Schur多重ゼータ値の双対公式とその拡張

東北大学理学研究科　大野泰生
Yasuo Ohno
Mathematical Institute, Tohoku University

多重ゼータ値の双対公式とその一般化(O-rel)およびその一変数補間が知られている。Schur多重ゼータ値について同様の3定理を得たので報告する。前半2定理は、中筋麻貴氏(上智大学,東北大学)との共同研究[NO]であり、最後の定理は、中筋氏と武田渉氏(東京理科大学)との共同研究[NOT]である。

Schur多重ゼータ値

整数の分割 λ, μ は $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$, $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_r \geq 0$, $\lambda_i \geq \mu_i$ を満たすとする。shape $\delta = \lambda/\mu$ の skew Young diagram の集合を D_δ とし、shape δ の Young盤の集合を $T_\delta(\mathbb{Z})$, shape δ の半標準Young盤の集合を $SSYT(\delta)$ とする。

Schur多重ゼータ値は次のように定義される。

$$\zeta_\delta(\mathbb{k}) = \sum_{M \in SSYT(\delta)} \prod_{(i,j)\in D_\delta} m_{ij}^{-k_{ij}} \qquad \mathbb{k} = (k_{ij})_{(i,j)\in D_\delta} \in W_\delta(\mathbb{Z})$$

ここで $M = (m_{ij})_{(i,j)\in D_\delta}$, $W_\delta(\mathbb{Z}) = \left\{ \mathbb{k} \in T_\delta(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} k_{ij} \geq 2 & \text{if } (i,j): \text{corner} \\ k_{ij} \geq 1 & \text{o.w.} \end{array} \right\}$

とする。cornerとはYoung diagramの右下角のことである。

$W_\delta(\mathbb{Z})$ が ζ_δ の収束indexであるが、双対公式を考える上では、$W_\delta(\mathbb{Z})$ の部分集合 I_δ^D に制限する必要がある。I_δ^D の定義のために、収束片を導入する。多重ゼータ値の高さ1の収束インデックス $A(a,b) = \underbrace{1,\cdots,1}_{a-1}, b+1$ を収束片と呼び、縦1列のYoung盤 $\boxed{A(a,b)} = \left.\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline 1 \\ \hline b+1 \\ \hline \end{array}\right\} a-1$ とみなす。このとき多重ゼータ値の双対公式は次のように書ける。

$$\zeta(\underbrace{1,\cdots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \cdots, \underbrace{1,\cdots,1}_{a_n-1}, b_n+1) = \zeta(\underbrace{1,\cdots,1}_{b_n-1}, a_n+1, \cdots, \underbrace{1,\cdots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \qquad & \| \\ \zeta_{\begin{array}{|c|}\hline \vdots \\ \hline\end{array}}\left(\begin{array}{|c|}\hline A(a_1,b_1) \\ \hline \vdots \\ \hline A(a_n,b_n) \\ \hline\end{array}\right) & & \zeta_{\begin{array}{|c|}\hline \vdots \\ \hline\end{array}}\left(\begin{array}{|c|}\hline A(b_n,a_n) \\ \hline \vdots \\ \hline A(b_1,a_1) \\ \hline\end{array}\right) \end{array}$$

例えば $a_1=1, b_1=1, a_2=2, b_2=1$ とすれば

$$\zeta_{日}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}\right) = \zeta(2,1,2) = \zeta(3,2) = \zeta_{日}\left(\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}\right)$$ である。

indexの集合 W_δ^{diag}, I_δ^D を以下で定義する。

$$W_\delta^{diag} = \{ \mathbb{k} \in W_\delta \mid k_{i+1,j+1} = k_{i,j} \}$$

$I_\delta^D = \{ \mathbb{k} \in W_\delta^{diag} \mid$ $\mathbb{k}$ は収束片に分解でき、収束片を用いて記した場合に その (i,j) 成分と $(i+1,j+1)$ 成分が一致する。$\}$

$I_\delta^D \ni \mathbb{k}$ に対し、$\mathbb{k}$ の双対 index $\mathbb{k}^\dagger \in I_{\delta^\dagger}^D$ を次で定める。

$\mathbb{k}$ を収束片で表記したものを、180度回転し、各収束片を双対に取りかえ、元の表記に戻したものを $\mathbb{k}^\dagger$ とする。

例えば以下のようになる。

(i) $$\mathbb{k} = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline A(1,1) \\ \hline A(2,1) \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline A(2,1)^\dagger \\ \hline A(1,1)^\dagger \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline A(1,2) \\ \hline A(1,1) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} = \mathbb{k}^\dagger$$

(ii) $$\mathbb{k} = \begin{array}{|c|c|}\cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline A(1,2) & A(2,1) \\ \hline A(1,1) & A(1,2) \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline A(2,1) & A(1,1) \\ \hline A(1,2) & A(2,1) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array} = \mathbb{k}^\dagger$$

注意として、$\mathbb{k}^\dagger$ の shape $\delta^\dagger$ は $\mathbb{k}$ に依っており、δ だけでは決まらない。

双対公式とその一般化

以上の定義の下、Schur多重ゼータ値の双対公式とその一般化 (ϑ-rel) およびその一変数補間を得た。

<u>定理 1 (双対公式; Nakasuji-O [NO])</u> $\mathbb{k} \in I_\delta^D$ とその双対 $\mathbb{k}^\dagger \in I_{\delta^\dagger}^D$ に対して、次が成立する.

$$\zeta_\delta(\mathbb{k}) = \zeta_{\delta^\dagger}(\mathbb{k}^\dagger)$$

次に、Schur版の ϑ 和を $\mathbb{k} \in W_\delta(\mathbb{Z})$, $\mathbb{E} \in T_\delta(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\vartheta(\mathbb{k}; l) = \sum_{|\mathbb{E}|=l} \zeta_\delta(\mathbb{k}+\mathbb{E}) \qquad \left(|\mathbb{E}| = \sum_{(i,j)\in D_\delta} \varepsilon_{ij} \right)$$

で定義する。

<u>定理 2 (一般双対公式; Nakasuji-O [NO])</u> $\mathbb{k} \in I_\delta^D$ とその双対 $\mathbb{k}^\dagger \in I_{\delta^\dagger}^D$ と、$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、次が成立する.

$$\vartheta(\mathbb{k}; l) = \vartheta(\mathbb{k}^\dagger; l)$$

定理 1, 定理 2 は縦 1 列の Young 盤に制限すると、通常の多重ゼータ値における双対公式と一般双対公式 (ϑ-rel.) となる。

多重ゼータ値の ϑ 和の複素補間は、Hirose-Murahara-Onozuka [HMO] において導入され、双対性がそのまま補間されることが示された。今回の研究では、Kamano-Onozuka [KO] によって得られた積分表示を拡張して Schur版の ϑ 和の複素補間を定義した。

<u>定義</u> $\mathbb{k} \in I_\delta^D$ と複素変数 $s \in \mathbb{C}$ に対し、関数 $I_{\mathbb{k}}(s)$ を次で定義する。

$$I_{\mathbb{k}}(s) = -\frac{\sin(\pi s)}{\pi} \sum_{(m_{ij}) \in SSYT(\delta)} \prod_{(i,j)\in D_\delta} \frac{1}{m_{ij}^{k_{ij}-1}} \int_0^\infty \frac{w^{-s-1}}{\prod_{(i,j)\in D_\delta}(w+m_{ij})} dw$$

関数 $I_{\mathbb{k}}(s)$ に対して、次の定理を得た。

定理 3 (一般双対公式の複素補間：Nakasuji - O - Takeda [NOT])

(1) $\mathbb{k} \in I^D_\delta$, $\mathbb{E} \in T_\delta(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、次の関係が成り立つ。

$$I_{\mathbb{k}}(l) = \sum_{|\mathbb{E}|=l} \zeta_\delta(\mathbb{k}+\mathbb{E}) = O(\mathbb{k};l)$$

(2) $\mathbb{k} \in I^D_\delta$ とその双対 $\mathbb{k}^\dagger \in I^D_{\delta^\dagger}$ と、$s \in \mathbb{C}$ に対して、次が成り立つ。

$$I_{\mathbb{k}}(s) = I_{\mathbb{k}^\dagger}(s)$$

謝辞

この度の RIMS「多重ゼータ値の諸相」にて講演機会を頂きありがとうございました。本研究において筆者は、科学研究費 21H04430, 16H06336, 18H01110, 19K03437 から一部支援を受けました。

参考文献

[KO] K.Kamano-T.Onozuka, Analytic properties of Ohno function, Mathematica Scandinavica 127 (2021) 600-616.

[HMO] M.Hirose-H.Murahara-T.Onozuka, An interpolation of Ohno's relation to complex functions, Mathematica Scandinavica 126 (2020) 293-297.

[NO] M.Nakasuji-Y.Ohno, Duality formula and its generalization for Schur multiple zeta values, (arXiv: 2109.14362).

[NOT] M.Nakasuji-Y.Ohno-W.Takeda, An interpolation of the generalized duality formula for the Schur multiple zeta values to complex functions, (arXiv: 2204.04839)

[NPY] M.Nakasuji-O.Phuksuwan-Y.Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, Adv. Math., 333 (2018) 570-619.

[O] Y.Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, J.Number Theory 74 (1999) 39-43.