という同型あるいは

$$\mathcal{A}_{X\to Z} \simeq (g^{\cdot}\mathcal{A})_{X\to Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y\to Z}$$

という同値がある. これらの同型・同値は作用や導来関手のことをまじめに考えなければ単に $f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}$ が相殺されるだけのことなので容易にわかるだろう. しかし肝心の $g_+ \circ f_+$ と $(g\circ f)_+$ の同値はこれだけではわからない. なぜか? いざ実際に標準的な自然変換 $g_+ \circ f_+ \to (g\circ f)_+$ を書き下してみると次のようになる:

$$\begin{aligned}
g_+(f_+(-)) &= \mathbb{R}g_*(f_+(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to Z}) \\
&= \mathbb{R}g_*(\mathbb{R}f_*(- \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{\cdot}g^{\cdot}\mathcal{A}} (g^{\cdot}\mathcal{A})_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to Z}) \\
&\to \mathbb{R}g_*\mathbb{R}f_*((- \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{\cdot}g^{\cdot}\mathcal{A}} (g^{\cdot}\mathcal{A})_{X\to Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y\to Z}) \\
&\cong \mathbb{R}(g\circ f)_*(- \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{\cdot}g^{\cdot}\mathcal{A}} ((g^{\cdot}\mathcal{A})_{X\to Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y\to Z}) \\
&\cong \mathbb{R}(g\circ f)_*(- \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{\cdot}g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{X\to Z}) \\
&= (g\circ f)_+(-).
\end{aligned}$$

というわけで $g_+ \circ f_+$ 側に着目すると 2 つの移行双加群の間には $\mathbb{R}f_*$ が挟まっており, 前述の同値を使う前に 3 段目のところで $\mathbb{R}f_*$ とテンソル積が交換するかという問題が現れるからである. この 3 段目の射が同値になってほしい. そのためには, 一般に $\mathcal{M}^\bullet \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A})$ に対して標準的な射

$$\mathbb{R}f_*\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to Z} \to \mathbb{R}f_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y\to Z})$$

が同値であればよい. これはある種の射影公式の問題と言っていいだろう. よく知られているように射影公式は導来圏ではある程度成り立つが, Abel 圏のレベルではほとんど成り立たない. つまり, この形の射は導来圏ではしばしば同値になるが, Abel 圏では同型にならないことが多い. 捻じれ D 加群の理論で導来圏が使われる理由 (の 1 つ) はここにある. ただし, ここでは一般的によく知られている射影公式は使えない. その理由は単純で, $\mathcal{A}_{Y\to Z}$ が「大きい」からである.

$\mathcal{A}_{Y\to Z}$ の右作用を無視して, より一般に $\mathcal{M}^\bullet \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r}}(f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A})$ 及び準連接左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{N}$ に対して

$$\mathbb{R}f_*\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{N} \to \mathbb{R}f_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{N})$$

が同値であることを証明する. 主張は Y について局所的であるので Y はアファインであると仮定してよい. このとき $\mathcal{N}$ の自由分解を取り, 代数多様体の位相空間としての有限次元性と [19] Complement (1.11.3.1) から $\mathcal{N}$ を自由加群に取り換えることができる. あとは $\mathbb{R}f_*$ が無限直和を保つこと ([19] Corollary (3.9.3.2) の Remarks. (a), Corollary (3.9.3.3)) から同値が従う.

なお, ここでは $\mathcal{A}_{Y\to Z}$ を一般の準連接左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{N}$ に置き換えたが, $\mathcal{A}_{Y\to Z}$ のある有限長の局所自由分解を具体的に作ることで [19] Complement (1.11.3.1) を回避することもできる (後述). また, この方法を使うと, 準射影性の仮定無しに f_+ が有界導来圏の間の関手を定めることもわかる.

(2) は $\mathcal{A}_{Y\to Z}$ が左 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群として局所自由であることからわかる (ここに i が埋め込みであることを使っている). (3) を直接証明するのは難しく, g をグラフ射 $i : Y \to Y\times Z$ (より一般に閉埋め込み) と射影 $\mathrm{pr}_2 : Y\times Z \to Z$ に分解する. (1) よりこれらの場合に帰着される.

pr_2 の方は Spencer 分解を使うことで準連接 $\mathcal{O}_{Y\times Z}$ 加群の順像の話に帰着される．Spencer 分解について簡単に復習しよう．まず次のような左 $\mathcal{D}_Y$ 加群の分解がある (Spencer 分解, [14] Lemma 1.5.27):

$$0 \to \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^{\dim Y} \Theta_{Y/F} \to \cdots \to \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^{0} \Theta_{Y/F} \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

ここで

$$\mathcal{D}_Y \cong \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^{0} \Theta_{Y/F} \to \mathcal{O}_Y$$

は $1 \in \mathcal{O}_Y$ への作用により定める．また, $1 \le q \le \dim Y$ に対して微分

$$d : \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^{q} \Theta_{Y/F} \to \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \bigwedge^{q-1} \Theta_{Y/F}$$

は次で定める:

$$\begin{aligned} P \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge e_q \ \mapsto & \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i+1} P e_i \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_q \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} P \otimes [e_i, e_j] \otimes e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_q \end{aligned}$$

$\hat{e}_i$, $\hat{e}_j$ は i, j 番目の項を外すことを意味する．

ところで, $\mathrm{pr}_1 : Y \times Z \to Y$ を射影とする．このときある標準的な環準同型 $\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y \otimes_F \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A} \to \mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ が存在する．特に $\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y$ に制限することで環準同型 $\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y \to \mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ を得る．そこで $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1}(-)$ により前述の Spencer 分解を $Y \times Z$ 上に引き戻して

$$\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{\bullet} \Theta_{Y/F} \to \mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y \to 0$$

という $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y$ の左 $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群としての局所自由分解を得る．さらに, $\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y$ と $\mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A}$ の $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ における積が交換することからこれは $(\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}, \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A})$ 双加群の完全列でもある．

では $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y$ とは何者か? これを計算するために $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ の構造にもう少し踏み込もう．前述の標準的な準同型 $\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y \otimes_F \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A} \to \mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ は同型 $\mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{A} \cong \mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$[*1] に拡張できる．これにより $(\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}, \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A})$ 双加群の同型

$$\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{D}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{A}_{Y\times Z \to Z}$$

を得る．以上の議論をまとめると, 今

$$\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{\bullet} \Theta_{Y/F} \to \mathcal{A}_{Y\times Z \to Z} \to 0$$

という, $(\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}, \mathrm{pr}^{-1}\mathcal{A})$ 双加群の複体であって $\mathcal{A}_{Y\times Z\to Z}$ の左 $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群としての局所自由分解になっているようなものが得られたことになる．これにより $- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\times Z\to Z}$ は

$$- \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{\bullet} \Theta_{Y/F}$$

---

*1 $\mathcal{D}_Y$ と $\mathcal{A}$ はそれぞれ $\mathcal{O}_Y$ 代数, $\mathcal{O}_Z$ 代数ではないので左辺の外部テンソル積の環構造は慎重に定義する必要がある．Y, Z がアファインの場合の

$$\Gamma(Y \times Z, \mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{A}) \cong \Gamma(Y, \mathcal{D}_Y) \otimes_F \Gamma(Z, \mathcal{A})$$

という表示の右辺を通して局所的に環構造を定め, それを貼り合わせることで層 $\mathcal{D}_Y \boxtimes \mathcal{A}$ の環構造が定義される．

として計算される.

さて, $\mathcal{M}^\bullet \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{r,qc}}(\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A})$ として $(\mathrm{pr}_2)_+\mathcal{M}^\bullet$ のコホモロジーが準連接であるかを論じたい. $\mathcal{M}^\bullet$ を区切ることで $\mathcal{M}^\bullet = \mathcal{M}$ が準連接右 $\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群の場合に帰着する. 前述の議論から次の同値がある:

$$(\mathrm{pr}_2)_+\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}(\mathrm{pr}_2)_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{\bullet} \Theta_{Y/F}).$$

$\mathrm{pr}_1^{-1} \wedge^\bullet \Theta_{Y/F}$ を区切ることで右辺のコホモロジーの準連接性は各 $0 \le q \le \dim Y$ に対する

$$\mathbb{R}(\mathrm{pr}_2)_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{q} \Theta_{Y/F})$$

のコホモロジーの準連接性に帰着できる. $\mathbb{R}(\mathrm{pr}_2)_*$ の中身を観察しよう. $\mathcal{M}$ の $\mathcal{O}_{Y\times Z}$ 加群の構造により次のような同一視を得る:

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{-1} \bigwedge^{q} \Theta_{Y/F} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathrm{pr}_1^{*}\mathcal{O}_Y} \mathrm{pr}_1^{*} \bigwedge^{q} \Theta_{Y/F}.$$

右辺には準連接 $\mathcal{O}_{Y\times Z}$ 加群の構造が入る. この加群の pr_2 による高次順像はすべて準連接である ([1] (5.6) Theorem). これで主張が証明されたことになる.

次に閉埋め込みの場合を論じる. 記号を取り替える. 一般に閉埋め込み $i : Y \to Z$ が与えられたとする. この場合は Z がアファインの場合に帰着して自由分解を使って計算する. 今回は i_* が完全であるおかげで自由加群の場合に帰着できる. 結果として $i_*\mathcal{A}_{Y\to Z}$ の準連接性を調べることになる. $i_*\mathcal{A}_{Y\to Z}$ に $\mathcal{A}$ のフィルターから自然に誘導されるフィルターを入れると自然な同型 $\mathrm{gr}\, i_*\mathcal{A}_{Y\to Z} \cong i_* i^* \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Z} \Theta_{Z/F}$ が得られる. というわけで gr さえ取ってしまえば左 $\mathcal{O}_Z$ 加群の構造と右 $\mathcal{O}_Z$ 加群の構造が一致し, 特に準連接であることがわかる. あとはフィルター加群に関する標準的な帰納法の議論から $i_*\mathcal{A}_{Y\to Z}$ が右 $\mathcal{O}_Z$ 加群として準連接であることがわかる.

4　一般の基礎概型上の捻じれ D 加群

この節では一般の基礎概型を底とする捻じれ D 加群の一般論について簡単に説明したい. S を任意の基礎概型とする. 以下 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を S 上の平滑概型の射, $\mathcal{A}$ を Z 上の tdo とする. また, X, Y, Z から S への構造射をそれぞれ x, y, z と書くことにする.

さて. まずは準連接性の定義から始めることにしよう.

定義 4.1. 左 $\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{O}_Z$ 加群として準連接であるとき $\mathcal{M}$ は準連接であるという. 右加群についても同様である.

では捻じれ D 加群の舞台を用意しよう. 舞台はやはり導来圏である:

定義 4.2. $D_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A})$, $D_{\mathrm{r,qc}}(\mathcal{A})$ をそれぞれコホモロジーが準連接な複体のなす $D(\mathcal{A})$, $D_{\mathrm{r}}(\mathcal{A})$ の充満部分圏とする.

古典論とは異なり今回は非有界導来圏を考える. その理由は非常に簡単で S (あるいは X) に何も有限性の条件をつけていないからである. 古典論の場合は複素数体 (あるいは標数 0 の体) 上の平滑代数多様体のみを考えていたので底空間は有限次元 Noether 空間になっていた. その有限性がないために舞台も大きなものを用意しないといけないというわけである. [7] の非有界版の研究としては例えば [19] が知られている.

では関手達を導入しよう. 今回は前述の関手たちの一般化に加えて底変換関手が新たに加わる.

4.1 大域化と局所化

今回は基礎概型が 1 点とは限らないので大域化の受け皿となる圏は古典の場合と比べて少し慎重に用意しなければならない．この節では z は濃縮 (準コンパクトかつ準分離) であると仮定する．このとき $z_*\mathcal{A}$ は準連接 $\mathcal{O}_S$ 代数である．

定義 4.3. 左 $z_*\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M}$ が左 $\mathcal{O}_S$ 加群として準連接であるとき $\mathcal{M}$ は準連接であるという．右加群についても同様である．

定義 4.4. $D_{\mathrm{qc}}(z_*\mathcal{A})$ をコホモロジーが 準連接な複体のなす $D(z_*\mathcal{A})$ の充満部分圏とする．

定理 4.5 ([12] 3.1 節)**.** *(1)* $\mathbb{R}z_*$ と $\mathcal{A}\otimes^{\mathbb{L}}_{z^{-1}z_*\mathcal{A}} z^{-1}(-)$ は $D(\mathcal{A})$ と $D(z_*\mathcal{A})$ の間の随伴を与える．これらの関手をそれぞれ大域化, 局所化と呼ぶ．

(2) *(1)* の随伴は $D_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A})$ と $D_{\mathrm{qc}}(z_*\mathcal{A})$ の随伴に制限される．

(1) はほとんど層の一般論を適用しただけに過ぎない．(2) は準連接性を保つという主張である．大域化についてはよく知られている ([19] Proposition (3.9.2))．局所化の方については [19] Proposition (3.9.1) と同様の議論から従う．ただし, この際準連接性の定義について少し論じる必要がある．

4.2 底変換関手

$s: S' \to S$ を概型の射とする．$Z' = Z\times_S S'$ とおく．$s_Z : Z' \to Z$ を射影とする．

定理 4.6 ([12] 3.2 節)**.** 標準的な随伴

$$\mathbb{L}s_Z^* : D(\mathcal{O}_Z) \rightleftarrows D(\mathcal{O}_{Z'}) : \mathbb{R}(s_Z)_*$$

は

$$\mathbb{L}s_Z^* : D(\mathcal{A}) \rightleftarrows D(s_Z^*\mathcal{A}) : \mathbb{R}(s_Z)_*$$

に持ち上がる．

$\mathbb{R}(s_Z)_*$ の方は容易である．tdo の底変換の構成から $s^{-1}\mathcal{A} \to s^*\mathcal{A}$ という環準同型が存在するのでこれを使ってアーベル圏のレベルで関手を作る．$\mathcal{A}$ が $\mathcal{O}_Z$ 上平坦であることからその導来関手は $\mathbb{R}(s_Z)_* : D(\mathcal{O}_{Z'}) \to D(\mathcal{O}_Z)$ の持ち上げになっているとわかる．

もう一方の持ち上げは関手 $(s_Z^*\mathcal{A})\otimes^{\mathbb{L}}_{s_Z^{-1}\mathcal{A}} s_Z^{-1}(-)$ により定める．持ち上げになっていることはやはり $s_Z^{-1}\mathcal{A}$ の部分の相殺による．

コホモロジーが準連接な複体の部分圏を保つかどうかについては [19] を見よ．

4.3 逆像関手

前節のように左 $\mathcal{A}$ 加群の圏から左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群の圏への関手 g^* を $\mathcal{A}_{Y\to Z}\otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}(-)$ により定義する．

定理 4.7 ([12] 3.7 節)**.** *(1)* g^* は導来関手 $\mathbb{L}g^* : D(\mathcal{A}) \to D(g^{\cdot}\mathcal{A})$ を持つ．

(2) *(1)* の導来関手は $\mathbb{L}g^* : D(\mathcal{O}_Z) \to D(\mathcal{O}_Y)$ によって計算できる．

(3) (1) の導来関手 $\mathbb{L}g^*$ は $D_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A}) \to D_{\mathrm{qc}}(g^{\cdot}\mathcal{A})$ に制限できる.

(4) $\mathbb{L}f^* \circ \mathbb{L}g^* \simeq \mathbb{L}(g \circ f)^*$ が $D(\mathcal{A})$ 上成り立つ.

先ほどと異なり有界性が外れているが議論自体は全く同じように進む. むしろ有界性に関する議論が不要になる.

4.4 順像関手

$g_+ : D_{\mathrm{r}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D_{\mathrm{r}}(\mathcal{A})$ を次の 2 つの関手の合成と定義する:

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y \to Z} : D_{\mathrm{r}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D_{\mathrm{r}}(g^{-1}\mathcal{A})$$
$$\mathbb{R}g_* : D_{\mathrm{r}}(g^{-1}\mathcal{A}) \to D_{\mathrm{r}}(\mathcal{A}).$$

定理 4.8 ([12] 3.8 節)**.** *(1)* g が濃縮であるであるとき g_+ は $D_{\mathrm{r,qc}}(g^{\cdot}\mathcal{A}) \to D_{\mathrm{r,qc}}(\mathcal{A})$ に制限できる.

(2) f が濃縮であるとする. さらに, f が閉埋め込みであるか, X のすべての準コンパクト開部分集合が位相空間として有限次元かつ *Noether* であると仮定する. このとき $(g \circ f)_+ \simeq g_+ \circ f_+$ が成り立つ.

(3) $g = i$ が閉埋め込みであるとする. このとき i_+ は対応するアーベル圏の間の完全関手に制限できる.

基本的には標数 0 の体上の場合と同じ方針で証明される. ただし, 帰着の議論及び導来圏の技術的な議論がいくらか複雑になる. ここでは標数 0 の体上の場合には現れなかった議論を主に説明したい. 従って (3) については省略する.

まず (1) を示す. 主張は Z と S について局所的なので両者はアファインであると仮定してよい. この場合には g は閉埋め込みと射影に分解される. この場合, 仮定から射影は濃縮である. また, 準コンパクト性から Spencer 分解は長さ有限である. あとは標数 0 の体上の場合と同様である.

次に (2) を見る. 次の標準的な射が同値であればよい:

$$\mathbb{R}f_*\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{g^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y \to Z} \to \mathbb{R}f_*(\mathcal{M}^\bullet \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A}} f^{-1}\mathcal{A}_{Y \to Z}).$$

ここで $\mathcal{M}^\bullet \in D_{\mathrm{r}}(f^{-1}g^{\cdot}\mathcal{A})$ である. これを示すにあたっては Y, Z, 及び S はアファインであるとしてよい. $i : Y \to Y \times_S Z$ を g の定めるグラフ射, $\mathrm{pr}_2 : Y \times_S Z \to Z$ を射影とする. このとき,

$$\mathcal{A}_{Y \to Z} \simeq (\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A})_{Y \to Y \times_S Z} \otimes^{\mathbb{L}}_{i^{-1}\mathrm{pr}_2^{\cdot}\mathcal{A}} i^{-1}\mathcal{A}_{Y \times_S Z \to Z}$$

という同値がある. Spencer 分解を使うことで, 左 $g^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群として $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ は局所自由かつ長さ有限の分解を持つと言える. 必要なら Y を適切なアファイン開部分集合に取り換えて自由分解であると仮定してよい. この $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ の自由分解を区切って $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ を自由加群に置き換える. あとは $\mathbb{R}f_*$ が (有限とは限らない) 直和を保つことさえわかればよく, このことは濃縮性と導来圏の技術的な議論から従う. (2) にある有限性の仮定はここで使われることになるのだが, ここでは詳細は省略する. というわけで, Y, Z, S についての帰着と非有界から有界への帰着が新しい議論で, 後の議論は古典の場合と基本的には同じである. なお, 古典の場合のように $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ を準連接加群に置き換えるという方針でも証明はできるが, 帰着の議論が複雑になる上に帰着の途中で結局前述の $\mathcal{A}_{Y \to Z}$ の具体的な分解を使うことになる.

5 最後に

ここまでたくさん関手を定義した．次にこれらの関手の関係がどうなっているかを調べることは基本的な問題であろう．例えば古典的な D 加群論において底変換定理が知られているように, 実はこの一般化された設定においても底変換定理と呼ぶべき定理が存在する．しかも, 関手が古典論よりも増えていることによって底変換定理と呼ぶべき定理も複数存在する．[12] ではそれらのうちのいくつかについても調べている．が, 本稿はここで終わりにして底変換定理については別の機会に説明することにする．

参考文献

[1] A. Altman, B., R. T. Hoobler, and S. L. Kleiman. A note on the base change map for cohomology. *Compositio Math.*, 27:25–38, 1973.

[2] A. Beĭlinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):15–18, 1981.

[3] A. Beilinson and J. Bernstein. A proof of Jantzen conjectures. In *I. M. Gel'fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 1–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[4] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.

[5] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):2000–2053, 2013.

[6] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms: erratum. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):957–960, 2020.

[7] R. Hartshorne. *Residues and duality.* Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, With an appendix by P. Deligne.

[8] T. Hayashi. Half-integrality of the closed $\mathrm{SO}(3)$-orbit on the flag variety of SL_3. 数理解析研究所講究録 2139, 165-176, 2019-12.

[9] T. Hayashi. Half-integrality of line bundles on partial flag schemes of classical Lie groups, 2021. arXiv:2104.13304.

[10] T. Hayashi. Sheaves of twisted differential operators over schemes. To appear. Proceedings of Algebraic Lie Theory and Representation Theory (2022).

[11] T. Hayashi. Twisted D-modules over Dedekind schemes. To appear. Proceedings of 61st joint symposium of real functions and functional analysis (2022).

[12] T. Hayashi and F. Januszewski. Families of twisted $\mathcal{D}$-modules and arithmetic models of Harish-Chandra modules, 2018. arXiv:1808.10709.

[13] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, and J. A. Wolf. Localization and standard modules for real semisimple Lie groups. I. The duality theorem. *Invent. Math.*, 90(2):297–332, 1987.

[14] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[15] M. Kashiwara. Representation theory and D-modules on flag varieties. *Astérisque*, (173-174):9, 55–109, 1989. Orbites unipotentes et représentations, III.

[16] M. Kashiwara and T. Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. II. Nonintegral case. *Duke Math. J.*, 84(3):771–813, 1996.

[17] S. N. Kitchen. Cohomology of standard modules on partial flag varieties. *Represent. Theory*, 16:317–344, 2012.

[18] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[19] J. Lipman. Notes on derived functors and Grothendieck duality. In *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, volume 1960 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–259. Springer, Berlin, 2009.

[20] A. S. Merkurjev and J.-P. Tignol. The multipliers of similitudes and the Brauer group of homogeneous varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 461:13–47, 1995.