Fermionic formulas for twisted affine Lie algebras

大阪公立大学理学研究科 武中亮 *
Ryo Takenaka
Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University

1　はじめに

頂点作用素を用いた可積分最高ウェイト加群の研究は Lepowsky と Primc の研究に端を発する [8]. 彼らは $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ としたときの可積分最高ウェイト $\tilde{\mathfrak{g}}$ 加群の構造が, 真空空間とよばれる可積分最高ウェイト $\tilde{\mathfrak{g}}$ 加群のある剰余空間に同型な代数により完全に決定されることを示した. ここで $\tilde{\mathfrak{g}}$ は中心元 c と次数作用素 d を用いて $\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$ で与えられるアフィンリー環. その後 Georgiev によって $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{n+1}$ の場合に一般化された. その際, Georgiev は Feigin と Stoyanovsky によって導入された主部分空間が重要な役割を果たすことに着目した [5, 6]. 主部分空間の詳細については [3, 4] を参照されたい. また最近, Butorac, Kožić と Primc によって $X_l^{(1)}$ 型アフィンリー環 (untwisted アフィンリー環) についても同様の結果が示された [1].

一方, $X_l^{(r)}(r>1)$ 型アフィンリー環 (twisted アフィンリー環) については主部分空間の組合せ論的基底が構成されて以降進展がなかった [2]. さらに, Butorac と Sadowski の研究 [2] では $A_{2l}^{(2)}$ 型アフィンリー環は扱っておらず, ほとんど進展がなかった. しかし最近, 筆者と大阪公立大学の尾角正人氏との共同研究で $A_{2l}^{(2)}$ 型を除く twisted アフィンリー環に対する可積分最高ウェイト加群の研究成果が得られた [10]. 加えて, 筆者の最近の研究により $A_{2l}^{(2)}$ 型アフィンリー環に対する可積分最高ウェイト加群およびその主部分空間も頂点作用素を用いて構成できることが示された [11].

RIMS 研究集会「表現論とその周辺分野における諸問題」ではこれらの研究成果を紹介するとともに, 組合せ論的な解釈を容易にするアフィンリー環のフェルミ型の指標公式を導出できることを概説した. 本稿はこれらの筆者の講演内容をまとめ, 講演では紹介できなかったパラフェルミオン空間について加筆したものである.

2　準備

$\mathfrak{g}$ を階数 ℓ の simply-laced 単純リー環とし α_i をその単純ルートとする. $\mathfrak{g}$ のルート格子は $L=\mathbb{Z}\alpha_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\alpha_\ell$ で与えられる. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数とする. $\mathfrak{g}$ の正規化された内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を用いて $\mathfrak{h}$ とその双対空間 $\mathfrak{h}^*$ を同一視する. すなわち $h\in\mathfrak{h}$ と $\alpha_h\in\mathfrak{h}^*$ を $\langle\alpha,\alpha_h\rangle=\alpha(h)$ により同一視する. この同一視により $L\subset\mathfrak{h}$ と見做せる. ディンキン図形のラベル付けと非自明な自己同型 ν は表 1 で与えられるとする.

本稿ではペア (L,ν) が次の条件を満たすことを仮定する (cf. [7, Section 2]).

(a) $\langle\nu\alpha,\nu\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle\quad(\forall\alpha,\beta\in L)$

*Email:sn22893m@st.omu.ac.jp　本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものです.

(b) ある正整数 r に対して $\nu^r = 1$

(c) (b) の整数 r が偶数のとき, すべての $\alpha \in L$ に対して $\langle \nu^{\frac{r}{2}}\alpha, \alpha\rangle \in 2\mathbb{Z}$

注意 2.1. L が A_{2l} 型ルート格子の場合 ν の位数は 2 であるが, 条件 (c) により $r = 4$ としなければならない.

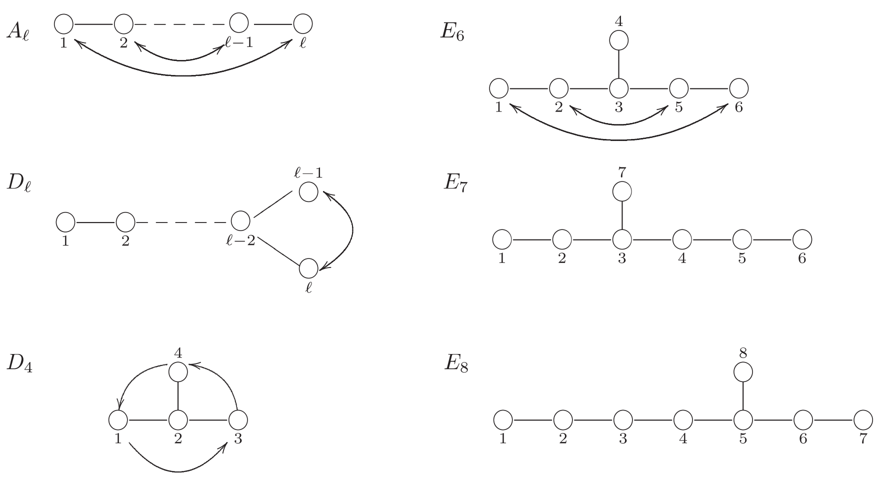

表 1: ディンキン図形と自己同型

はじめに, 可積分最高ウェイト加群の頂点作用素による構成を与える ν-twist 加群を導入する. 関数 $C : L \times L \to \mathbb{C}^\times$ を

$$C(\alpha,\beta) = \prod_{j=0}^{r-1} (-\zeta^j)^{\langle \nu^j \alpha, \beta\rangle}$$

で定義する. ここで ζ は原始 r 乗根. 関数 C はアーベル群 $\mathbb{C}^\times$ に対して双線形で ν-不変である. また, すべての $\alpha \in L$ に対して $C(\alpha,\alpha) = 1$ であるので中心拡大

$$1 \longrightarrow \langle (-1)^r \zeta\rangle \longrightarrow \hat{L} \xrightarrow{\ \bar{}\ } L \longrightarrow 1$$

が一意に定まる. ここで $\bar{\ }$ は L への射影. このとき交換関係は $aba^{-1}b^{-1} = C(\bar{a},\bar{b})$ $(a, b \in \hat{L})$ で与えられる. 写像 $\epsilon : L \times L \to \mathbb{C}^\times$ を

$$\epsilon(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & (i \le j) \\ (-1)^{\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle} & (i > j) \end{cases}$$

で定義する. 写像 ϵ は ν-不変ですべての $\alpha, \beta \in L$ に対して $\epsilon(\alpha,\beta)^2 = 1$ を満たす. また写像 ϵ は

$$\epsilon(\alpha,\beta)\epsilon(\alpha+\beta,\gamma) = \epsilon(\beta,\gamma)\epsilon(\alpha,\beta+\gamma), \quad \frac{\epsilon(\alpha,\beta)}{\epsilon(\beta,\alpha)} = (-1)^{\langle\alpha,\beta\rangle}$$

を満たすので $\hat{L}$ の 2 コサイクル ϵ_C が

$$\epsilon_C(\alpha,\beta) = \left(\prod_{-\frac{r}{2} < j < 0} (-\zeta^{-j})^{-\langle \nu^j \alpha, \beta\rangle} \right) \epsilon(\alpha,\beta)$$

で与えられる．$\hat{L}$ の自己同型 $\hat{\nu}$ は

$$\overline{\hat{\nu}a} = \nu\bar{a}, \quad \nu\bar{a} = \bar{a} \text{ のとき } \hat{\nu}a = a$$

を満たすように ν より与えられる．

同一視の下で L の自己同型 ν は自然に $\mathfrak{h}$ の自己同型へも拡張される．これを同じく ν で表す．このとき分解

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{(j)}$$

を得る．ここで $\mathfrak{h}_{(j)} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \nu h = \zeta^j h\} \subset \mathfrak{h}$ であり, $\mathfrak{h}_{(j \bmod r)}$ と $\mathfrak{h}_{(j)}$ を同一視している．この分解に付随するリー環を

$$\hat{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{(rm)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c$$

で定義する．ブラケット積は

$$[\alpha \otimes t^m, \beta \otimes t^n] = \langle \alpha, \beta \rangle m \delta_{m+n,0} c, \quad [\hat{\mathfrak{h}}, c] = 0 \quad \left(m, n \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}, \alpha \in \mathfrak{h}_{(rm)}, \beta \in \mathfrak{h}_{(rn)} \right)$$

で与えられる． 部分代数を $\hat{\mathfrak{h}}^{\pm} = \bigoplus_{\pm m > 0} \mathfrak{h}_{(rm)} \otimes t^m$ で定める． このとき $\hat{\mathfrak{h}}$ のハイゼンベルグ代数は $\hat{\mathfrak{h}}_{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} = \hat{\mathfrak{h}}^+ \oplus \hat{\mathfrak{h}}^- \oplus \mathbb{C}c$ で与えられる．次に誘導 $\hat{\mathfrak{h}}$ 加群を

$$M(1) = U(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{U(\bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{h}_{(rm)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c)} \mathbb{C} \simeq \mathrm{Sym}(\hat{\mathfrak{h}}^-)$$

で定義する．ここで $\mathbb{C}$ は $\bigoplus_{m \geq 0} \mathfrak{h}_{(rm)} \otimes t^m$ が自明に, c が 1 で作用する 1 次元加群．この加群は既約 $\hat{\mathfrak{h}}_{\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$ 加群である．また $\mathfrak{h}$ の自己同型 ν は

$$\nu(\alpha \otimes t^m) = \nu(\alpha) \otimes t^m, \quad \nu(c) = c$$

により自然に $\hat{\mathfrak{h}}$ の自己同型へと拡張される．加群 $M(1)$ に対しても $\nu(h \cdot m) = \nu(h) \cdot \nu(m)$ $(h \in \hat{\mathfrak{h}}, m \in M(1))$ を満たすように自己同型が与えられる．

続いて $\hat{L}$ 加群を考える．P_j を $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}_{(j)}$ $(j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ への射影とし,

$$N = (1 - P_0)\mathfrak{h} \cap L = \{\alpha \in L \mid \langle \alpha, \mathfrak{h}_{(0)} \rangle\}$$

とする．具体的には

$$N = \begin{cases} \{r_1\alpha_1 + r_3\alpha_3 + r_4\alpha_4 \mid r_1 + r_3 + r_4 = 0\} & (r = 3) \\ \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}(\alpha_i - \nu\alpha_i) & (r \neq 3) \end{cases}$$

となる．N を引き戻すことで得られる $\hat{L}$ の部分群を $\hat{N}$ とする．このとき, 次の準同型 $\tau : \hat{N} \to \mathbb{C}^\times$ が存在することが示されている．

命題 2.2. *[7, Proposition 6]* 準同型 $\tau : \hat{N} \to \mathbb{C}^\times$ で

$$\tau(\zeta) = \zeta, \quad \tau(a\hat{\nu}a^{-1}) = \zeta^{-\sum_{j=0}^{r-1} \langle \nu^j \bar{a}, \bar{a} \rangle}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

$\mathbb{C}_\tau$ を指標 τ をもつ 1 次元 $\hat{N}$ 加群とする．このとき誘導 $\hat{L}$ 加群を

$$U_T = \mathbb{C}[\hat{L}] \otimes_{\mathbb{C}[\hat{N}]} \mathbb{C}_\tau \simeq \mathbb{C}[L/N]$$

で定義する．このとき $\hat{\mathfrak{h}}_{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \subset \hat{\mathfrak{h}}$ が U_T へ自明に作用するとすることで U_T は $\hat{\mathfrak{h}}$ 加群となる．ここで $\mathfrak{h}_{(0)}$ は U_T に

$$h \cdot a \otimes t = \langle h, \bar{a} \rangle a \otimes t \quad (h \in \mathfrak{h}_{(0)})$$

で作用するものとし, $[h, a] = \langle h, \bar{a} \rangle$ とおく．作用素 z^h を

$$z^h \cdot a \otimes t = z^{\langle h, \bar{a} \rangle} a \otimes t \quad (h \in \mathfrak{h}_{(0)})$$

で定義する．また $\langle h, L \rangle \subset \mathbb{Z}$ であるような $h \in \mathfrak{h}_{(0)}$ に対して, 作用素 ζ^h を同様に $\zeta^h \cdot a \otimes t = \zeta^{\langle h, \bar{a} \rangle} a \otimes t$ で定義する．このとき命題 2.2 と定義から U_T への作用として次が成立する．

$$\hat{\nu} a = a \zeta^{-\sum_{j=0}^{r-1} \nu^j \bar{a} - \sum_{j=0}^{r-1} \langle \nu^j \bar{a}, \bar{a} \rangle / 2}. \tag{1}$$

$\hat{\mathfrak{h}}$ 加群のテンソル積を

$$V_L^T = M(1) \otimes U_T \simeq \mathrm{Sym}(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes \mathbb{C}[L/N]$$

とおき, $\mathbf{1}_T = 1 \otimes (1 \otimes 1) \in V_L^T$ とする．次に V_L^T 上の作用を与える頂点作用素を定義し, V_L^T に ν-twist 加群の構造を与える．$\alpha \in \mathfrak{h}, j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ に対して $\alpha_{(j)} = P_j(\alpha)$ とし, $\alpha(m) = \alpha_{(rm)} \otimes t^m$ $(m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z})$ とおく．このとき頂点作用素が

$$\alpha(z) = \sum_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \alpha(m) z^{-m-1}$$

$$Y(a, z) = r^{-\frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}{2}} \sigma(\bar{a}) {}^{\circ}_{\circ} \exp\left(\sum_{m \neq 0} -\frac{\bar{a}(m)}{m} z^{-m} \right) {}^{\circ}_{\circ} a z^{\bar{a}_{(0)} + \frac{\langle \bar{a}_{(0)}, \bar{a}_{(0)} \rangle}{2} - \frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}{2}}$$

で定義される $(\alpha \in \mathfrak{h}, a \in \hat{L})$．ここで ${}^{\circ}_{\circ} \cdot {}^{\circ}_{\circ}$ は頂点作用素の正規順序積で $\sigma : L \to \mathbb{C}^\times$ は

$$\sigma(\bar{a}) = \begin{cases} 1 & (r \leq 2) \\ (1 - \zeta^{-1})^{\langle \nu \bar{a}, \bar{a} \rangle} & (r = 3) \\ (1 + \zeta)^{\langle \nu \bar{a}, \bar{a} \rangle} 2^{\frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}{2}} & (r = 4) \end{cases}$$

で与えられる．頂点作用素 $Y(a, z)$ について, (1) より次が成立する．

補題 2.3.

$$Y(\hat{\nu}^j a, z) = Y(a, z)|_{z^{\frac{1}{r}} \mapsto \zeta^{-j} z^{\frac{1}{r}}}$$

いま L は正定値偶格子であるので格子頂点代数 V_L を誘導する．このとき頂点代数 V_L の自己同型が $\nu \otimes \hat{\nu}$ により与えられ, V_L^T はペア $(V_L, \nu \otimes \hat{\nu})$ に対する ν-twist 加群になることが知られている (cf. [7])．

最後にペア (L, ν) から twisted アフィンリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を定義し, アフィンリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の V_L^T への作用が与えられることを確認する．これにより可積分最高ウェイト加群の V_L^T を用いた実現が可能となる．$\mathfrak{g}$ のルートの集合を Δ とする．このとき $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$$

と分解される．ここで x_α は $[h, x_\alpha] = \alpha(h) x_\alpha$ を満たすルートベクトル．ルートベクトル x_α をそのブラケット積が

$$[x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} \epsilon_C(\alpha, -\alpha)\alpha & (\alpha + \beta = 0) \\ \epsilon_C(\alpha, \beta) x_{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}) \end{cases}$$

となるように正規化する．またこのとき $\mathfrak{g}$ の内積は

$$\langle h, x_\alpha \rangle = 0, \quad \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \begin{cases} \epsilon_C(\alpha, -\alpha) & (\alpha+\beta=0) \\ 0 & (\alpha+\beta\neq 0) \end{cases}$$

となる．ここで $\mathfrak{h}$ 上ではもとの内積と一致することに注意されたい．次に, twisted アフィンリー環を定義するために $\mathfrak{h}$ の自己同型 ν を $\mathfrak{g}$ へと拡張する．写像 $\varphi : (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \times L \to \langle \zeta \rangle$ を次の条件で定義する．

$$\hat{\nu}^j(a) = \varphi(j, \bar{a})a'$$

ここで a' は $\bar{a'} = \nu^j \bar{a}$ を満たす $\hat{L}$ の元で唯一つに定まる．この写像を用いて $\mathfrak{g}$ の自己同型 ν を

$$\nu^j x_\alpha = \varphi(j, \alpha) x_{\nu^j \alpha}$$

で定義する．

$j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ に対して $\mathfrak{g}_{(j)} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \nu x = \zeta^j x\}$ とする．ペア (L, ν) に付随するアフィンリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ を

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{(rm)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

で定義する．このときブラケット積は

$$[x \otimes t^m, y \otimes t^n] = [x, y] \otimes t^{m+n} + \langle x, y \rangle m \delta_{m+n,0} c, \quad [\tilde{\mathfrak{g}}, c] = 0, \quad [d, x \otimes t^m] = mx \otimes t^m$$

で与えられる．このリー環 $\tilde{\mathfrak{g}}$ はペア (L, ν) の選び方に対応して $A^{(2)}_{2l-1}, A^{(2)}_{2l}, D^{(2)}_{l+1}, E^{(2)}_6, D^{(3)}_4$ 型のいずれかのアフィンリー環と同型になる．

頂点作用素 $Y(a, z)$ を簡単のため $Y_{\bar{a}}(z)$ と表し, そのフーリエ係数を

$$Y_{\bar{a}}(z) = \sum_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} Y_{\bar{a}}(m) z^{-m-\frac{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}{2}}$$

で与える．このとき次の定理により V_L^T は $\tilde{\mathfrak{g}}$ 加群となる．

定理 2.4. *[7, Theorem 9.1]* $\hat{\mathfrak{h}}$ の V_L^T への作用は

$$(x_\alpha)_{(rm)} \otimes t^m \mapsto Y_\alpha(m) \quad \left(\alpha \in \Delta, m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}\right)$$

とすることで $\tilde{\mathfrak{g}}$ の作用へと一意に拡張される．さらにこのとき V_L^T は $\tilde{\mathfrak{g}}$ 加群として既約である．

定理 2.4 により V_L^T は最高ウェイト Λ_0 をもつ可積分最高ウェイト加群であることがわかる．ここで Λ_0 は $\langle \Lambda_0, c \rangle = 1$, $\langle \Lambda_0, \mathfrak{h}_{(0)} \rangle = 0 = \langle \Lambda_0, d \rangle$ を満たす基本ウェイト．また $V_L^T \simeq L(\Lambda_0)$ の最高ウェイトベクトルは $\mathbf{1}_T$ である．これにより最高ウェイトが $k\Lambda_0$ の可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ が V_L^T のテンソル積の部分加群として実現できる．すなわち

$$L(k\Lambda_0) \simeq U(\tilde{\mathfrak{g}}) \cdot v_0 \subset (V_L^T)^{\otimes k}$$

となる．ここで $v_0 = \mathbf{1}_T \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_T$ は $L(k\Lambda_0)$ の最高ウェイト加群で, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の作用は

$$\Delta^{(k-1)}(x) = x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x$$

で与えられているとする．これは頂点作用素についても同様で, $n \in \mathbb{Z}_{0\geq}$ に対して

$$x_{n\alpha}(z) = [\Delta^{(k-1)}(Y_\alpha(z))]^n$$

とおく．このときフーリエ係数は

$$x_{n\alpha}(z) = \sum_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} x_{n\alpha}(m) z^{-m-n\langle\alpha,\alpha\rangle/2} \tag{2}$$

で定義されるとする．

注意 2.5. 以降では $\nu \neq \mathrm{id}$ の場合, すなわち twisted アフィンリー環の場合について述べるが, $\nu = \mathrm{id}$ としても成立する．その場合は V_L^T は格子頂点代数 V_L に他ならず, [1] で計算された $A_l^{(1)}, D_l^{(1)}, E_{6,7,8}^{(1)}$ 型アフィンリー環についての結果と一致する．

3 主部分空間

可積分最高ウェイト加群の組合せ論的基底の構成で重要な主部分空間の定義を確認する．またその組合せ論的基底が, quasi-particle と呼ばれる頂点作用素のフーリエ係数を用いて与えられることを見る．

正ルートの集合を Δ_+ とし, 対応する部分代数を

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathbb{C} x_\alpha$$

とおく．アフィン化とその部分代数がそれぞれ

$$\hat{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathfrak{n}_{(rm)} \otimes t^m \oplus \mathbb{C}c, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{m \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathfrak{n}_{(rm)} \otimes t^m$$

で得られる．このとき $L(k\Lambda_0)$ の主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ が

$$W(k\Lambda_0) = U(\bar{\mathfrak{n}}) \cdot v_0$$

で定義される．次に $W(k\Lambda_0)$ の基底を与える quasi-particle とその単項式を導入する．カラーが i, 電荷が n, エネルギーが $-m$ の quasi-particle を頂点作用素 $x_{n\alpha_i}(z)$ を (2) の形で表したときの $x_{n\alpha_i}(m)$ で定義する．このとき quasi-particle 単項式は

$$b = x_{n_{r_l^{(1)},l}\alpha_l}(m_{r_l^{(1)},l}) \cdots x_{n_{1,l}\alpha_l}(m_{1,l}) \cdots x_{n_{r_1^{(1)},1}\alpha_1}(m_{r_1^{(1)},1}) \cdots x_{n_{1,1}\alpha_1}(m_{1,1}) \tag{3}$$

で定義される．ここで電荷とエネルギーは各 i に対して $1 \leq n_{r_i^{(1)},i} \leq \cdots \leq n_{1,i}, m_{r_i^{(1)},i} \leq \cdots \leq m_{1,i}$ を満たすとする．このような quasi-particle 単項式全体の集合を M_{QP} とする．単項式 (3) に対して次の列を定義する．

$$\mathcal{R}' = \left(n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,l}; \cdots; n_{r_1^{(1)},1}, \ldots, n_{1,1}\right), \quad \mathcal{E} = \left(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,l}; \cdots; m_{r_1^{(1)},1}, \ldots, m_{1,1}\right)$$

これらはそれぞれ電荷列, エネルギー列と呼ばれる．また電荷列に対してその双対電荷列 $\mathcal{R}$ が

$$\mathcal{R} = \left(r_l^{(1)}, \ldots, r_l^{(s_l)}; \cdots; r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(s_1)}\right)$$

で定義される．ここで $(r_i^{(1)}, \ldots, r_i^{(s_i)})$ は $(n_{1,i}, \ldots, n_{r_i^{(1)},i})$ の共役な分割で与えられる．

注意 3.1. 定義から $r_i^{(s)}$ は単項式 (3) の中でカラーが i, 電荷が s 以上の quasi-partilce の個数に一致することがわかる．また $L(k\Lambda_0)$ 上 $x_{(k+1)\alpha}(z) = 0$ であるので $r_i^{(s)} = 0$ $(s > k)$ となることもわかる．

単項式 (3) の各エネルギーに条件を課すことで $W(k\Lambda_0)$ の基底を構成する．まずアフィンリー環の型に依らない記述のために次の記号を導入する．

$$\chi_i = \begin{cases} 2 & (\tilde{\mathfrak{g}} = A_{2l}^{(2)}\text{かつ } i = l) \\ 1 & (\text{上記以外}) \end{cases}, \quad \rho_i = \frac{1}{2}\langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_i)_{(0)}\rangle$$

このとき補題 2.3 によりエネルギーは次の範囲で考えれば十分であることがわかる．

$$① \quad m_{p,i} \in \rho_i n_{p,i} + \rho_i \chi_i \mathbb{Z} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)}, 1 \leq i \leq l)$$

次の頂点作用素の交換関係に着目する．

$$\begin{aligned} &\exp\left(\sum_{m>0} \frac{\alpha(m)}{m} z^{-m}\right) \exp\left(\sum_{m<0} \frac{\beta(m)}{m} w^{-m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m<0} \frac{\beta(m)}{m} w^{-m}\right) \exp\left(\sum_{m>0} \frac{\alpha(m)}{m} z^{-m}\right) \prod_{j=1}^{r-1} \left(1 - \zeta^j \frac{w^{\frac{1}{r}}}{z^{\frac{1}{r}}}\right)^{\langle \nu^j \alpha, \beta \rangle} \end{aligned} \tag{4}$$

この交換関係 (4) により次の条件が導かれる．

$$②' \quad m_{p,i} \leq -\langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_{i-1})_{(0)}\rangle \sum_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{n_{p,i}, n_{q,i-1}\} + \frac{1}{2}(\chi_i - 1)(p-1)n_{p,i} - \rho_i n_{p,i}$$
$$(1 \leq p \leq r_i^{(1)}, 1 \leq i \leq l)$$

ここで $r_0^{(1)} = 0$ とする．また quasi-partilce 単項式について次の補題が成立する．

補題 3.2. *(i)* 電荷 $n_2 < n_1$ を固定する．このとき $(3 - \chi_i)n_2$ 個の単項式

$$x_{n_2\alpha_i}(m)x_{n_1\alpha_i}(m'), x_{n_2\alpha_i}(m - \rho_i\chi_i)x_{n_1\alpha_i}(m' + \rho_i\chi_i), \ldots$$

$$\ldots, x_{n_2\alpha_i}(m - (2n_2 - \chi_i)\rho_i)x_{n_1\alpha_i}(m' + (2n_2 - \chi_i)\rho_i)$$

は $s \leq m - 2\rho_i n_2$, $t \geq m + 2\rho_i n_2$ を満たす単項式 $x_{n_2\alpha_i}(s)x_{n_1\alpha_i}(t)$ と $x_{(n_1+1)\alpha_i}(j)$ の線形結合で表される．

(ii) 電荷 n_1 を固定する．このとき次の単項式

$$\{x_{n_1\alpha_i}(m)x_{n_1\alpha_i}(m') \mid m' - 2\rho_i n_1 < m \leq m'\}$$

は $s \leq t - 2\rho_i n_1$ を満たす単項式 $x_{n_1\alpha_i}(s)x_{n_1\alpha_i}(t)$ と $x_{(n_1+1)\alpha_i}(j)$ の線形結合で表される．

補題 3.2 (i) を用いることで条件 ②$'$ を次で取り替えることができる．

$$② \quad m_{p,i} \leq -(2p-1)\rho_i n_{p,i} - \langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_{i-1})_{(0)}\rangle \sum_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}} \min\{n_{p,i}, n_{q,i-1}\} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)}, 1 \leq i \leq l)$$

さらに補題 3.2 (ii) を用いて, 同じカラーをもつ quasi-partilce 同士に対する次の条件が導かれる．

$$③ \quad n_{p+1,i} = n_{p,i}\text{のとき } m_{p+1,i} \leq m_{p,i} - 2\rho_i n_{p,i} \quad (1 \leq p \leq r_i^{(1)} - 1, 1 \leq i \leq l)$$

集合 $B_W \subset M_{QP}$ を

$$B_W = \bigcup_{\substack{0\le r_1^{(k)}\le\cdots\le r_1^{(1)}\\ \vdots \\ 0\le r_l^{(k)}\le\cdots\le r_l^{(1)}}} \{b \in M_{QP} \mid b \text{ は条件①} - \text{③を満たす}\}$$

で定義する．このとき次が成立する．

定理 3.3. *[2, Theorem 5.1], [11, Theorem 10]* 集合

$$\mathcal{B}_W = \{bv_0 \mid b \in B_W\}$$

は主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ の基底である．

4 可積分最高ウェイト加群

主部分空間の基底が quasi-particle 単項式で与えられることを確認した．命題 4.1 で与えられる頂点作用素公式を用いると, 可積分最高ウェイト加群は凡そ主部分空間のベクトルで生成されることがわかる．主部分空間の基底に適当な制限を与えることで, 可積分最高ウェイト加群の組合せ論的が得られることを確認する．

$Q = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i \subset L$ とする．ここで $E_6^{(2)}, D_4^{(3)}$ についてはそれぞれ $l = 4, 2$ とする．また untwisted アフィンリー環については $Q = L$ となる．まず Q と同型になる乗法群の $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の随伴作用を

$$\begin{aligned}
&e_\alpha c e_\alpha^{-1} = c,\\
&e_\alpha d e_\alpha^{-1} = d + \alpha - \frac{1}{2}\langle\alpha_{(0)}, \alpha_{(0)}\rangle c,\\
&e_\alpha h e_\alpha^{-1} = h - \alpha(h)c \quad (h \in \mathfrak{h}_{(0)}),\\
&e_\alpha h(m) e_\alpha^{-1} = h(m) \quad (m \neq 0),\\
&e_\alpha x_\beta(m) e_\alpha^{-1} = C(\alpha,\beta) x_\beta(m - \langle\alpha, \beta_{(0)}\rangle)
\end{aligned}$$

で定義する．随伴作用 e_α は $L(k\Lambda_0)$ 上対角的に作用する．すなわち $e_\alpha \mapsto e_\alpha \otimes \cdots \otimes e_\alpha$ となる．またこの作用は $\tilde{\mathfrak{g}}$ のアフィンワイル群の推進作用素に対応する．untwisted アフィンリー環の場合については [1, Section 1.5] を参照されたい．この随伴作用と交換関係 (4) を用いて次の命題が示される．

命題 4.1. 頂点作用素 $x_\alpha(z)$ を $\tilde{x}_\alpha(z) = r\sigma(\alpha)^{-1}x_\alpha(z)$ と正規化する．このとき $p + q = k$ となる非負整数 p, q に対して

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{m<0}\frac{\alpha(m)}{m}z^{-m}\right)\left(\frac{1}{p!}(z\tilde{x}_\alpha(z))^p\right)\exp\left(\sum_{m>0}\frac{\alpha(m)}{m}z^{-m}\right)\\
&= \frac{1}{q!}\left(\epsilon_C(\alpha,-\alpha)^{-1}z\tilde{x}_{-\alpha}(z)\right)^q e_\alpha z^{\alpha_{(0)} + \frac{k\langle\alpha_{(0)},\alpha_{(0)}\rangle}{2}}
\end{aligned}$$

が $L(k\Lambda_0)$ 上で成立する．

命題 4.1 により, $\alpha \in \Delta_+$ に対して頂点作用素 $x_{-\alpha}(z)$ の作用は頂点作用素 $x_\alpha(z)$, カルタン部分代数 $U(\hat{\mathfrak{h}})$, 随伴作用 $e_{-\alpha}$ の積で書き換えることができる．これにより次の補題が示される．

補題 4.2. $L(k\Lambda_0) = QU(\hat{\mathfrak{h}}^-)W(k\Lambda_0)$

注意 4.3. 補題 4.2 により $QU(\hat{\mathfrak{h}}^-)\mathcal{B}_W$ は可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ を生成することがわかるが, 基底とはならないことに注意されたい. 実際 $\tilde{\mathfrak{g}} = A_{2l}^{(2)}, k = 1$ のとき

$$x_{\alpha_1}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot v_0 = \frac{1}{2} e_{\alpha_1} \cdot v_0$$

が成立する. 他のアフィンリー環についても同様である.

基底を構成するために $QU(\hat{\mathfrak{h}}^-)\mathcal{B}_W$ を制限する. まずは集合 $B_H \subset U(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ を

$$B_H = \left\{ h_{\alpha_l} \cdots h_{\alpha_1} \;\middle|\; \begin{array}{l} h_{\alpha_i} = \alpha_i(-m_{t_i,i})^{n_{t_i,i}} \cdots \alpha_i(-m_{1,i})^{n_{1,i}}, i = 1, \ldots, l, \\ t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m_{t_i,i} > \cdots > m_{1,i}, m_{p,i} \in \rho_i \chi_i \mathbb{Z}_+, n_{p,i} \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

で定義する. 次に B_W の部分集合を $B'_W = \{b \in B_W \mid n_{1,i} < k, i = 1, \ldots, l\}$ で定義する. すなわち B'_W は B_W の単項式で全ての電荷が k 未満であるもの全体. このとき次が成立する.

定理 4.4. *[10, Theorem 8],[11, Theorem 13]* 集合

$$\mathcal{B}_L = \{e_\mu h b v_0 \mid \mu \in Q, h \in B_H, b \in B'_W\}$$

は可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ の基底である.

5 パラフェルミオン空間

この章では講演では扱うことのできなかったパラフェルミオン空間について説明する. このときパラフェルミオン空間の組合せ論的基底も可積分最高ウェイト加群の基底から得られることを確認する.

まず, 可積分最高ウェイト加群の真空空間を

$$L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} = \{v \in L(k\Lambda_0) \mid \hat{\mathfrak{h}}^+ \cdot v = 0\}$$

で定義する. このとき次の同型が存在することが知られている.

定理 5.1. *[9, A5.3]* ベクトル空間として

$$U(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \xrightarrow{\simeq} L(k\Lambda_0)$$

が成立する. ここで $U(\hat{\mathfrak{h}}^-) \simeq \mathrm{Sym}(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ はハイゼンベルグ代数 $\hat{\mathfrak{h}}_{\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$ に対するレベル k のフォック空間.

定理 5.1 により直和分解

$$L(k\Lambda_0) = L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \oplus \hat{\mathfrak{h}}^- U(\hat{\mathfrak{h}}^-) L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$$

を得る. この分解から得られる射影を $\pi^{\hat{\mathfrak{h}}^+} : L(k\Lambda_0) \to L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ とする. 電荷列 $\mathcal{R}' = (n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,1})$ を固定する. 簡単のため電荷列 $\mathcal{R}'$ に対する頂点作用素を $x_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) = x_{n_{r_l^{(1)},l}\alpha_l}(z_{r_l^{(1)},l}) \cdots x_{n_{1,1}\alpha_1}(z_{1,1})$ で表す. 次に電荷列 $\mathcal{R}'$ に対する $\mathcal{Z}$ 作用素を

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) =& \exp\left(\sum_{m<0} \frac{\alpha_l(m)}{m} z_{r_l^{(1)},l}^{-m}\right)^{n_{r_l^{(1)},l}/k} \cdots \exp\left(\sum_{m<0} \frac{\alpha_1(m)}{m} z_{1,1}^{-m}\right)^{n_{1,1}/k} \\ &\times x_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) \exp\left(\sum_{m>0} \frac{\alpha_l(m)}{m} z_{r_l^{(1)},l}^{-m}\right) \cdots \exp\left(\sum_{m>0} \frac{\alpha_1(m)}{m} z_{1,1}^{-m}\right) \\ =& \sum_{m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1} \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1}) z_{r_l^{(1)},l}^{-m_{r_l^{(1)},l} - n_{r_l^{(1)},l}} \cdots z_{1,1}^{-m_{1,1} - n_{1,1}} \end{aligned}$$

で定義する．$\mathcal{Z}$ 作用素はハイゼンベルグ代数 $\hat{\mathfrak{h}}_{\frac{1}{r}\mathbb{Z}}$ の作用と可換であるので, $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ 上 well-defined となる．また定義から quasi-particle 単項式を $\mathcal{Z}$ 作用素で表すことが可能である．すなわち

$$\pi^{\hat{\mathfrak{h}}^+} : x_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})v_0 \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})v_0$$

となる．このとき次が成立する．

定理 5.2. *[10, Theorem 9], [11, Theorem 14]* 集合

$$\mathcal{B}_V = \left\{ e_\mu \pi^{\hat{\mathfrak{h}}^+}(bv_0) \mid \mu \in Q, b \in B'_W \right\} = \left\{ e_\mu \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1})v_0 \right\}$$

は真空空間 $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ の基底である．

次に真空空間の商空間としてパラフェルミオン空間を定義する．まず部分格子 $kQ \subset Q$ に対して $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ 上の対角作用を

$$k\alpha \mapsto \rho(k\alpha) = e_\alpha \otimes \cdots \otimes e_\alpha$$

で定義する．このときウェイト μ に対して $\rho(k\alpha) : L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \to L(k\Lambda_0)_{\mu+k\alpha}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ が成立する．最高ウェイトが $k\Lambda_0$ のパラフェルミオン空間 $L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ を kQ 余不変な空間として

$$L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+} = L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} / \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ (\rho(k\alpha) - 1) \cdot v \mid \alpha \in Q, v \in L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \right\}$$

で定義する．このとき同型

$$L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \simeq \bigoplus_{\mu \in k\Lambda_0 + Q/kQ} L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$$

が得られる．また定義より自然な射影 $\pi_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+} : L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \to L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ が存在することがわかる．

$\mathcal{Z}$ 作用素を用いてパラフェルミオン空間への作用素を定義する．電荷列 $\mathcal{R}' = (n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,1})$ を固定する．電荷列 $\mathcal{R}'$ に対するパラフェルミオン作用素が

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) =& \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1}) z_{r_l^{(1)},l}^{-n_{r_l^{(1)},l}(\alpha_l)_{(0)}/k} \cdots z_{1,1}^{-n_{1,1}(\alpha_1)_{(0)}/k} \epsilon_{\alpha_l}^{-n_{r_l^{(1)},l}/k} \cdots \epsilon_{\alpha_1}^{-n_{1,1}/k} \\ =& \sum_{m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1}} \psi_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1}) z_{r_l^{(1)},l}^{-m_{r_l^{(1)},l} - n_{r_l^{(1)},l}} \cdots z_{1,1}^{-m_{1,1} - n_{1,1}}\end{aligned}$$

で定義される．ここで $\epsilon_\beta : L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+} \to L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ は

$$\epsilon_\beta(u) = C(\beta, \mu)u \quad (u \in L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+})$$

で定義され, 和は列 $(m_{r_l^{(1)},l}, \ldots, m_{1,1})$ が $L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ 上で $m_{p,i} \in n_{p,i}(\rho_i + \frac{\langle (\alpha_i)_{(0)}, \mu \rangle}{k}) + \rho_i \chi_i \mathbb{Z}$ となるようにとる．このとき, パラフェルミオン作用素は kQ の対角作用と可換である．すなわち

$$[\rho(k\alpha), \Psi_{\mathcal{R}'}(z_{r_l^{(1)},l}, \ldots, z_{1,1})] = 0$$

が成立する．従ってパラフェルミオン作用素は $L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ 上で well-defined である．次に $\mathcal{Z}$ 作用素とパラフェルミオン作用素の関係を見る．

補題 5.3. ウェイト μ, $m \in \rho_i n + \rho_i \chi_i \mathbb{Z}$ に対して次が成立する．

$$\mathcal{Z}_{n\alpha_i}(m)\big|_{L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+}} = C(n\alpha_i, \mu) \psi_{n\alpha_i}(m + \langle n(\alpha_i)_{(0)}, \mu \rangle / k)\big|_{L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+}}$$

補題 5.3 より

$$\pi_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+} : \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l},\ldots,m_{1,1})v_0 \mapsto \psi_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l},\ldots,m_{1,1})v_0$$

が成立する．簡単のため同じ記号を用いているが, 左辺と右辺では $m_{p,i}$ が取り得る値は異なることに注意されたい．また, 定義と定理 5.2 より次が成立する．

定理 5.4. *[10, Theorem 13], [11, Theorem 18]* 集合

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{pf} &= \left\{\pi_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}\left(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l},\ldots,m_{1,1})v_0\right) \mid \mathcal{Z}_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l},\ldots,m_{1,1})v_0 \in \mathcal{B}_V\right\}\\ &= \left\{\psi_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)},l},\ldots,m_{1,1})v_0\right\}\end{aligned}$$

はパラフェルミオン空間 $L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ の基底である．

6　フェルミ型指標公式

これまでに求めた組合せ論的基底を用いて主部分空間, 可積分最高ウェイト加群, パラフェルミオン空間のフェルミ型指標公式をそれぞれ計算する．

主部分空間 $W(k\Lambda_0)$ と可積分最高ウェイト加群 $L(k\Lambda_0)$ 上では $-d$ によりウェイトを計算する．すなわち

$$[-d,\alpha(m)] = -m\alpha(m),\quad [-d,x_\alpha(m)] = \left(-m-1+\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}\right)x_\alpha(m) = -mx_\alpha(m)$$

が成立する．このとき $W(k\Lambda_0)$ の指標は

$$\mathrm{ch}\ W(k\Lambda_0) = \sum_{m,r_1,\ldots,r_l} \dim\ W(k\Lambda_0)_{(m,r_1,\ldots,r_l)} q^m y_1^{r_1}\cdots y_l^{r_l}$$

で定義される．ここで $W(k\Lambda_0)_{(m,r_1,\ldots,r_l)}$ は $\mathfrak{h}_{(0)}\oplus\mathbb{C}d$ に関するウェイトが $k\Lambda_0 - m\delta + r_1\alpha + \cdots + r_l\alpha_l$ のベクトルで生成されるウェイト部分空間．同様にして $L(k\Lambda_0)$ の指標も定義される．列 $\mathcal{P}_i^{(s)} = (p_i^{(1)},\ldots,p_i^{(s)})$ を各成分が $p_i^{(s)} = r_i^{(s)} - r_i^{(s+1)}$ で与えられるように定義し, $\mathcal{P}^{(s)} = (\mathcal{P}_1^{(s)},\ldots,\mathcal{P}_l^{(s)})$ とする．このとき定義から $p_i^{(s)}$ は単項式 (3) に対するカラーが i, 電荷が s の quasi-particle の個数に一致する．ポッホハマー記号は

$$(x;q)_\infty = \prod_{j\le 0}(1-xq^j)$$

で定義される．簡単のため $(q;q)_\infty = (q)_\infty$ とおく．また $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $(q)_n$ を

$$(q)_n = (q;q)_\infty/(q^{n+1};q)_\infty$$

で定義する．定理 3.3 から次が成立する．

定理 6.1. *[2, Theorem 6.1], [11, Theorem 19]*

$$\mathrm{ch}\ W(k\Lambda_0) = \sum_{\mathcal{P}^{(k)}} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)},(\alpha_j)_{(0)}\rangle\sum_{s,t=1}^{k}\min\{s,t\}p_i^{(s)}p_j^{(t)}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=1}^{k}(q^{\rho_i\chi_i})_{p_i^{(s)}}} \prod_{i=1}^{l} y_i^{\sum_{s=1}^{k} sp_i^{(s)}}$$

ここで列 $\mathcal{P}^{(k)}$ は lk 個の非負整数からなる．

注意 6.2. [2, Theorem 6.1] において, $W(k\Lambda_0)$ の指標は双対電荷列 $\mathcal{R}=(r_l^{(1)},\dots,r_1^{(k)})$ を用いて記述されているが関係式

$$\sum_{p=1}^{r_i^{(1)}}(2p-1)n_{p,i}=\sum_{s,t=1}^{k}\min\{s,t\}p_i^{(s)}p_i^{(t)}$$

$$\sum_{p=1}^{r_i^{(1)}}\sum_{q=1}^{r_{i-1}^{(1)}}\min\{n_{p,i},n_{q,i-1}\}=\sum_{s,t=1}^{k}\min\{s,t\}p_i^{(s)}p_{i-1}^{(t)}$$

を用いることで定理 6.1 のとおり書ける.

次に $L(k\Lambda_0)$ の指標を計算するが, 定理 5.1 により

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{l}(q^{\rho_i\chi_i})_\infty}\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$$

が成立する. さらに定理 5.2 から

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}=\sum_{\eta\in Q_{(0)}}q^{\frac{\langle\eta,\eta\rangle}{2k}}\sum_{\lambda\in\eta+kQ_{(0)}}q^{-\frac{\langle\lambda,\lambda\rangle}{2k}}\mathrm{ch}\ W((k-1)\Lambda_0)_\lambda\prod_{i=1}^{l}y_i^{\eta_i} \tag{5}$$

となることがわかる. ここで $\eta=\sum_{i=1}^{l}\eta_i(\alpha_i)_{(0)},\lambda=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(\alpha_i)_{(0)}$ で, $\mathrm{ch}\ W((k-1)\Lambda_0)_\lambda$ は $\mathrm{ch}\ W((k-1)\Lambda_0)$ における $\prod_{i=1}^{l}y_i^{\lambda_i}$ の係数であるとする. このとき次が成立する.

定理 6.3. *[10, Theorem 17], [11, Theorem 22]*

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{l}(q^{\rho_i\chi_i})_\infty}\sum_{\eta\in Q_{(0)}}q^{\frac{\langle\eta,\eta\rangle}{2k}}\prod_{i=1}^{l}y_i^{\eta_i}\sum_{\mathcal{P}^{(k-1)}}\frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)},(\alpha_j)_{(0)}\rangle\sum_{s,t=1}^{k-1}D_{s,t}^{(k)}p_i^{(s)}p_j^{(t)}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=1}^{k-1}(q^{\rho_i\chi_i})_{p_i^{(s)}}}$$

ここで

$$D_{s,t}^{(k)}=\min\{s,t\}-\frac{st}{k}$$

で, 列 $\mathcal{P}^{(k-1)}$ は

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{k-1}sp_i^{(s)}(\alpha_i)_{(0)}\in\eta+kQ_{(0)}$$

を満たす $l(k-1)$ 個の非負整数からなる.

注意 6.4. ここで $L(k\Lambda_0)$ の指標では列 $\mathcal{P}$ の添字が $k-1$ に変わっていることに注意されたい. また $\min\{s,t\}$ を $D_{s,t}^{(k)}$ に取り替えることで (5) における $q^{-\frac{\langle\eta,\eta\rangle}{2k}}$ の寄与を打ち消すことができる.

最後に $L(k\Lambda_0)_{kQ}^{\hat{\mathfrak{h}}^+}$ の指標を計算する. そのためにウェイト計算するのに適切な作用素を導入する. 次数作用素 D を

$$D=-d-D^{\hat{\mathfrak{h}}^+},\quad D^{\hat{\mathfrak{h}}^+}\Big|_{L(k\Lambda_0)_\mu^{\hat{\mathfrak{h}}^+}}=\frac{\langle\mu_{(0)},\mu_{(0)}\rangle}{2k}$$

で定義する. このとき quasi-partilce に対して

$$[D,x_{\alpha_i}(m)]=\left(-m-\frac{\rho_i}{k}\right)x_{\alpha_i}(m)$$

が成立する. 従って

$$[D,\psi_{\alpha_i}(m)]=\left(-m-\frac{\rho_i}{k}\right)\psi_{\alpha_i}(m)$$

が得られる．これをもとに $\psi_{\alpha_i}(m)$ の共形電荷を

$$\mathrm{en}\ \psi_{\alpha_i} = -m - \frac{\rho_i}{k}$$

で定義する．また定義から D は $\rho(k\alpha)$ の作用と可換であることがわかる．すなわち $[D, \rho(k\alpha)] = 0$ となる．従って D は $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}_{kQ}$ 上で well-defined である．単純ルートについての結果をもちいることで，より一般に電荷列 $\mathcal{R}' = (n_{r_l^{(1)},l}, \ldots, n_{1,1})$ に対するパラフェルミオン作用素で

$$[D, \psi_{\mathcal{R}'}(m_{r_l^{(1)}}, \ldots, m_{1,1})] = -\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{r_i^{(1)}} m_{s,i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_j)_{(0)}\rangle \sum_{s,t=1} \frac{st}{k} p_i^{(s)} p_j^{(t)}$$

が成立する．このとき $L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}_{kQ}$ の指標は

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}_{kQ} = \sum_{m,r_1,\ldots,r_l \geq 0} \dim\ (L(\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}_{kQ})_{(m,r_1,\ldots,r_l)} q^m y_1^{r_1} \cdots y_l^{r_l}$$

で定義される．ここで $(L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}^+}_{kQ})_{(m,r_1,\ldots,r_l)}$ は共形電荷が m で双対電荷列 $\mathcal{R} = (r_l^{(1)}, \ldots, r_1^{(k-1)})$ について $r_i = \sum_{s=1}^{k-1} r_i^{(s)}$ を満たすようなベクトルで生成されるウェイト空間．このとき次が成立する．

定理 6.5. *[10, Theorem 16], [11, Theorem 21]*

$$\mathrm{ch}\ L(k\Lambda_0)^{\hat{\mathfrak{h}}k}_{kQ} = \sum_{\mathcal{P}^{(k-1)}} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}\langle(\alpha_i)_{(0)}, (\alpha_j)_{(0)}\rangle \sum_{s,t=1}^{k-1} D_{s,t}^{(k)} p_i^{(s)} p_j^{(t)}}}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{s=1}^{k-1}(q^{\rho_i \chi_i})_{p_i^{(s)}}} \prod_{i=1}^{l} y_i^{\sum_{s=1}^{k-1} s p_i^{(s)}}$$

ここで列 $\mathcal{P}^{(k-1)}$ は $l(k-1)$ 個の非負整数からなる．

謝辞

最後に RIMS 研究集会「表現論とその周辺分野における諸問題」の開催にご尽力くださり，筆者に講演の機会を与えてくださった直井克之さんに感謝の意を表します．

参考文献

[1] M. Butorac, S. Kožić and M. Primc, Parafermionic bases of standard modules for affine Lie algebras, Mathematische Zeitschrift, published online, https://doi.org/10.1007/s00209-020-02639-w (2020).

[2] M. Butorac and C. Sadowski, Combinatorial bases of principal subspace of modules for twisted affine Lie algebras of type $A_{2l-1}^{(2)}, D_l^{(2)}, E_6^{(2)}$ and $D_4^{(3)}$, New York J. Math. **25**, 71-196 (2019).

[3] B. Feigin and A. Stoyanovsky, Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold, arXiv:hep-th/9308079 (1993).

[4] B. Feigin and A. Stoyanovsky, Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells (Russian). Funktsional Anal. I. Prilozhen **28**, 68-90 (1994). transkation in: Funct. Anal. Appl., 28 (1994), pp. 55-72.

[5] G. Georgiev, Combinatorial construction of modules for infinite-dimensional Lie algebras, I. Principal subspace. J. Pure Appl. Algebra **112**, 247-286 (1996).

[6] G. Georgiev, Combinatorial construction of modules for infinite-dimensional Lie algebras, II, Parafermionic space, arXiv:q-alg/9504024 (1995).

[7] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, Proc. Nat. Acid. Sci. USA **82**, 8295-8299 (1985).

[8] J. Lepowsky and M. Primc, Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ Contemporary Math, Amer. Math. Soc, Providence, RI, vol. 46 (1985).

[9] J. Lepowsky and R.L. Wilson, The structure of standard modules, I: Universal algebras and Rogers-Ramanujan identities. Invent. Math. **77**, 199-290 (1984).

[10] M. Okado and R. Takenaka, Parafermionic bases of standard modules for twisted affine Lie algebras of type $A_{2l-1}^{(2)}, D_{l+1}^{(2)}, E_6^{(2)}$ and $D_4^{(3)}$, Algebras and Representation Theory, https://doi.org/10.1007/s10468-022-10159-w (2022).

[11] R. Takenaka, Vertex algebraic construction of modules for twisted affine Lie algebras of type $A_{2l}^{(2)}$, arXiv:2205.05271v1.